

高等工业学校教学用书

画法几何学

北京工业学院 編
制图教研组



国防工业出版社

高等工业学校教学用书

画法几何学

北京工业学院
制图教研组 編著



国防工业出版社

本書符合高等工業學 機械製造類畫法幾何教學教學大綱的要求，可作為高等工業學校72學時類型畫法幾何學的講義。

全書共十章包括點、綫、面的投影，投影改造，相貫，展開和軸測投影等。

各章附有自我檢查問題便於學生復習及深入學習之用。

畫 法 幾 何 學

北京工業學院制圖教研組編著

*

國防工業出版社 出版

北京市書刊出版業營業許可証出字第074號
北京五三六工廠印刷 新華書店發行

*

787×1092 1/16·13 1/2 印張·273,000字

一九五七年九月第一版

一九五七年九月北京第一次印刷

印數：1—2,600冊 定價：（10）1.90元

目 录

第一章 緒 論	1
§1—1 中心投影法	1
§1—2 平行投影法	2
§1—3 平行投影法中的度量关系	3
§1—4 平行投影的分类	4
§1—5 中心投影与平行投影的比較	4
§1—6 正投影图和軸測投影图	5
自我檢查問題	6
第二章 点的投影	7
§2—1 点的两个投影。正投影图的產生	7
§2—2 空間各象限中的点的投影	9
§2—3 点的三个投影	10
§2—4 空間笛卡尔座标和正投影图的关系	12
§2—5 空間各隅中的点的投影	14
自我檢查問題	18
第三章 直綫的投影	20
§3—1 直綫的投影图	20
§3—2 直綫和投影面的相对位置。各种特殊位置直綫	20
§3—3 一般位置直綫的眞長和对投影面的傾角的求法——直角三角形法	24
§3—4 直綫上的点	26
自我檢查問題	27
§3—5 直綫上的特殊点——迹点	28
§3—6 二直綫的相对位置及其在投影图上的特征	32
§3—7 平面角的投影——直角定理	34
自我檢查問題	37
第四章 平 面	39
§4—1 平面在投影图上的表示法	39
§4—2 平面上的直綫和点	39
§4—3 平面的迹綫	41
§4—4 各种特殊位置平面及其特征	44
§4—5 平面上的特殊位置直綫	48
§4—6 迹綫求法举例	52
自我檢查問題	53

§4—7 可見性	55
§4—8 交点和交綫	58
自我檢查問題	68
§4—9 平行問題	69
§4—10 垂直問題	73
自我檢查問題	77
第五章 投影的改造	79
§5—1 更換投影面法	80
自我檢查問題	88
§5—2 轉動法——繞垂直投影面的軸轉動	89
§5—3 平移法	94
§5—4 繞平行投影面的軸轉動	95
§5—5 重合法	97
§5—6 投影改造綜合舉例	103
自我檢查問題	110
第六章 多面體、曲綫和曲面的投影	112
§6—1 多面體(平面立體)的投影及其表面上點的画法	112
§6—2 曲綫的投影	115
§6—3 曲面的投影	119
§6—4 螺旋綫,螺旋面和螺紋	128
§6—5 切平面	133
自我檢查問題	136
第七章 截口和貫穿點	138
§7—1 截口概論	138
§7—2 綫面交點法	139
§7—3 三面共點輔助面法	141
§7—4 圓柱,圓錐,球的截口舉例	142
§7—5 直綫和體的貫穿點	148
自我檢查問題	153
第八章 體與體的相貫綫	155
§8—1 多面體和多面體的相貫綫	155
§8—2 多面體與曲面體的相貫綫	158
§8—3 曲面體和曲面體的相貫綫	160
自我檢查問題	172
第九章 展開	174
§9—1 多面體的展開	174

