

新课标

高考数学 题型全归纳

(下册)

张永辉 主编

- 精选典型例题分析讲解
- 突出复习重点与难点
- 注重传授解题思路与技巧
- 深度把握各类题型的变化



清华大学出版社

新课标

高考数学 题型全归纳

(下册)

张永辉 主编

清华大学出版社
北京

内 容 简 介

新课标高考数学题型全归纳分为上、下两册,是为快速提高考生的解题水平和技巧而编写的高考第一轮复习用书.本书从历年高考真题和国内外的书刊资料中筛选出 204 个重要题型(本书是下册共归纳了 100 个题型),归纳总结了各种题型的解题方法和技巧,旨在开拓考生的视野,提高考生的解题速度.

本书是一本可以让学生“看了就懂,懂了就会,会了就对”的高考备考指南,同时又是一本可以让老师备课变得轻松,又倍感亲切的教学参考工具书,适合参加高考的理科学生和程度较好的文科学生使用.

本书封面贴有清华大学出版社防伪标签,无标签者不得销售。

版权所有,侵权必究。侵权举报电话:010-62782989 13701121933

图书在版编目(CIP)数据

新课标高考数学题型全归纳(下册)/张永辉主编. —北京:清华大学出版社,2011.12

ISBN 978-7-302-27220-5

I. ①新… II. ①张… III. ①中学数学课-高中-题解-升学参考资料 IV. ①G634.605

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 224679 号

责任编辑:陈仕云

封面设计:张岩

版式设计:文森时代

责任校对:张彩凤 张兴旺

责任印制:李红英

出版发行:清华大学出版社

地 址:北京清华大学学研大厦 A 座

<http://www.tup.com.cn>

邮 编:100084

社 总 机:010-62770175

邮 购:010-62786544

投稿与读者服务:010-62776969, c-service@tup.tsinghua.edu.cn

质 量 反 馈:010-62772015, zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn

印 装 者:北京鑫海金澳胶印有限公司

经 销:全国新华书店

开 本:185×260 印 张:27.25 字 数:625 千字

版 次:2011 年 12 月第 1 版 印 次:2011 年 12 月第 1 次印刷

印 数:1~5000

定 价:45.00 元

本书编委会

主 编 张永辉

副主编 徐贵冬 张宏卫 徐宣庆 张尚仁 王晓明

张喜金 何亚飞

编 委 余 臣 吴玉会 连文杰 徐其钊 韩天民

吴夏光 陈文贤 肖贵钧 朱良军 张春丽

郭超英

前 言

高考数学复习应该抓什么？众所周知首先应该抓基础，包括基本理论、基本概念和基本运算；其次应该抓解题方法和技巧。后者如何抓？许多人主张多做题，“熟读唐诗三百首，不会作诗也能吟”。诚然，多做题不失为一种方法，但不是捷径。经过多年教学实践，我们认为最有效的方法应该是抓题型。本书作者从历年的高考真题和国内外的书刊资料中通过认真分析，筛选出203个（其中：上册104个，下册99个）重要题型，然后归纳总结出各种题型的解题方法和技巧，旨在帮助广大考生在复习时起到事半功倍、举一反三、触类旁通的效果。

本书是一本为快速提高考生的解题水平和技巧而编写的应试图书，具有如下特点。

(1) 遴选题型恰当，具有典型性、代表性、穿透性。所选题型有一定的难度与广度，同时注意与高考大纲（或复习说明）紧密结合。

(2) 针对题型精选的例题所做的详尽分析和解答对考生很有启发性。尤其是“评注”部分，寥寥数语的点睛之笔，起到了拨云见日、开阔视野的作用。例题后呈现的变式题，循序渐进，符合学生的认知规律，并注重纵横联系，前呼后应，可以发现共同的本质特征。通过数学思想方法的高度提炼，研究并挖掘出重要解题模型，“秒杀”高考题，达到口述试题的从容境界。

(3) 总结了一些全新的解题方法和技巧，可以大大提高学生的解题速度，拓宽解题思路。

本书是一本可以让学生“看了就懂，懂了就会，会了就对”的高考备考指南，同时又是一本可以让老师备课变得轻松，又倍感亲切的教学参考工具书，适合参加高考的理科学生和程度较好的文科学生在第一轮复习时研读使用。

本书从题型整理到编写再到多次校对和出版，其间经历了两年多时间。书中倾注了许多专家和一线教师的心血和创造性的工作，具体编写分工如下：张永辉老师，负责编写集合与常用逻辑用语、函数、导数与定积分、三角函数、平面向量、数列、不等式、立体几何、直线与圆的方程、圆锥曲线方程、算法初步、计数原理、概率与统计等章，并负责全书的校对工作；张尚仁老师，负责编写三角函数、计数原理、概率与统计、推理与证明、数系的扩充与复数的引入、选讲等内容，同时参与全书校对工作；徐宣庆老师，负责函数部分的编写和全书校对工作；徐贵冬老师，负责编写立体几何的三视图和几何模型、圆锥曲线中的定点、定值、最值和定直线的常见结论及模型，同时参与全书的校对工作；张宏卫老师，负责编写简易逻辑、导数与定积分、数列的通项公式与求和、双曲线和抛物线，以及相应章节的校对工作；王晓明老师，负责校对全书，并提出了许多宝贵的修改建议；张喜金老师，负责校对全书，尤其是对全书的考纲解读和命题趋势与探究部分进行逐字逐句分析和修订；何亚飞老师，负责校对全书各章节所涉及的解题方法和规律的提炼，在此表示感谢！

