

正交试验设计

中国科学院数学研究所统计组编

无锡市革命委员会科学技术交流站印

一九七三年十月

前 言

这本讲义的目的是向同志们介绍多因素试验的一种方法——正交试验设计。

在生产斗争和科学实验中，经常要改革旧工艺，研制新产品，达到优质高产低消耗的目的。而这一切都离不开做试验。如何安排试验，是很值得讲究的一个问题。试验安排得好，试验次数不多就能得到满意的结果；试验安排得不好，试验次数既多，结果还不理想。在一项试验中，当考察的因素很少时，已有很多行之有效的办法，这些方法大家都很熟悉了。

在单因素、双因素优选法推广应用的过程中，广大工人、技术人员又提出了一些更复杂的问题。其复杂性表现在：1)影响考察指标的因素较多，且暂时还无法肯定哪一个（或二个）因素是最主要的。2)需要考察的指标较多，而指标间又有些矛盾。例如，研究橡胶配方时，既要考虑伸长率，又要考虑变形、屈曲等性能。3)有些试验因素较多，而试验周期又长，希望一批同时做几个试验，这就要求在试验之前统筹安排，决定一批同时做哪几个试验。4)有些试验误差较大，给试验结果的分析带来许多干扰等等。对上述实际中提出的问题，有没有一个多快好省的试验方法呢？实践证明正交试验设计对解决多因素、多指标、周期长、有误差等一类相当广泛的试验，都有较好的效果。

还必须特别指出，广大工人、技术人员及数学工作者，用毛主席哲学思想为指导，经过多次的实践，对原有的正交试验设计的方法，进行了提炼与改造，去掉其中繁琐哲学与形而上学的部分，取其精华，弃其糟粕，使之易于为工农兵所掌握。用这种方法来安排试验完全表格化了，分析试验结果时也只须作极简单的加法运算。通过这种方法来安排试验，不但可以优选到较好的工艺条件（或配方），而且可以帮助我们在错综复杂的因素中抓住主要因素。

近年来我们在一些地区曾推广过这种方法，大量实践证明这种方法易为工农兵，科技人员掌握和运用，收到良好的效果，普遍受到工人和科技人员的欢迎。

这本讲义是在南京市和无锡市正交试验设计学习班的讲稿的基础上整理而成的，在此过程中受到两市计委、科技组的大力支持和热情帮助以及得到两市有关单位的大力协作，在此向他们表示衷心的感谢。

由于水平所限，讲义中一定有不少缺点和错误，欢迎批评、指正。

编 者

1973年10月

目 录

前言

一、试验方案的设计	1
二、试验结果的分析	2
三、正交试验设计的优点	4
四、多指标的试验	6
五、水平数不同的试验	9
六、有交互作用的试验	12
七、混杂现象与混杂技巧	16
八、小结	18
参考文献	19
附录：正交表	20

- | | | | |
|--------------------------------|--------------------------------|---------------------------------------|--------------------------------|
| 1. $L_4(2^3)$, | 2. $L_8(2^7)$, | 3. $L_9(3^4)$, | 4. $L_{16}(4^6)$, |
| 5. $L_{16}(2^{15})$, | 6. $L_{25}(5^6)$, | 7. $L_{27}(3^{13})$, | 8. $L_8(4 \times 2^4)$, |
| 9. $L_{12}(3 \times 2^3)$, | 10. $L_{18}(2 \times 3^7)$, | 11. $L_{16}(4 \times 2^{12})$, | 12. $L_{16}(4^2 \times 2^9)$, |
| 13. $L_{16}(4^3 \times 2^6)$, | 14. $L_{16}(4^4 \times 2^3)$, | 15. $L_{24}(3 \times 4 \times 2^4)$. | |

一、试验方案的设计

先看一个例子。

例 1: 为了提高某化工产品的转化率, 选择了三个有关的因素, 反应温度(A), 反应时间(B), 用碱量(C), 并确定了它们的试验范围:

A: 80℃—90℃, B: 90分—150分, C: 5%—7%。

要制定这个试验的方案。

为了叙述的方便, 以后凡是试验中欲考察的条件叫做因素, 这里温度、时间、用碱量都是因素。每个因素在其试验范围内取的试验点, 叫做该因素的水平。对因素A, 如在试验范围内选了三个试验点80°, 85°, 90°, 它们都叫做A的水平, 并说A取了三个水平。

如果在这个试验中, 每个因素都取三个水平:

A: 80℃, 85℃, 90℃

B: 90分, 120分, 150分

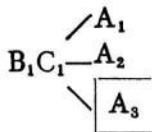
C: 5%, 6%, 7%

为了叙述方便, A的三个水平分别用 A_1, A_2, A_3 表示, 这里 $A_1 = 80^\circ, A_2 = 85^\circ, A_3 = 90^\circ$ 。对 B, C 也有类似的记号。

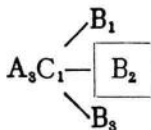
通常有这样两种试验方法:

1. 让三个因素的所有水平之间都要相碰, 即 $A_1B_1C_1, A_1B_1C_2, A_1B_1C_3, A_1B_2C_1, A_1B_2C_2, \dots, A_3B_3C_3$, 共27次试验, 反映在图1上就是立方体内的27个点。这种试验叫做全面试验。全面试验对事物内部的规律剖析得比较清楚, 但全面试验要求的试验次数太多。特别当因素较多, 每个因素的水平数又较大时, 试验量是惊人的。如选了六个因素, 每个因素五个水平, 如欲做全面试验, 则需 $5^6 = 15625$ 次, 是不可能实现的。