§9—2 曲面体的展开.....	178
§9—3 球面的近似展开.....	181
§9—4 举例.....	183
自我檢查問題	185
第十章 軸測 投影	186
§10—1 基本知識.....	186
§10—2 軸測投影的分类.....	190
§10—3 正軸測投影的軸向縮短系数和軸間角.....	190
§10—4 正軸測投影中平行座标面的圓的投影.....	194
§10—5 正軸測投影画法举例.....	198
§10—6 斜軸測投影.....	203
§10—7 在軸測投影图上表示空間点、綫、面及其相对位置等一些基本問題的方法.....	209
自我檢查問題	212
参考書	213

第一章 緒 論

画法几何是研究把空間形体表达在平面上的理論，并且还进一步研究在这些平面图上解决空間几何問題的图解法。

任何把形体表达得正确的图样都是按**投影法**得到的。像片、电影、艺术画、机械制图以及物体受到光源照射时所产生的影子等，都是形体在不同的平面（紙、影幕等）上的投影。

根据投影条件的不同，投影法可分为两大类：

（1）中心投影法，

（2）平行投影法。

§1—1 中心投影法

图1—1表示將一三角板放在电灯和图紙之間，三角板在紙面上的影子，称为三角板的**中心投影**。光源 S 称为**投影中心**；投影所在的平面（即图中的图紙）称为**投影面**； SA 、 SB 、 SC 等綫称为**投射綫**。

中心投影的特点就是所有的投射綫，都經過投影中心。

現在我們从几何角度来分析一下中心投影的过程。图1—2上， S 是投影中心，所有的投射綫都要通过这一点。 P 是投影面。假如要求空間某点 A 的投影，則將 S 、 A 两点連接，得到投射綫 SA 延长 SA 和 P 面交于 a 点， a 点①即为 A 点在 P 面上的中心投影。

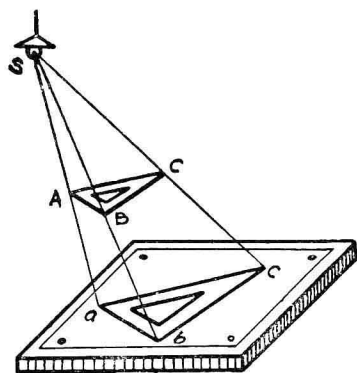


图 1—1

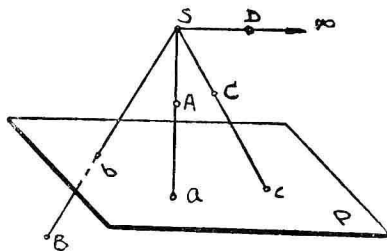


图 1—2

按同样方法可以得到 B 点和 C 点的中心投影。当投射綫 SD 平行 P 面时，則 D 点在 P 面上沒有投影（或者說投影在无限远处）。

① 我們以大写字母表示空間的点，以相同字母的小写体表示該点的投影。

当投影中心和投影面都已确定时，则空间一点在这个投影面上唯一的一个投影的位置也就确定了，但是反过来说，若只给出点的投影则无法确定该点在空间的位置。图 1—3 说明在同一投射线上的每个点的投影都是 e 。

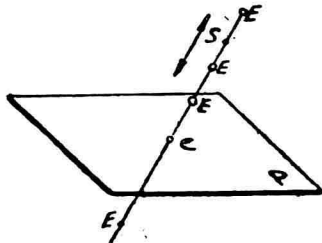


图 1—3

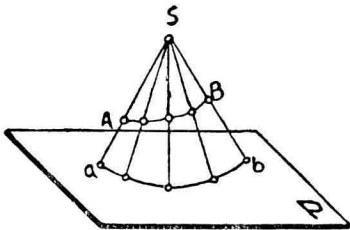


图 1—4

§1—2 平行投影法

如果将投影中心移至无限远的地方，则所有的投射綫互相平行（如图1—5）。我们把这种投影法（投射綫互相平行）称为**平行投影法**，在平行投影法中必须给出投射綫的方向（代替中心投影法中的投影中心）。