编者虽倾心倾力，但限于能力和水平，难免有疏漏不妥之处，敬请广大读者和数学同行指正。

愿本书伴随着莘莘学子步入理想的大学！

张永辉

2011年7月

目 录

第八章 立体几何

第一节 空间几何体的表面积和体积	1
考纲解读	1
命题趋势探究	1
知识点精讲	1
题型归纳及思路提示	3
题型 105 几何体的表面积与体积	3
题型 106 球的表面积、体积与球面距离	5
题型 107 几何体的外接球与内切球	6
第二节 空间几何体的直观图与三视图	8
考纲解读	8
命题趋势探究	8
知识点精讲	9
题型归纳及思路提示	11
题型 108 直观图与斜二测画法	11
题型 109 直观图、三视图	12
题型 110 三视图 \Rightarrow 直观图——简单几何体的基本量的计算	13
题型 111 三视图 \Rightarrow 直观图——简单组合体的基本量的计算	19
题型 112 部分三视图 \Rightarrow 其余三视图	22
第三节 空间点、直线、平面之间的关系	23
考纲解读	23
命题趋势探究	23
知识点精讲	24
题型归纳及思路提示	25
题型 113 证明“线共面”、“点共面”或“点共线”	25
题型 114 异面直线的判定	27
第四节 直线、平面平行的判定与性质	29
考纲解读	29
命题趋势探究	29
知识点精讲	30
题型归纳及思路提示	32
题型 115 证明空间中直线、平面的平行关系	32
第五节 直线、平面垂直的判定与性质	37
考纲解读	37

命题趋势探究	37
知识点精讲	37
题型归纳及思路提示	38
题型 116 证明空间中直线、平面的垂直关系	38
第六节 空间向量及其应用	46
考纲解读	46
命题趋势探究	46
知识点精讲	46
题型归纳及思路提示	49
题型 117 空间向量及其运算	49
题型 118 空间向量在立体几何中的应用	53
第七节 空间角与距离	64
考纲解读	64
命题趋势探究	64
知识点精讲	64
题型归纳及思路提示	65
题型 119 空间角的计算	65
题型 120 点到平面距离的计算	72

第九章 直线与圆的方程

第一节 直线的方程	75
考纲解读	75
命题趋势探究	75
知识点精讲	75
题型归纳及思路提示	76
题型 121 倾斜角与斜率的计算	76
题型 122 直线的方程	79
第二节 两条直线的位置关系	82
考纲解读	82
命题趋势探究	82
知识点精讲	82
题型归纳及思路提示	83
题型 123 两直线位置关系的判定	83
题型 124 有关距离的计算	84
题型 125 对称问题	85
第三节 圆的方程	88
考纲解读	88



命题趋势探究	88	题型 144 抛物线方程的求解	126
知识点精讲	88	题型 145 与抛物线有关的距离和最值问题	127
题型归纳及思路提示	89	题型 146 抛物线中三角形、四边形的面积问题	128
题型 126 求圆的方程	89	第四节 曲线与方程	129
题型 127 与圆有关的轨迹问题	91	考纲解读	129
题型 128 点与圆的位置关系判断	92	命题趋势探究	129
题型 129 圆的一般方程的充要条件	93	知识点精讲	129
题型 130 与圆有关的最值问题	93	题型归纳及思路提示	130
题型 131 数形结合思想的应用	95	题型 147 求动点的轨迹方程	130
第四节 直线与圆、圆与圆的位置关系	96	第五节 直线与圆锥曲线位置关系	137
考纲解读	96	考纲解读	137
命题趋势探究	96	命题趋势探究	137
知识点精讲	97	知识点精讲	137
题型归纳及思路提示	98	题型归纳及思路提示	138
题型 132 直线与圆的位置关系的判断	98	题型 148 直线与圆锥曲线的位置关系	138
题型 133 直线与圆的相交关系	99	题型 149 中点弦问题	142
题型 134 直线与圆的相切关系	102	题型 150 弦长问题	146
题型 135 直线与圆的相离关系	103	第六节 圆锥曲线综合	148
题型 136 圆与圆的位置关系	104	考纲解读	148
第十章 圆锥曲线方程		命题趋势探究	148
第一节 椭圆	106	知识点精讲	149
考纲解读	106	题型归纳及思路提示	149
命题趋势探究	106	题型 151 平面向量在解析几何中的应用	149
知识点精讲	106	题型 152 定点问题	155
题型归纳及思路提示	108	题型 153 定值问题	162
题型 137 椭圆的定义与标准方程	108	题型 154 最值问题	171
题型 138 离心率的值及取值范围	110	第十一章 算法初步	
题型 139 焦点三角形	112	考纲解读	176
第二节 双曲线	114	命题趋势探究	176
考纲解读	114	知识点精讲	176
命题趋势探究	114	题型归纳及思路提示	179
知识点精讲	114	题型 155 已知流程框图,求输出结果	179
题型归纳及思路提示	116	题型 156 根据条件,填充不完整的流程图	182
题型 140 双曲线的标准方程	116	题型 157 求输入参量	184
题型 141 双曲线离心率的求解及其范围问题	118	题型 158 算法综合	185
题型 142 双曲线的渐近线	121	第十二章 计数原理	
题型 143 焦点三角形	123	第一节 计数原理与简单排列组合问题	191
第三节 抛物线	124	考纲解读	191
考纲解读	124	命题趋势探究	191
命题趋势探究	124		
知识点精讲	124		
题型归纳及思路提示	126		