2. 固定其它因素变化一个因素。如首先固定 B 和 C 于 B_1, C_1 , 让 A 变化



试验结果 A_3 最好; 然后固定 A 于 A_3 , C 还是 C_1 让 B 变化



以 B_2 最好; 最后固定 A、B 于 A_3 和 B_2 , 变化 C

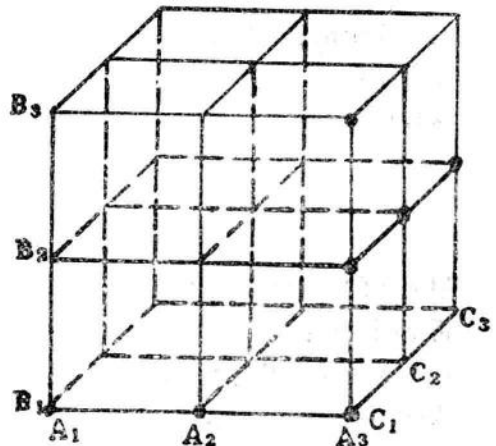
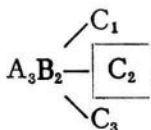


图 1

以 C_2 为好。于是就选得了较优的工艺条件 $A_3B_2C_2$ 。这种方法一般也能得到一定的效果，但是有许多缺点。例如用这种方法做试验代表性就很差，为了清楚起见，我们把它的试验点用“●”画在图1上。我们看到它完全分布在试验范围内的一个角上，而很大的一个范围内没有试验点，因此这样的试验方法自然是不全面的。

上面两种方法都有其优点和缺点，能否吸收两者的优点，克服它们的缺点，设计一种较为合理的试验方案呢？用正交表来安排试验方案就是一个行之有效的办法。

对例1的试验如何用现成的正交表来安排试验方案呢？先看附录中给出的一个正交表 $L_9(3^4)$ 。符号L表示正交表，L下面的数字“9”表示正交表有9行，即用这张表来安排要做9次试验，括弧内下面的数“3”表示每个因素都取3个水平，括弧内的指数“4”表示正交表有4列，即用这张表最多可排四个因素。

例1是三因素，每因素三水平的试验，可用 $L_9(3^4)$ 来安排试验方案。具体步骤如下：

1. 把因素温度A，时间B，用碱量C放到 $L_9(3^4)$ 的任意三列的表头上。例如，放在前三列。

2. 把A、B、C对应三列的“1”、“2”、“3”翻译成具体的水平。如表1所示。

表1 转化率试验的方案

试 验 号	A	B	C
1	1 (80°)	1 (90分)	1 (5%)
2	1 (80°)	2 (120分)	2 (6%)
3	1 (80°)	3 (150分)	3 (7%)
4	2 (85°)	1 (90分)	2 (6%)
5	2 (85°)	2 (120分)	3 (7%)
6	2 (85°)	3 (150分)	1 (5%)
7	3 (90°)	1 (90分)	3 (7%)
8	3 (90°)	2 (120分)	1 (5%)
9	3 (90°)	3 (150分)	2 (6%)

3. 9个试验方案是：第一号试验条件是温度80°，时间90分，用碱量5%；第二号试验条件是80°，120分，6%……；第九号试验条件是90°，150分，6%。

这样试验方案就制定好了。

二、试验结果的分析

用表1的试验方案经过试验，测得了9个转化率（见表2），通过这个九个数据我们要分析下列问题：

1. 找最好的工艺条件，即选最优水平组合。

从试验方案知道，温度是80°时做了三个试验，温度是85°和90°时也都做了三个试验。为了比较温度80°、85°、90°时那一个转化率最高，我们要做下面的计算：

80°时，三次试验的转化率之和 = 31 + 54 + 38 = 123；

85°时, 三次试验的转化率之和 = 53 + 49 + 42 = 144,

90°时, 三次试验的转化率之和 = 57 + 62 + 64 = 183。

计算出的三个数, 填在表 2 A 列对应 K_1 、 K_2 、 K_3 的三行。

把 K_1 、 K_2 、 K_3 分别除以 3, 得 $k_1 = 41$, $k_2 = 48$, $k_3 = 61$, 它们分别表示温度是 80°、85°、90° 时的平均转化率。

同理为了比较反应时间 90 分, 120 分, 150 分那一个转化率最高, 必须计算反应时间所在列的 K_1 、 K_2 、 K_3 , 即

$$K_1 = 31 + 53 + 57 = 141, \quad K_2 = 54 + 49 + 62 = 165, \quad K_3 = 38 + 42 + 64 = 144。$$

对用碱量也作类似的计算。然后再分别计算它们的 k_1 、 k_2 、 k_3 。

表 2 转化率试验的结果与分析

试验号	A	B	C	转化率
1	1 (80°)	1 (90分)	1 (5%)	31
2	1 (80°)	2 (120分)	2 (6%)	54
3	1 (80°)	3 (150分)	3 (7%)	38
4	2 (85°)	1 (90分)	2 (6%)	53
5	2 (85°)	2 (120分)	3 (7%)	49
6	2 (85°)	3 (150分)	1 (5%)	42
7	3 (90°)	1 (90分)	3 (7%)	57
8	3 (90°)	2 (120分)	1 (5%)	62
9	3 (90°)	3 (150分)	2 (6%)	64
K_1	123	141	135	
K_2	144	165	171	
K_3	183	144	144	
k_1	41	47	45	
k_2	48	55	57	
k_3	61	48	48	