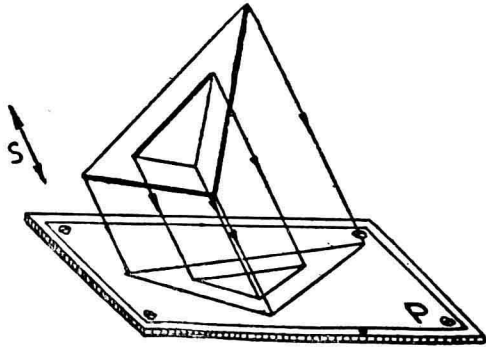


图 1—5

图 1—6 表示空间 A 点的平行投影的求法：通过 A 点引投射綫 $L_A \parallel S$ ， L_A 与 P 面的交点 a 就是 A 在 P 面上的投影。显然，如果投射方向和投影面均已确定，则空间一点的投影也就确定了，但是，和中心投影一样，只根据点的一个投影不能确定这点在空间的位置，例如图 1—6 上只给出 B 点的投影 b ，则 B 可以是 L_B 上的任一点。

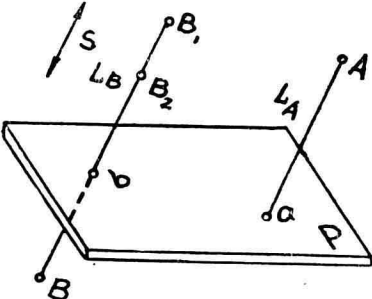


图 1—6

同样，如果要绘制一曲綫的投影，只要把曲綫上各点的投影求出，然后連起来就可以得到（如图1—7）。

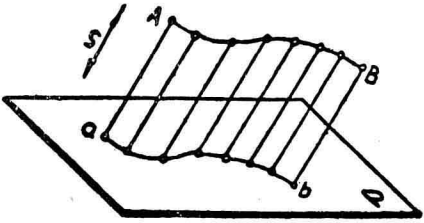


图 1—7

求直线的投影时,在一般情况下所作的投射面是平面,所以直线的投影仍是直线(特殊情况为一点)。因此:

(1) 求直线的投影时,只需找出线上两个点的投影,就可以确定直线的投影。

(2) 直线上任一点的投影一定在该直线的投影上(图1—8)。

但是,投射平面上任意一直线、曲线甚至平面图形的投影都是一条直线(图1—9),因此仅知道投影是一条直线,并不能判断空间是否一定是直线。

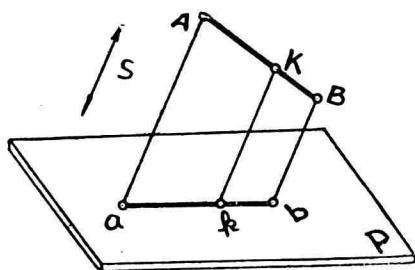


图 1—8

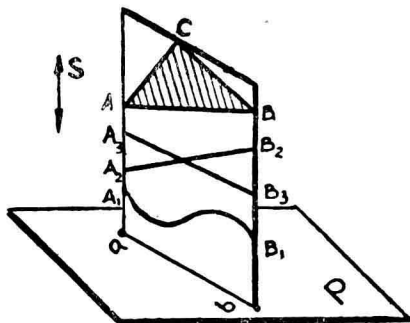


图 1—9

§1—3 平行投影法中的度量关系

(一) 如果直线线段平行于投影面,则其投影长度与该线段本身长度相等。

证明: 图1—10上, $ab \parallel AB$, 所以 $ABba$ 是平行四边形, 因此

$$ab = AB.$$

如果, 直线线段不平行投影面, 则在一般情况下, 投影长度不等于线段本身长度, 我们把二者的比值称为**缩短系数**, 即:

$$\frac{\text{线段投影长度}}{\text{线段本身长度}} = \text{缩短系数}.$$

(二) 若线上一点将直线分为两段, 则这二线段之比等于这二线段投影之比。即

$$AK:KB = ak:kb \quad (\text{如图1—11})。$$

证明: 过 K 、 B 在 AB 投射面上分别引 KE 、 BF 平行 P 面。

$$\therefore \triangle AKE \sim \triangle KBF, \quad \therefore \frac{AK}{KB} = \frac{KE}{BF} = \frac{ak}{kb}。$$