知识点精讲	191	知识点精讲	223
题型归纳及思路提示	194	题型归纳及思路提示	224
题型 159 分类计数原理与分步计数原理	194	题型 175 古典概型	224
题型 160 排列数与组合数的推导、化简和计算	196	题型 176 几何概型的计算	226
题型 161 基本计数原理和简单排列组合问题的结合	198	第二节 概率与概率分布	227
第二节 排列问题	201	考纲解读	227
考纲解读	201	命题趋势探究	228
命题趋势探究	201	知识点精讲	228
知识点精讲	201	题型归纳及思路提示	229
题型归纳及思路提示	202	题型 177 概率的计算	229
题型 162 特殊元素或特殊位置的排列问题	202	题型 178 离散型随机变量的数学期望与方差	230
题型 163 元素相邻排列问题	203	题型 179 正态分布	233
题型 164 元素不相邻排列问题	205	第三节 统计与统计案例	234
题型 165 元素定序问题	206	考纲解读	234
题型 166 其他排列:双排列、同元素的排列	207	命题趋势探究	235
第三节 组合问题	208	知识点精讲	235
考纲解读	208	题型归纳及思路提示	236
命题趋势探究	208	题型 180 抽样	236
题型归纳及思路提示	209	题型 181 样本分析	238
题型 167 单纯组合应用问题	209	题型 182 频率分布直方图的解读	240
题型 168 分选问题和选排问题	210	题型 183 线性回归方程	242
题型 169 平均分组问题和分配问题	211	题型 184 独立性检验	244
第四节 二项式定理	215	第十四章 推理与证明	
考纲解读	215	第一节 合情推理与演绎推理	247
命题趋势探究	216	考纲解读	247
知识点精讲	216	命题趋势探究	247
题型归纳及思路提示	217	知识点精讲	247
题型 170 证明二项式定理	217	题型归纳及思路提示	248
题型 171 T_{r+1} 的系数与 x 幂指数的确定	217	题型 185 归纳猜想	248
题型 172 二项式定理中的系数和	219	题型 186 类比推理	250
题型 173 二项式展开式的二项式系数与系数的最值	220	第二节 直接证明和间接证明	251
题型 174 二项式定理的综合应用	221	考纲解读	251
第十三章 概率与统计		命题趋势探究	252
第一节 概率及其计算	223	知识点精讲	252
考纲解读	223	题型归纳及思路提示	252
命题趋势探究	223	题型 187 综合法与分析法证明	252
		第三节 数学归纳法	254
		考纲解读	254
		命题趋势探究	254
		知识点精讲	254
		题型归纳及思路提示	254
		题型 188 数学归纳法的完善	254

题型 189	证明恒等式	255
题型 190	整除问题	255
题型 191	不等式证明	256
题型 192	递推公式导出 $\{a_n\}$ 通项公式的 猜证及有关问题的证明	256

第十五章 复数

考纲解读	258	
命题趋势探究	258	
知识点精讲	258	
题型归纳及思路提示	259	
题型 193	复数的概念、代数运算和两个复 数相等的条件	259
题型 194	复数的几何意义	260

第十六章 选讲内容

第一节 几何证明选讲(选修 4-1)	262	
考纲解读	262	
命题趋势探究	262	
知识点精讲	262	
题型归纳及思路提示	264	
题型 195	圆和直角三角形中长度与角的 计算	264
题型 196	证明题	265
题型 197	空间图形问题转化为平面问题	266
第二节 坐标系与参数方程(选修 4-4)	266	
考纲解读	266	

命题趋势探究	267	
知识点精讲	267	
题型归纳及思路提示	268	
题型 198	参数方程化普通方程	268
题型 199	普通方程化参数方程	270
题型 200	极坐标方程化直角坐标方程	270
第三节 不等式选讲(选修 4-5)	271	
考纲解读	271	
命题趋势探究	271	
知识点精讲	272	
题型归纳及思路提示	273	
题型 201	含绝对值的不等式	273
题型 202	不等式的证明	274
题型 203	一般综合法和分析法(含比较 法)	274
题型 204	数学归纳法	275