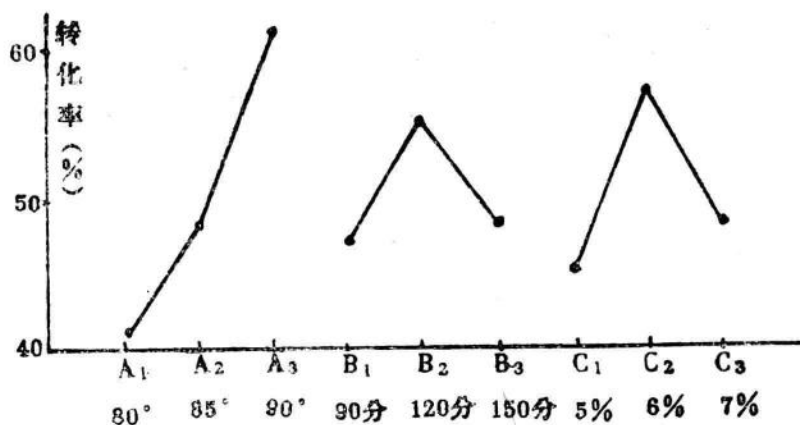


图 2 转化率与三因素关系图

以 k_1 、 k_2 、 k_3 为纵坐标，对A、B、C分别作图（图2）。由图2有如下的结论：

(1) 温度越高，转化率越高，以 90°C 最好，还应进一步探索温度更高的情况。

(2) 反应时间以120分转化率最高。

(3) 用碱量以6%转化率最高。

综合起来以 $A_3B_2C_2$ 最好。

2. 分析因素的主次。

毛主席教导我们：“……研究任何过程，如果是存在着两个以上矛盾的复杂过程的话，就要全力找出它的主要矛盾”。从图2不仅可以了解各因素对转化率的影响趋势，而且能够分析因素的主次。直观上很容易看出，一个因素对转化率影响大，是主要的，那么这个因素不同的水平相应的转化率之间差异就大；一个因素影响不大，是次要的，相应的转化率之间差异就小。反映在图上，点子散布范围大的因素是主要的，散布范围小的是次要的。从图2容易看出主次关系如下：

主 \longrightarrow 次
A B C

还需要补充一点的是，在计算 K_1 、 K_2 、 K_3 时如不小心可能会算错，计算好了以后最好验证一下，验证的方法是将每一列的 K_1 、 K_2 、 K_3 相加，对例1

A列： $123 + 144 + 183 = 450$ ，

B列： $141 + 165 + 144 = 450$ ，

C列： $135 + 171 + 144 = 450$ ，

即相加的结果都等于同一个数450，如果有一列加起来不等于450，说明这一列至少有一个 K_i 算错了。

三、正交试验设计的优点

在第一节我们讲到，对例1的试验有三种试验方法，一种是全面试验的方法，一种是固定其它因素变化一个因素的方法，还有一种是正交试验设计的方法。通过例1的分析，我们已经初步看到正交试验设计的优点，现再加以进一步的说明。

1. 几何解释。

如果做全面试验，共做27次，反映在图1上就是立方体内的27个点。用固定二个因素变化一个因素的方法，共做7次试验，反映在图1上，这7个点完全分布在立方体的一个角上，代表性自然很差。而

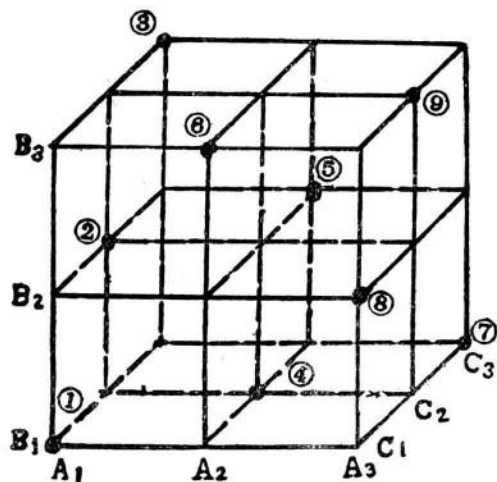


图 3

按 $L_9(3^4)$ 安排的九次试验，反映在立方体内就是图 3 的九个点，这九个点在立方体内散布很均匀，表现在：

(1) 对应 A_1 、 A_2 、 A_3 有三个平面，对应 B 和 C 的三个水平也分别有三个平面。这九个平面上的试验点都是一样多，都是三个点。即对每个因素的每个水平都一视同仁。

(2) 在每一个平面上有三行三列，在每行每列上都有试验点，且有同样数目的试验点，这里每行每列都恰有一个试验点。

由于九个点散布的均匀性，使得九个点基本上反映了 27 个点的情况。上节我们经分析，得到了最优的工艺条件 $A_3B_2C_2$ ，我们注意一下，这个条件并不包括在九个试验之中，即用正交试验设计，通过九次试验，可以选出全面试验的 27 个点中的最好的一点。为了证实分析的结论，第二步试验可在选的最好的水平组合 $A_3B_2C_2$ 和九个试验点中最好的一点