(三) 二平行直线的投影仍互相平行(图1—12), $AB \parallel CD$, 则 $ab \parallel cd$, (因为投射面 Q 平行投射面 R)。

(四) 二平行直线的两线段之比等于这二线段投影之比。即

$$\frac{AB}{CD} = \frac{ab}{cd} \quad (\text{如图1—12})。$$

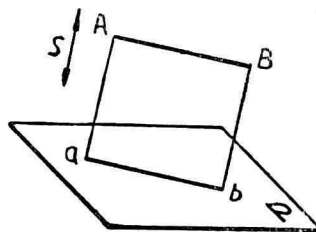


图 1—10

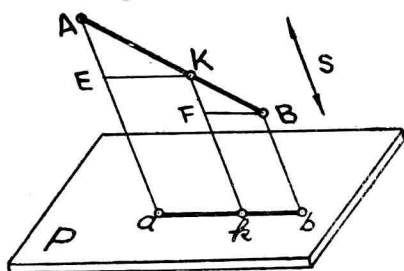


图 1—11

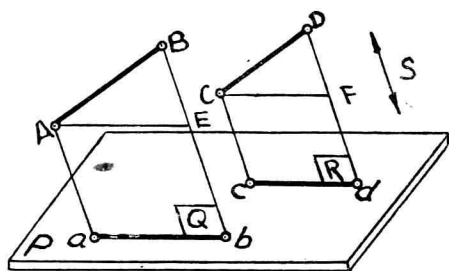


图 1—12

証明：过 A 、 C 分别在投射面 Q 、 R 上引 $AE \parallel P$ ， $CF \parallel P$ 。

則 $\triangle ABE \sim \triangle CDF$ ，而 $AE = ab$ ， $CF = cd$ 。

故
$$\frac{AB}{CD} = \frac{AE}{CF} = \frac{ab}{cd}。$$

这个关系也可以說成：平行綫段的投影按同一縮短系数縮小或放大。

以上这些度量关系，在中心投影法中是不存在的。这說明了平行投影法的特点，也就是它的优点，对以后作图时有很大的用处。

§1—4 平行投影的分类

根据投射綫方向的不同，可以将平行投影法分为两大类：

(1) 直角投影：投射綫垂直于投影面（图1—13）。

(2) 斜投影：投射綫不垂直于投影面（图1—14）。

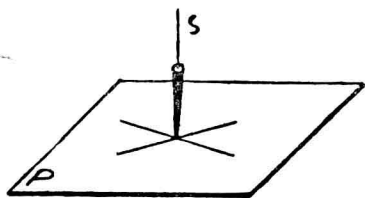


图 1—13

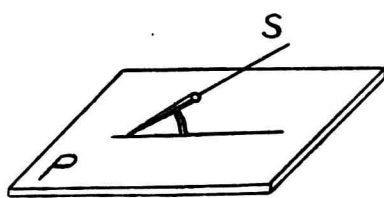


图 1—14

§1—5 中心投影与平行投影的比較

中心投影法中的投影中心 S 相当于人的眼睛，投射綫相当于視綫，因此用中心投影法画出来的图和用眼睛看到的形象一样，所以这种图看起来比較自然，尤其是表示龐大的物体时更为显著；



图 1—15 (a)

但是由于不能很明显的把真实形状和度量关系表示出来，同时由于作图

較复杂，所以在工程上一般只用于建筑图示方面。

平行投影法中，投影中心在无限远处，因此，所画出来的图和我们站在距离物体无穷远处所看到的形象一样，所以这种图看起来没有前者那样顺眼。但是平行投影法有上面所说的各种度量关系的特点，并且作图比较简便，所以在工程上一般是采用平行投影法作图。



图 1—15 (b)

图1—15是表示北京的天安门，图(a)是用中心投影法画的，同照片一样，即和平常我们眼睛看到的形象一样。图(b)是用平行投影法画的，它好像是坐在飞机上所看到的形象，看起来不自然是它的缺点，但对工程上来讲它的优点大大超过了它的缺点。