附录 变式题参考答案

第八章 变式题参考答案	276
第九章 变式题参考答案	316
第十章 变式题参考答案	331
第十一章 变式题参考答案	374
第十二章 变式题参考答案	380
第十三章 变式题参考答案	392
第十四章 变式题参考答案	407
第十五章 变式题参考答案	415
第十六章 变式题参考答案	417

第八章 立体几何

第一节 空间几何体的表面积和体积



考纲解读

了解球、棱柱、棱锥及台体的表面积和体积的计算公式(不要求记忆公式).



命题趋势探究

高考中考查表面积和体积问题,主要可分为以下三类.

(1)柱、锥、台体的侧面积分别是其侧面展开图的面积,因此,弄清侧面展开图的形状及各棱的位置关系是求侧面积及解决有关问题的关键.

(2)求柱、锥、台体的体积,关键是找到相应的底面积和高.可充分运用多面体的截面及旋转体的轴截面,将空间问题转化为平面问题.

(3)解决球的有关问题,要注意球半径、截面圆半径及球心到截面圆距离构成的直角三角形.

柱、锥、台体的表面积和体积以公式为主,一般情况下,只要记住公式,题目就可以顺利求解.因此题目从难度上讲属于中、低档题,在高考中直接出题的可能性较大,容易出现相关的选择题或填空题.



知识点精讲

一、构成空间几何体的基本元素——点、线、面

(1)空间中,点动成线,线动成面,面动成体.

(2)空间中,不共点(不重合)的两点确定一条直线,不共线的三点确定一个平面,不共面的四点确定一个几何体(四面体或三棱锥).

二、简单凸多面体——棱柱、棱锥、棱台

1. 棱柱

两个面互相平行,其余各面都是四边形,并且每相邻两个四边形的公共边都互相平

行,由这些面所围成的几何体叫作棱柱.

- ①斜棱柱:侧棱不垂直于底面的棱柱;
- ②直棱柱:侧棱垂直于底面的棱柱;
- ③正棱柱:底面是正多边形的直棱柱;
- ④平行六面体:底面是平行四边形的棱柱;
- ⑤直平行六面体:侧棱垂直于底面的平行六面体;
- ⑥长方体:底面是矩形的直平行六面体;
- ⑦正方体:棱长都相等的长方体.

2. 棱锥

有一个面是多边形,其余各面是有一个公共顶点的三角形,由这些面所围成的几何体叫作棱锥.

- ①正棱锥:底面是正多边形,且顶点在底面的射影是底面的中心;
- ②正四面体:所有棱长都相等的三棱锥.

3. 棱台

用一个平行于底面的平面去截棱锥,底面和截面之间的部分叫作棱台.

由正棱锥截得的棱台叫作正棱台.

简单凸多面体的分类及其之间的关系如图 8-1 所示.

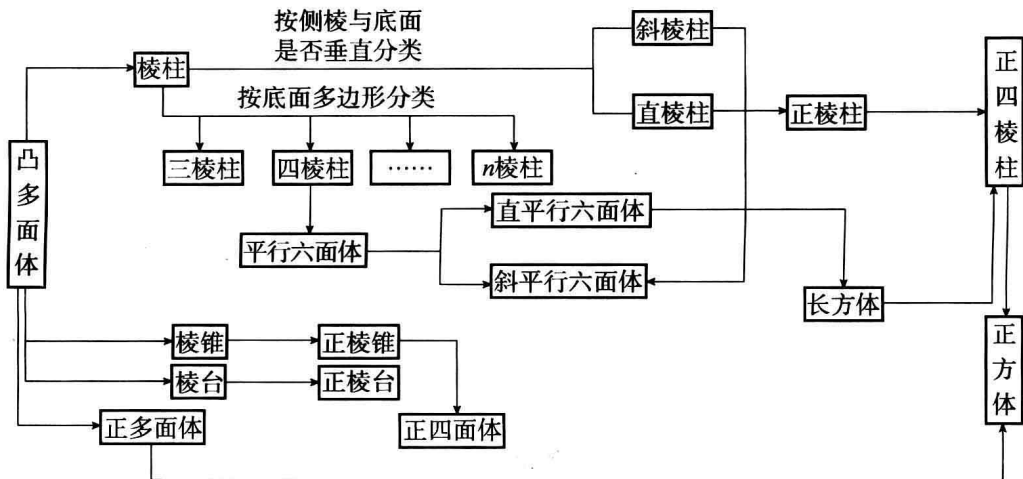


图 8-1

三、简单旋转体——圆柱、圆锥、圆台、球

1. 圆柱

以矩形的一边所在的直线为旋转轴,其余边旋转形成的曲面所围成的几何体叫作圆柱.