(第九号) $A_3B_3C_2$ 做比较试验。第二步试验结果， $A_3B_2C_2$ 时的转化率为 74%，而 $A_3B_3C_2$ 时是 65%，证明选的工艺条件确实是 27 个点中最优的。

2. 综合比较的设计思想。

正交试验设计的思想与固定二个因素变化一个因素的设计思想有很大的不同，它是在 B、C 变动的情况下来比较 A；在 A、C 变动的情况下来比较 B；在 A、B 变动的情况下来比较 C。具体说来，比较 A 时，B、C 处于如下的变动情况：

反应时间变动	用碱量变动
80° (三次) { <ul style="list-style-type: none"> 90分 120分 150分 	{ <ul style="list-style-type: none"> 5 % 6 % 7 %
85° (三次) { <ul style="list-style-type: none"> 90分 120分 150分 	{ <ul style="list-style-type: none"> 6 % 7 % 5 %
90° (三次) { <ul style="list-style-type: none"> 90分 120分 150分 	{ <ul style="list-style-type: none"> 7 % 5 % 6 %

80° 时，三种反应时间，三种用碱量都变到了； 85° ， 90° 时它们也是三种情况都变到了。也就是说对三种不同的温度，反应时间，用碱量的变化是处于完全平等的状况。正是由于这一点，当我们比较 A 列的 K_1, K_2, K_3 时可以认为，它们间的差异主要是由于温度的不同而引起的，而反应时间及用碱量的影响被消除了。这样一种比较的思想就叫综合比较的思想，它不是静止的来比较三种温度，而是在运动中来比较，这是符合辩证唯物主义观点的。

类似的，比较 B 时是在 A、C 变动下进行的，即：

温度变动情况	用碱量变动情况
90分 (三次) { <ul style="list-style-type: none"> 80° 85° 90° 	{ <ul style="list-style-type: none"> 5 % 6 % 7 %

120分 (三次)	}	80°	}	6 %
		85°		7 %
		90°		5 %
150分 (三次)	}	80°	}	7 %
		85°		5 %
		90°		6 %

读者自己可以验证，比较C时也有类似的性质。

四、多指标的试验

有些产品考核的指标常常不止一个，这一类的试验叫多指标试验，在分析时要综合各个指标的情况后才能下结论。多指标试验在试验方案的安排上和单指标完全一样，只是试验分析的方法有所不同而已。

例 2： 研究某橡胶配方，选了四个因素，每个因素四个水平：

水 平 \ 因 素	促 进 剂 总 量 (A)	氧 化 锌 总 量 (B)	促 进 剂 D 占 的 比 例 (D)	促 进 剂 M 占 的 比 例 (M)
1	2.9克	1克	30%	34.7%
2	3.1克	3克	25%	39.7%
3	3.3克	5克	35%	44.7%
4	3.5克	7克	40%	49.7%

这是一个四因素四水平的试验，选用正交表 $L_{16}(4^4)$ 来安排，将四个因素分别放在该表的任四列，譬如讲放在前四列，即

列 号	1	2	3	4	5
因 素	A	B	D	M	

把前四列的 1, 2, 3, 4 翻译成具体的条件就得到欲试验的16个配方。

为了使得现有配方也在16个之中，因素D的水平没有完全按大小排列，四个水平按 30%、25%、35%、40% 排列。实际上，每一个因素的水平都不一定完全按大小次序排，可以适当颠倒，这样做有时由于实际情况的需要，例如不颠倒现配方（工艺）就不在试验号之中，或者不颠倒某些试验号的反应就不能正常进行。

例 2 的试验共考核三项指标，伸长率，变形和屈曲，每一个配方都进行这三项指标的测试，其试验方案与测试结果如表 3 所示。

表 3

橡胶配方的试验方案与结果

列号 试验号	A	B	D	M	伸长率	变形	屈曲
	1	2	3	4	(%)	(%)	(万次)
1	2.9	1	30	34.7	545	40	5.0
2	2.9	3	25	39.7	490	46	3.9
3	2.9	5	35	44.7	515	45	4.4
4	2.9	7	40	49.7	505	45	4.7
5	3.1	1	25	44.7	492	46	3.2
6	3.1	3	30	49.7	485	45	2.5
7	3.1	5	40	34.7	499	49	1.7
8	3.1	7	35	39.7	480	45	2.0
9	3.3	1	35	49.7	566	49	3.6
10	3.3	3	40	44.7	539	49	2.7
11	3.3	5	30	39.7	511	42	2.7
12	3.3	7	25	34.7	515	45	2.9
13	3.5	1	40	39.7	533	49	2.7
14	3.5	3	35	34.7	488	49	2.3
15	3.5	5	25	49.7	495	49	2.3
16	3.5	7	30	44.7	476	42	3.3

分析时和例 1 一样, 先计算各列的 K_i 和 k_i , 这时因为每个 K_i 是四个数据之和, 所以 $k_i = \frac{K_i}{4}$ 。由于指标有三项, 计算时要分别进行, 其结果列表 4。

表 4

橡胶配方试验计算表

指标 因素	伸 长 率				变 形				屈 曲			
	A	B	D	M	A	B	D	M	A	B	D	M
K_1	2055	2136	2017	2047	176	184	169	183	18.0	14.5	13.5	11.9
K_2	1956	2002	1992	2014	185	189	186	182	9.4	11.4	12.3	11.3
K_3	2131	2020	2049	2022	185	185	188	182	11.9	11.1	12.3	13.6
K_4	1992	1976	2076	2051	189	177	192	188	10.6	12.9	11.8	13.1
k_1	514	534	504	512	44	46	42	46	4.5	3.6	3.4	3.0
k_2	489	501	498	504	46	47	47	46	2.4	2.9	3.1	2.8
k_3	533	505	512	506	46	46	47	46	3.0	2.8	3.1	3.4
k_4	498	494	519	513	47	44	48	47	2.7	3.2	3.0	3.3
R	44	40	21	9	3	3	6	1	2.1	0.8	0.4	0.6

然后根据 k_i 值作图 (图 4) 作图时每个因素的水平要按由小到大的次序作, 不要按颠倒的次序作。再由图上点子波动的大小分析因素的主次关系。有时光凭视觉观察, 分清主次有些困难, 这时可通过计算极差来进行比较。所谓极差就是几个数中最大的数与最小的

数之差，以R表示。例如对伸长率来说，(A)因素 k_1 、 k_2 、 k_3 、 k_4 的极差(以 R_A 表示)等于四个数中最大的(533)与最小的(489)之差，即 $R_A = 533 - 489 = 44$ 。极差计算的结果填在表4的最后一行。显然，极差越大，点子波动的范围也越大，因素也就越重要。由极差的大小得到因素对指标的主次关系如下：

	主—————→次			
伸 长 率	A	B	D	M
变 形	D	A,B		M
屈 曲	A	B	M	D

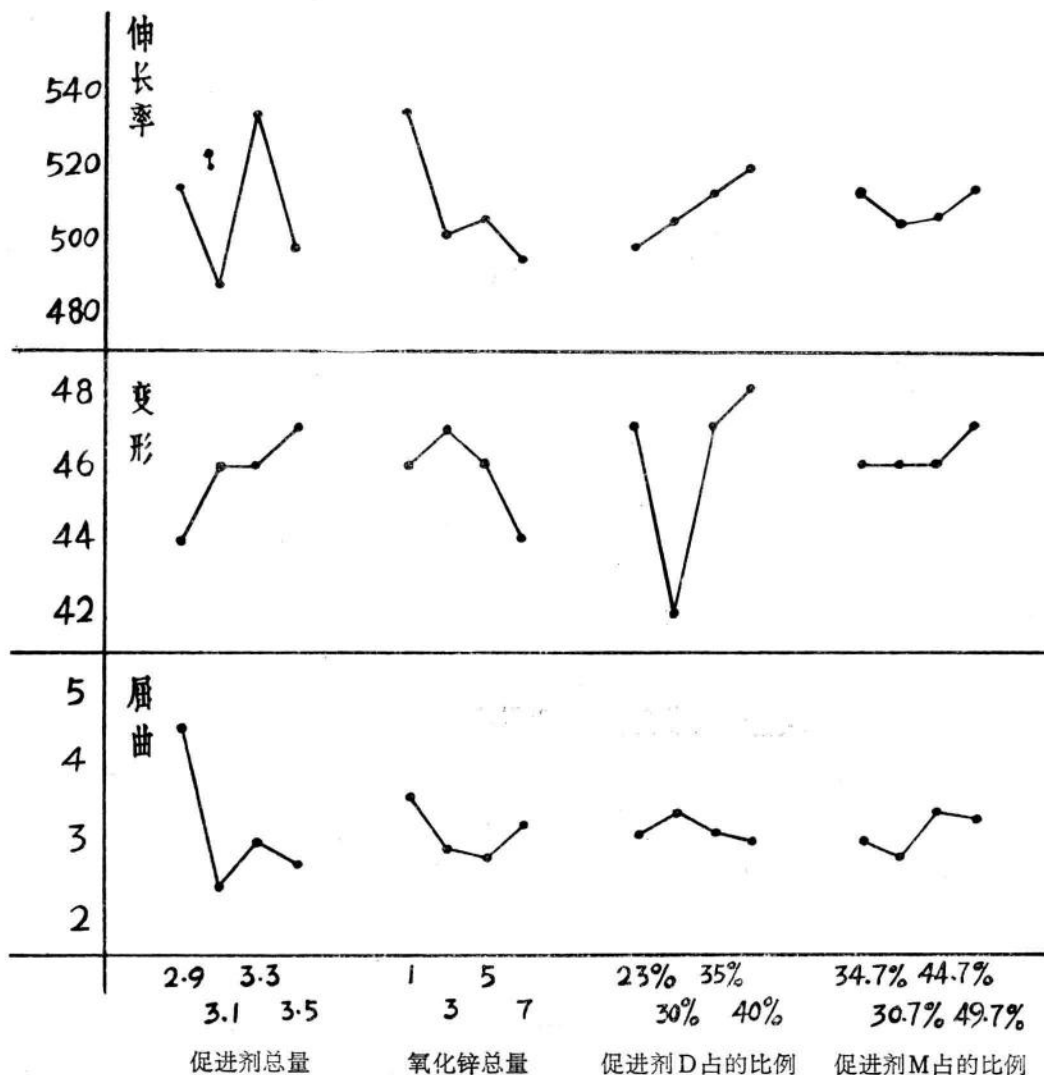


图4 四因素与三指标的关系图

最后选出最优水平组合，常遇到有两种情况，一种指标间是平等的；另一种指标间是不平等的，也就是有主要指标与次要指标之分。我们先假定三指标间是平等的。

对因素A，它在伸长率和屈曲中都处于主要矛盾地位，而在变形中它居于第二位。因

此选择最优水平时，首先考虑伸长率与屈曲，适当参考变形指标。从屈曲来看 A_1 最好（屈曲次数越多越好），从伸长率（越大越好）来看， A_3 最好，其次 A_1 。从变形（越小越好）来看 A_1 最好。综合三个指标 A 取 A_1 。