2. 圆锥

以直角三角形的一条直角边所在的直线为旋转轴,其余两边旋转形成的曲面所围成的几何体叫作圆锥.

3. 圆台

用一个平行于底面的平面去截圆锥,底面和截面之间的部分叫作圆台.

4. 球

以半圆的直径所在的直线为旋转轴,半圆面旋转一周形成的几何体叫作球体,简称为球(球面距离:经过两点的大圆在这两点间的劣弧长度).

四、组合体

由柱体、锥体、台体、球等几何体组成的复杂的几何体叫作组合体.

五、侧面积与表面积公式

1. 直棱柱、正棱锥、正棱台的侧面积(c, c' 为底面周长, h 为高, h' 为斜高)

$$S_{\text{直棱柱侧}} = c \cdot h \quad S_{\text{正棱锥侧}} = \frac{1}{2} c \cdot h' \quad S_{\text{正棱台侧}} = \frac{1}{2} (c + c') h'$$

2. 圆柱、圆锥、圆台的侧面积与表面积(r, r' 为底面半径, l 为母线长)

$$\text{侧面积} \quad S_{\text{圆柱侧}} = 2\pi r l \quad S_{\text{圆锥侧}} = \pi r l \quad S_{\text{圆台侧}} = \pi(r + r') l$$

$$\text{表面积} \quad S_{\text{圆柱表}} = 2\pi r(r + l) \quad S_{\text{圆锥表}} = \pi r(r + l) \quad S_{\text{圆台表}} = \pi(r + r') l + \pi(r^2 + r'^2)$$

3. 球体表面积

$$S_{\text{球}} = 4\pi R^2 \quad (R \text{为半径})$$

六、体积公式

1. 柱、锥、台、球的体积(S, S' 为底面积, h 为高, R 为半径)

$$V_{\text{柱体}} = S \cdot h \quad V_{\text{锥体}} = \frac{1}{3} S \cdot h \quad V_{\text{台体}} = \frac{1}{3} (S + \sqrt{SS'} + S') h \quad V_{\text{球}} = \frac{4}{3} \pi R^3$$

2. 圆柱、圆锥、圆台的体积(r, r' 为底面半径, h 为高)

$$V_{\text{圆柱}} = \pi r^2 h \quad V_{\text{圆锥}} = \frac{1}{3} \pi r^2 h \quad V_{\text{圆台}} = \frac{\pi h}{3} (r^2 + rr' + r'^2)$$



题型归纳及思路提示

题型 105 几何体的表面积与体积

思路提示:熟悉几何体的表面积、体积的基本公式,注意直角等特殊角.

【例 8.1】(鹰潭市 08 届高三一模改编)三棱锥 $P-ABC$ 的侧棱 PA, PB, PC 两两垂直,侧面面积分别是 6, 4, 3, 则三棱锥的表面积是 _____, 体积是 _____.

【解析】设 $PA=a, PB=b, PC=c(a, b, c > 0)$,

$$\text{则} \begin{cases} \frac{ab}{2} = 6 \\ \frac{bc}{2} = 4 \\ \frac{ca}{2} = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ab = 12 \\ bc = 8 \\ ca = 6 \end{cases}, \text{三式相乘得 } a^2 b^2 c^2 = 12 \times 8 \times 6 \Rightarrow abc = 24,$$

$$\text{所以} \begin{cases} a = 3 \\ b = 4 \\ c = 2 \end{cases}, \text{又侧棱 } PA, PB, PC \text{ 两两垂直, 所以} \begin{cases} AB = \sqrt{a^2 + b^2} = 5 \\ BC = \sqrt{b^2 + c^2} = 2\sqrt{5} \\ CA = \sqrt{c^2 + a^2} = \sqrt{13} \end{cases}$$

$$\text{所以 } \cos \angle BCA = \frac{BC^2 + CA^2 - AB^2}{2BC \cdot CA} = \frac{(2\sqrt{5})^2 + (\sqrt{13})^2 - 5^2}{2 \times 2\sqrt{5} \times \sqrt{13}} = \frac{2}{\sqrt{65}},$$

$$\text{从而 } \sin \angle BCA = \sqrt{1 - \cos^2 \angle BCA} = \frac{\sqrt{61}}{\sqrt{65}},$$

$$\text{所以 } S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} BC \times CA \times \sin \angle BCA = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{5} \times \sqrt{13} \times \frac{\sqrt{61}}{\sqrt{65}} = \sqrt{61},$$

$$\text{所以 } S_{\text{表}} = 6 + 4 + 3 + \sqrt{61} = 13 + \sqrt{61}, \text{ 体积 } V = \frac{1}{6} abc = \frac{1}{6} \times 24 = 4.$$

【评注】 若三棱锥 $P-ABC$ 的侧棱 PA, PB, PC 两两垂直, 则类比直角三角形中的勾股定理有, $S_{\triangle ABC}^2 = S_{\triangle PAB}^2 + S_{\triangle PBC}^2 + S_{\triangle PCA}^2$ (本题 $S_{\triangle ABC} = \sqrt{6^2 + 4^2 + 3^2} = \sqrt{61}$), $V_{P-ABC} = \frac{1}{6} PA \cdot PB \cdot PC$.