D 在变形指标中居主要矛盾，在其余指标中居很次要地位，故 D 主要由变形指标来定， D 取 D_1 好。

M 对三项指标影响都不大，对屈曲影响稍大，从屈曲来看 M 取 M_3 。（参照变形）或 M_4 （参照伸长率）。

B 在三项指标中都处于第二位，从伸长率来看总的趋势是 B 越小越好，从变形来看总的趋势是 B 越大越好，从屈曲来看以 B_1 和 B_4 为好。这里伸长率和变形指标在 B 的选取上发生了矛盾，因为这两个指标是平等的，由这次试验 B 还下不了结论，最好就因素 B 再做一次单因素试验。如果指标间是不平等的要优先照顾主要指标。例如当伸长率是国家指标，变形不是时，要优先照顾伸长率， B 取 B_1 。

当指标间不平等时，优先照顾主要指标，参照次要指标，就不详细讨论了。

多指标的综合平衡是复杂的细致的工作，数学的分析仅仅是给实际工作者提供了一个依据，但最终还需要由专业知识来定。

五、水平数不同的试验

迄今为止我们讨论的试验每个因素的水平都是一样多的，有时由于客观条件的限制或者对某些因素比较重视使各个因素的水平数不全相等，这时如何制定试验方案呢？通常有二种办法：

1. 利用混合水平的正交表。

附录的 $L_8(4 \times 2^4)$ ， $L_{12}(3 \times 2^8)$ ， $L_{16}(4 \times 2^{12})$ 等正交表都是混合水平的正交表，如果我们选的水平数符合这些表的要求，便可直接套用。

例 3： 为了探索某胶压板的制造工艺，选了如下的因素和水平：

水 平 \ 因 素	压 力 (A)	温 度 (B)	时 间 (C)
1	8 公斤	95℃	9 分
2	10 公斤	90℃	12 分
3	11 公斤		
4	12 公斤		

这项试验的方案可以直接套用正交表 $L_8(4 \times 2^4)$ ，四水平的因素放在第一列，其余两个因素放在后四列中的任两列，例如放在第二列和第三列，即

列 号	1	2	3	4	5
因 素	A	B	C		

胶压板性能的测量是凭眼看手摸，没有具体的数量，这一类的指标叫定性指标。为了使定性指标也能用类似的方法分析，通常采取打分的办法，这里按质量的好坏分别用6、5、4、3、2、1打分，6分最好，1分最坏。为了减少试验误差的干扰，每个试验号抽4块板进行检验，四块板的分数加在一起叫总分。试验的方案，结果与分析列成表5。

表5 胶压板试验的方案、结果与分析

因素 试验号	A	B	C	四块胶压板得分				总分
1	1	1	1	6	6	6	4	22
2	1	2	2	6	5	4	4	19
3	2	1	1	4	3	2	2	11
4	2	2	2	4	4	3	2	13
5	3	1	2	2	1	1	1	5
6	3	2	1	4	4	4	2	14
7	4	1	2	4	3	2	1	10
8	4	2	1	6	5	4	2	17
K ₁	41	48	64					
K ₂	24	63	47					
K ₃	19							
K ₄	27							
k ₁	5.1	3.0	4.0					
k ₂	3.0	3.9	2.9					
k ₃	2.4							
k ₄	3.4							
R	2.7	0.9	1.1					

计算K_i是对总分进行，但计算k_i时要注意相应的K_i是由几块板的分数加在一起的，就用相应板的块数去除。对四水平的列， $k_i = \frac{1}{8} K_i$ ；对二水平的列， $k_i = \frac{1}{16} K_i$ 。由k_i作图(图5)。

我们知道，当三个因素水平数一样时，主次关系完全由极差的大小来定。当

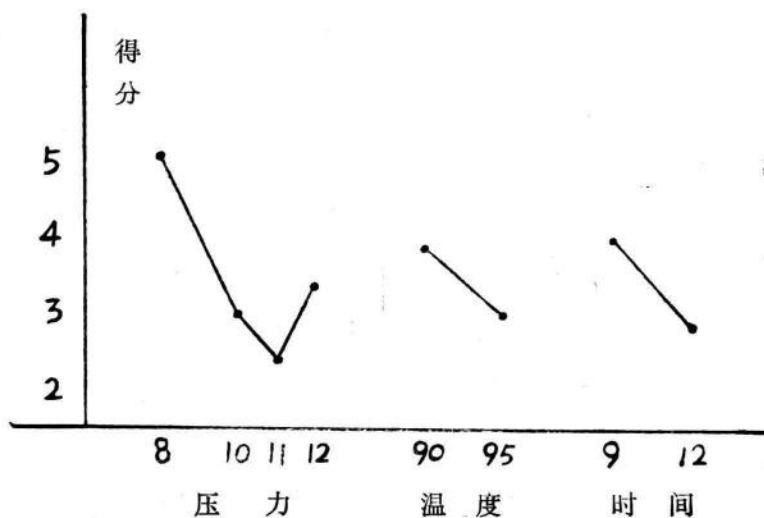


图5

水平数不同时，直接比较R是不行的，因为当两个因素对指标有同等影响时，水平多的因素理应极差要大一些。因此要用一个系数把极差折算一下才能比较，折算系数d列在表6上。A是4水平，由表6查出折算系数是0.45，折算结果

$$R'_A = \sqrt{r_A} \times R_A \times 0.45 = \sqrt{8} \times 2.7 \times 0.45 = 3.4$$