【变式 1】 (2011 · 陕西文, 16(2)) 如图 8-2 所示, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle ABC = 45^\circ$, $\angle BAC = 90^\circ$, AD 是 BC 边上的高, 沿 AD 把 $\triangle ABD$ 折起, 使 $\angle BDC = 90^\circ$. 若 $BD = 1$, 求三棱锥 $D-ABC$ 的表面积.

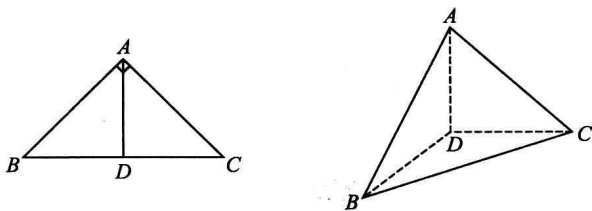


图 8-2

【变式 2】 (2011 · 上海理, 7) 若圆锥的侧面积为 2π , 底面面积为 π , 则该圆锥的体积为 _____.

【例 8.2】 (2010 · 上海文, 6) 已知四棱锥 $P-ABCD$ 的底面是边长为 6 的正方形, 侧棱 $PA \perp$ 底面 $ABCD$, 且 $PA = 8$, 则该四棱锥的体积是 _____.

【解析】 体积 $V = \frac{1}{3} \times 6^2 \times 8 = 96$.

【变式 1】 (2009 · 陕西理, 10) 若正方体的棱长为 $\sqrt{2}$, 则以该正方体各个面的中心为顶点的凸多面体的体积为 ().

- A. $\frac{\sqrt{2}}{6}$ B. $\frac{\sqrt{2}}{3}$ C. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ D. $\frac{2}{3}$



【变式 2】 (2010·全国 II 理,9) 已知正四棱锥 $S-ABCD$ 中, $SA=2\sqrt{3}$, 那么当该棱锥的体积最大时, 它的高为().

- A. 1 B. $\sqrt{3}$ C. 2 D. 3

【变式 3】 (2009·辽宁理,11) 正六棱锥 $P-ABCDEF$ 中, G 为 PB 的中点, 则三棱锥 $D-GAC$ 与三棱锥 $P-GAC$ 的体积之比为().

- A. 1:1 B. 1:2
C. 2:1 D. 3:2

【变式 4】 (2010·北京理,8) 如图 8-3 所示, 正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 2, 动点 E, F 在棱 A_1B_1 上, 动点 P, Q 分别在棱 AD, CD 上, 若 $EF=1, A_1E=x, DQ=y, DP=z$ (x, y, z 大于零), 则四面体 $PEFQ$ 的体积().

- A. 与 x, y, z 都有关
B. 与 x 有关, 与 y, z 无关
C. 与 y 有关, 与 x, z 无关
D. 与 z 有关, 与 x, y 无关

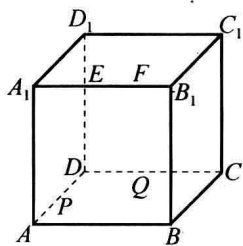


图 8-3

题型 106 球的表面积、体积与球面距离

思路提示: 半径为 R 的球 O , 表面积 $S=4\pi R^2$, 体积 $V=\frac{4}{3}\pi R^3$; 球面上 A, B 两点间的球面距离为 αR , 其中 $\alpha=\angle AOB$ (弧度制).

【例 8.3】 (2009·上海理,8) 已知三个球的半径 R_1, R_2, R_3 满足 $R_1+2R_2=3R_3$, 则它们的表面积 S_1, S_2, S_3 满足的等量关系是_____.

【解析】 $S_1=4\pi R_1^2$, 即 $R_1=\frac{\sqrt{S_1}}{2\sqrt{\pi}}$, 同理得 $R_2=\frac{\sqrt{S_2}}{2\sqrt{\pi}}, R_3=\frac{\sqrt{S_3}}{2\sqrt{\pi}}$, 由 $R_1+2R_2=3R_3$ 得 $\sqrt{S_1}+2\sqrt{S_2}=3\sqrt{S_3}$.

【变式 1】 若球 O_1, O_2 的表面积之比 $\frac{S_1}{S_2}=4$, 则它们的半径之比 $\frac{R_1}{R_2}=\underline{\hspace{2cm}}$.

【变式 2】 (2006·山东文,8) 正方体的内切球与其外接球的体积之比为().

- A. 1:3 B. 1:3 C. $1:3\sqrt{3}$ D. 1:9

【例 8.4】 (1) (2005·全国 I 理,3) 一个与球心距离为 1 的平面截球所得的圆面面积为 π , 则球的表面积为().