这里 r_A 表示A的每一个水平试验的板的块数。

B和C是二水平，折算系数是0.71，折数结果

$$R'_B = \sqrt{r_B} \times R_B \times 0.71 = \sqrt{16} \times 0.9 \times 0.71 = 2.6$$

$$R'_C = \sqrt{r_C} \times R_C \times 0.71 = \sqrt{16} \times 1.1 \times 0.71 = 3.1$$

最后用 R'_A 、 R'_B 、 R'_C 的大小来分主次关系，得到

主—————→次
A C B

如果需要安排的试验，没有现成的正交表可以套用怎么办呢？

2. 拟水平法。

如果在例1的试验中还要考察搅拌速度(D)这个因素，而电动机只有两挡(快,慢)，这时能否还用 $L_9(3^4)$ 来安排呢？这是可以的，解决的方法就是给搅拌速度凑足三个水平。我们让搅拌速度快的(或慢的)一挡多重重复一次，凑成第三个水平，即

水平 \ 因素	温 度 (A)	时 间 (B)	加 碱 量 (C)	搅 拌 速 度 (D)
1	80°	90分	5%	快速
2	85°	120分	6%	慢速
3	90°	150分	7%	快速

然后把A、B、C、D分别放到 $L_9(3^4)$ 的四列上，便得到了试验方案。这样一种凑足水平的方法叫做拟水平法。

例4： 玻璃绝缘子钢化试验选的因素水平如下：

因 素 \ 水 平	1	2	3	4	5
保 温 温 度	700	635	670	710	720
保 温 时 间	5.5	4.5	3.5	2.5	1.5
上 风 压	130	80	110	160	180
下 风 压	240	300	340	380	440
风 栅 形 状	I	II	III	IV	
主 风 咀 大 小	9	6	12		

其中前四个因素是五水平的，后两个因素是四水平和三水平。我们看到没有现成的正交表可以套用，比较合适的办法是选正交表 $L_{25}(5^5)$ ，将最后两个因素凑足五个水平。在

表6 折算系数表

水 平 数	折 算 系 数 d
2	0.71
3	0.52
4	0.45
5	0.40
6	0.37
7	0.35
8	0.34
9	0.32
10	0.31

风栅形状这个因素中，估计形状Ⅱ效果较好，将它重复一次，凑成第五个水平；在主风咀大小因素中，估计9、12比较好，将它们分别重复一次，凑成第四、第五个水平，于是因素、水平变成如下的样子：

因素 \ 水平	1	2	3	4	5
保温温度	700	685	670	710	720
保温时间	5.5	4.5	3.5	2.5	1.5
上风压	130	80	110	160	180
下风压	240	300	340	380	400
风栅形状	I	II	III	IV	I
主风咀大小	9	6	12	9	12

将六个因素分别放到 $L_{26}(5^6)$ 的六列上，便得到试验方案。它的分析方法和前例是类似的，就不赘述了。

六、有交互作用的试验

在有些试验当中，不仅因素对指标有影响，而且因素之间还会联合起来对指标产生作用，这个联合的作用叫做交互作用。例如看下面的两个试验

	A ₁	A ₂
B ₁	50	55
B ₂	53	58

	A ₁	A ₂
B ₁	50	55
B ₂	53	62

左边一个试验，当A从A₁变到A₂时指标都增加5，与B的水平无关；同样，B从B₁变到B₂时，指标都增加3，与A的水平无关，即

	A ₂ - A ₁
B ₁	5
B ₂	5

	B ₂ - B ₁
A ₁	3
A ₂	3

而右边一个试验情况就不太一样，且看

	A ₂ - A ₁
B ₁	5
B ₂	9

	B ₂ - B ₁
A ₁	3
A ₂	7

就是说A从A₁变到A₂引起指标变化的大小与B取什么水平有关，反之B的变化对指标的影响与A取什么水平也有关，这时我们就说A和B有交互作用，记成A × B。

交互作用的大小用 $9 - 5 = 4$ (或 $7 - 3 = 4$) 来表达。在第一个例子里 $5 - 5 = 0$, 交互作用等于零, 即没有交互作用。

在相当多试验中, 因素之间是有交互作用的。如果有交互作用, 用固定大部分因素变化一个因素的办法往往不容易优选到好的工艺条件。而正交试验设计不仅可以估计交互作用的大小, 而且可以优选到最好的试验水平组合。下面我们来看一个例子。

例 5: 在梳棉机上纺粘锦混纺纱, 为了提高质量, 选了三个因素, 每个因素二个水平,

A: 金属针布: $A_1 =$ 日本的, $A_2 =$ 青岛的,

B: 产量水平: $B_1 = 6$ 公斤, $B_2 = 10$ 公斤,

C: 锡林速度: $C_1 = 238$ 转/分, $C_2 = 320$ 转/分。

因素之间可能有交互作用, 要设计一个试验方案。

我们看附表的 $L_8(2^7)$, 它还有一个表头设计, 查表头设计中因素数为 3 的一行为:

列号	1	2	3	4	5	6	7
因素	A	B	A×B	C	A×C	B×C	

它告诉我们安排试验时把 A, B, C 分别放在 $L_8(2^7)$ 的 1, 2, 4 三列, 将每列的“1”和“2”翻译成具体的水平就得到表 7 的试验方案。表头设计还告诉我们通过 3, 5, 6 列将来可以分析因素间的交互作用。

根据表 7 的方案, 经试验得到数据 (棉结粒数) 填在表 8 上。

表 7 试验方案

试验号	A (1)	B (2)	C (4)	试验号	A (1)	B (2)	C (4)
1	日 本	6	238	5	青 岛	6	238
2	日 本	6	320	6	青 岛	6	320
3	日 本	10	238	7	青 岛	10	238
4	日 本	10	320	8	青 岛	10	320

表 8 试验结果与计算

试验号	A (1)	B (2)	A×B (3)	C (4)	A×C (5)	B×C (6)	棉结粒数
1	1	1	1	1	1	1	0.30
2	1	1	1	2	2	2	0.35
3	1	2	2	1	1	2	0.20
4	1	2	2	2	2	1	0.30
5	2	1	2	1	2	1	0.15
6	2	1	2	2	1	2	0.50
7	2	2	1	1	2	2	0.15
8	2	2	1	2	1	1	0.40
K_1	1.15	1.30	1.20	0.80	1.40	1.15	
K_2	1.20	1.05	1.15	1.55	0.95	1.20	
$K_1 - K_2$	-0.05	0.25	0.05	-0.75	0.45	-0.05	

表 8 的 K_1, K_2 的计算方法与前例是完全相同的, 由于只有两个水平, $K_1 - K_2$ 的绝对值大小就反映了点子的波动大小。 $K_1 - K_2$ 绝对值大的该因素 (或交互作用) 就重要。由表 8 的计算结果有如下的结论:

1. 影响棉结粒数 (越小越好) 的因素和交互作用的主次关系如下:

主 $\xrightarrow{\hspace{10em}}$ 次
C, A×C, B, A, A×B, B×C.

可以认为两种金属针布以及 $A \times B, B \times C$ 对棉结粒数是没有多大影响的。

2. 锡林速度以 238 转/分为好, 产量水平以 10 公斤为好。

3. 因为 $A \times C$ 对棉结粒数影响较大, 就要看 A 和 C 如何搭配比较好。A 和 C 共有四种搭配 $A_1 C_1, A_1 C_2, A_2 C_1, A_2 C_2$, 从表 7 (或表 8) 看到每种搭配有两次试验, 相应都有两个数据, 如对应 $A_1 C_1$ 的是第 1 号和第 3 号试验, 相应的数据是 0.30 和 0.20, 将它们加在一起就代表了 $A_1 C_1$ 的搭配效果, 用这样的方法得到表 9, 由表 9 看出以 $A_2 C_1$ 为最好, 棉结粒数最低。

表 9 A×C 表

	A ₁	A ₂
C ₁	0.50	0.30
C ₂	0.65	0.90

综合上述得到最好的水平组合是 $A_2 B_2 C_1$, 这正好是第 7 号试验, 从表 8 看出它的确是好的。但 5 号试验与 7 号效果一样好, 因此最好将这两个试验再重复一次来比较它们的效果。

分析了这个例子以后, 读者一定会提出这样的问题: (1) 为什么通过 3、5、6 列可以算出交互作用的大小。(2) 表头设计是怎么来的。我们就用本节开始的例子来说明, 这个例子共做了四次试验, 将它们编上试验号①、②、③、④。

	A ₁	A ₂
B ₁	① ₆₀	③ ₆₆
B ₂	② ₆₃	④ ₆₂

本节开始时讲到, $A \times B$ 的大小 = 9 - 5, 而 $9 = ④ - ②, 5 = ③ - ①$, 所以 $A \times B$ 的大小 = ① + ④ - ② - ③, 即一个对角之和减去另一个对角之和。这四次试验, 用正交表 $L_4(2^3)$ 来排, 就是把 A 和 B 分别放在该表的第 1 列和第 2 列, 如表 10 所示。容易看出, 第三列的 $K_1 - K_2 = ① + ④ - ② - ③$, 即 $K_1 - K_2 = A \times B$ 的大小。这说明可以通过第三列来计算 $A \times B$ 的大小。类似的道理对 $L_8(2^7)$ 完全适用。

表 10

	1	2	3
列号 试验号	(A)	(B)	(A×B)
1	1	1	1
2	1	2	2
3	2	1	2
4	2	2	1

至于表头设计, 它是根据交互作用表查出来的, $L_8(2^7)$ 的交互作用表如表 11 所示。如果我们把 A、B、C 分别放在 $L_8(2^7)$ 的 1、2、4 三列, 我们希望知道它们的交互作用在那一列。因为 A 放在第 1 列, B 放在第 2 列, 查表 11 的第 1 行第 2 列对应的数字为 3,

即 $A \times B$ 在第 3 列。同样欲查 $B \times C$ 在那一列, 就查对应第 2 行第 4 列的数字, 为 6, 即