- A. $8\sqrt{2}\pi$ B. 8π C. $4\sqrt{2}\pi$ D. 4π

(2) (2009·四川理,8) 在半径为 3 的球面上有 A, B, C 三点, $\angle ABC=90^\circ, BA=BC$, 球心 O 到平面 ABC 的距离是 $\frac{3\sqrt{2}}{2}$, 则 B, C 两点的球面距离是().

- A. $\frac{\pi}{3}$ B. π
C. $\frac{4\pi}{3}$ D. 2π

【解析】 (1) 设小圆半径为 r , 球半径为 R , 则 $\begin{cases} \pi r^2 = \pi \\ r^2 + 1^2 = R^2 \end{cases} \Rightarrow R^2 = 2 \Rightarrow S_{\text{表}} = 4\pi R^2 = 8\pi$. 故

选 B.

(2) 如图 8-4 所示, 由题意知截面小圆的半径

$$r = \sqrt{3^2 - \left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{3\sqrt{2}}{2}, \text{ 所以 } BC = \frac{\sqrt{2}}{2} \times 3\sqrt{2} = 3, \text{ 故 } \triangle OBC$$

为正三角形, 所以 $\angle BOC = \frac{\pi}{3}$, 所以 B, C 两点的球面距离为

$$3 \times \frac{\pi}{3} = \pi. \text{ 故选 B.}$$

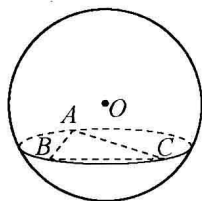


图 8-4

【变式 1】 (2009 · 陕西理, 15) 如图 8-5 所示, 球 O 的半径为 2, 圆 O_1 是一小圆, $O_1O = \sqrt{2}$, A, B 是圆 O_1 上两点, 若 A, B 两点间的球面距离为 $\frac{2\pi}{3}$, 则 $\angle AO_1B =$ _____.

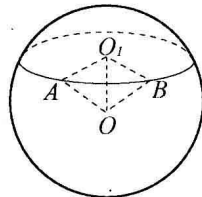


图 8-5

题型 107 几何体的外接球与内切球

思路提示: (1) 半径为 R 的球 O , 表面积 $S = 4\pi R^2$, 体积 $V = \frac{4}{3}\pi R^3$.

(2) 设小圆 O_1 半径为 r , $OO_1 = d$, 则 $d^2 + r^2 = R^2$; 若 A, B 是圆 O_1 上两点, 则 $AB = 2r \sin \frac{\angle AO_1B}{2} = 2R \sin \frac{\angle AOB}{2}$.

(3) 注意球的直径(或半径)与几何体的关系.

【例 8.5】 (2006 · 福建理, 5) 已知正方体外接球的体积是 $\frac{32}{3}\pi$, 那么正方体的棱长等于 ().

- A. $2\sqrt{2}$ B. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ C. $\frac{4\sqrt{2}}{3}$ D. $\frac{4\sqrt{3}}{3}$

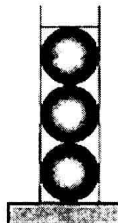
【分析】 正方体外接球的直径为体对角线.

【解析】 设正方体的棱长为 a , 外接球半径为 R , 则 $\begin{cases} 2R = \sqrt{3}a \\ \frac{4\pi R^3}{3} = \frac{32\pi}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{4\sqrt{3}}{3} \\ R = 2 \end{cases}$. 故选 D.

【变式 1】 (2007 · 天津理, 12) 一个长方体的各顶点均在同一球的球面上, 且一个顶点上的三条棱的长分别为 1, 2, 3, 则此球的表面积为 _____.

【变式 2】 (2007 · 全国 II 理, 15) 一个正四棱柱的各个顶点在一个直径为 2cm 的球面上. 如果正四棱柱的底面边长为 1cm, 那么该棱柱的表面积为 _____ cm^2 .

【变式 3】 (2010 · 湖北理, 13) 圆柱形容器内盛有高度为 8cm 的水, 若放入 3 个相同的球(球的半径与圆柱底面半径相同)后, 水恰好淹没最上面的球(如图 8-6 所示), 则球的半径为 _____ cm.



【例 8.6】 (2009 · 江西理, 14) 正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 内接于半径为 2 的球, 若 A, B 两点的球面距离为 π , 则正三棱柱的体积为 _____.

图 8-6

【解析】 设 O 为球心, 由题意知 $\begin{cases} 2 \times \angle AOB = \pi \\ AB = 2 \times 2 \sin \frac{\angle AOB}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \angle AOB = \frac{\pi}{2} \\ AB = 2\sqrt{2} \end{cases}$, 底面圆的半径

为: $\frac{AB}{2 \sin \frac{\pi}{3}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{6}}{3}$, 则正三棱柱的高为 $2 \times \sqrt{2^2 - \left(\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)^2} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$, 所以正三

棱柱的体积为 $\frac{\sqrt{3}}{4} \times (2\sqrt{2})^2 \times \frac{4\sqrt{3}}{3} = 8$.

【变式 1】 (2009 · 全国 I 理, 15) 直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的各顶点都在同一球面上, 若 $AB=AC=AA_1=2$, $\angle BAC=120^\circ$, 则此球的表面积等于_____.

【变式 2】 (2008 · 海南、宁夏理, 15) 一个六棱柱的底面是正六边形, 其侧棱垂直于底面. 已知该六棱柱的顶点都在同一个球面上, 且其体积为 $\frac{9}{8}$, 底面周长为 3, 则这个球的体积为_____.

【变式 3】 (2011 · 四川理, 15) 如图 8-7 所示, 半径为 R 的球 O 中有一内接圆柱, 当圆柱的侧面积最大时, 球的表面积与该圆柱的侧面积之差是_____.

【例 8.7】 (2007 · 陕西理, 6) 一个正三棱锥的 4 个顶点都在半径为 1 的球面上. 其中底面的 3 个顶点在该球的一个大圆上, 则该正三棱锥的体积是().

- A. $\frac{3\sqrt{3}}{4}$ B. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ C. $\frac{\sqrt{3}}{4}$ D. $\frac{\sqrt{3}}{12}$

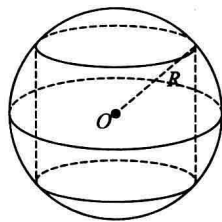


图 8-7

【解析】 设正三棱锥的底面边长为 a , 高为 h , 由题意知 $\begin{cases} \frac{a}{\sin \frac{\pi}{3}} = 2 \\ h = 1 \\ V = \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 h \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \sqrt{3} \\ V = \frac{\sqrt{3}}{4} \end{cases}$.

故选 C.

【变式 1】 (2010 · 辽宁文, 11) 已知 S, A, B, C 是球 O 表面上的点, $SA \perp$ 平面 ABC , $AB \perp BC$, $SA=AB=1$, $BC=\sqrt{2}$, 则球 O 的表面积等于().

- A. 4π B. 3π C. 2π D. π

【变式 2】 (2006 · 安徽理, 9) 表面积为 $2\sqrt{3}$ 的正八面体的各个顶点都在同一个球面上, 则此球的体积为().

- A. $\frac{\sqrt{2}}{3}\pi$ B. $\frac{1}{3}\pi$ C. $\frac{2}{3}\pi$ D. $\frac{2\sqrt{2}}{3}\pi$

【变式 3】 (2011 · 重庆理, 9) 高为 $\frac{\sqrt{2}}{4}$ 的四棱锥 $S-ABCD$ 的底面是边长为 1 的正方形, 点 S, A, B, C, D 均在半径为 1 的同一球面上, 则底面 $ABCD$ 的中心与顶点 S 之间的距离为().

- A. $\frac{\sqrt{2}}{4}$ B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ C. 1 D. $\sqrt{2}$

【变式 4】 (2011·课标全国文,16)已知两个圆锥有公共底面,且两圆锥的顶点和底面的圆周都在同一个球面上.若圆锥底面面积是这个球面面积的 $\frac{3}{16}$,则这两个圆锥中,体积较小者的高与体积较大者的高的比值为_____.

【变式 5】 (2011·辽宁理,12)已知球的直径 $SC=4$, A, B 是该球球面上的两点, $AB=\sqrt{3}$, $\angle ASC=\angle BSC=30^\circ$, 则棱锥 $S-ABC$ 的体积为().

A. $3\sqrt{3}$

B. $2\sqrt{3}$

C. $\sqrt{3}$

D. 1

【变式 6】 (2010·全国 I 文,12)已知在半径为 2 的球面上有 A, B, C, D 四点,若 $AB=CD=2$, 则四面体 $ABCD$ 的体积的最大值为().

A. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

B. $\frac{4\sqrt{3}}{3}$

C. $2\sqrt{3}$

D. $\frac{8\sqrt{3}}{3}$

第二节 空间几何体的直观图与三视图



考纲解读

1. 认识柱、锥、台、球及其简单组合体的结构特征,并能运用这些特征描述现实生活中简单物体的结构.
2. 能画出简单空间图形(长方体、球、圆柱、圆锥、棱柱等及其简易组合)的三视图,能识别三视图所表示的立体模型,并会用斜二测画法画出它们的直观图.
3. 会用平行投影与中心投影两种方法,画出简单空间图形的三视图与直观图,了解空间图形的不同表示形式.
4. 会画某些建筑物的三视图与直观图(在不影响图形特征的基础上,尺寸、线条等不作严格要求).



命题趋势探究

高考中对本节内容的考查,可以分为以下两类.

(1)柱、锥、台、球的定义和相关性质是基础,以它们为载体考查线线、线面、面面间的关系是重点.

(2)三视图为新课标新增内容,所以高考会加大对其考查的力度.

在高考中,主要考查三视图和直观图,特别是通过三视图确定原图形的相关量.多以选择题和填空题为主,也不排除通过三视图来给出几何体的直观图的解答题,侧重于考查考生对基础知识的掌握以及应用所学知识解决问题的能力.