§1—6 正投影图和轴测投影图

在前面我们发现了一个问题，不论用那种投影方法，仅仅根据物体的一个投影，确定不了它在空间的位置和形状。因此，为了在投影图上能正确地把物体的形状和各种度量关系清楚地表达出来，就须对这个投影面附加某种条件，根据投影法和附加条件的不同，投影图可以分作很多种，在本门课程中我们只学习正投影图和轴测投影图。

(一) 轴测投影图

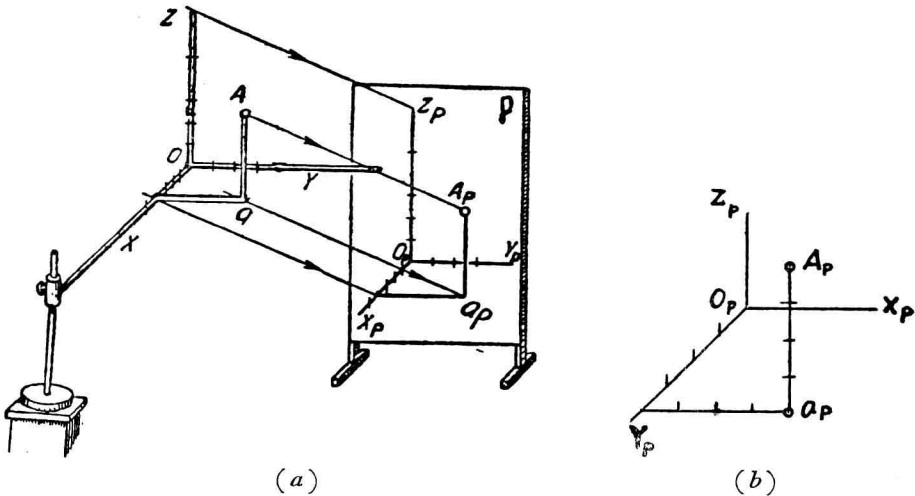


图 1—16

在轴测投影中我们把形体连同确定它的坐标系，一齐用平行投影法投影到一个投影面上(图1—16)。这样在投影图上，我们可以根据坐标确定形体的形状、位置和尺寸。图1—17是一个机件的轴测投影图。这种图容易看得懂，但画起来较麻烦，并且对复杂的机件要表示它或清楚的了解它也有困难。

(二) 正投影图

利用平行直角投影，把形体投射到两个或两个以上互相垂直的投影面上去，这样根据几个投影我们可以确定形体的形状、位置和尺寸，如图1—18b，是一个圆柱的正投影图，从一个投影图上可以得知圆柱的直径，从另一个投影图上可以得知圆柱的高。这种图画起来较容易，度量也方便，但是要能画它或看懂它，必须经过一系列的训练。

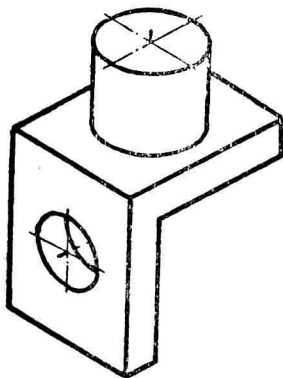


图 1—17

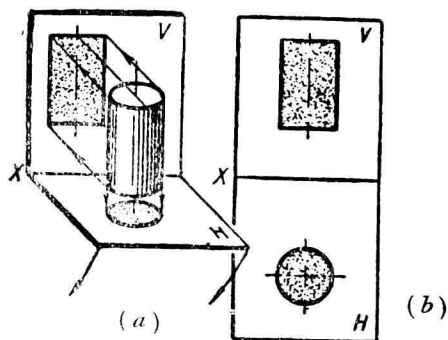


图 1—18

自我检查问题

1. 画法几何研究的对象是什么？
2. 说明中心投影和平行投影的区别。
3. 说明投射线，投射面，投影面，投影图等名词的意义。
4. 在平行投影中，知道了 1) 投影面， 2) 投射方向， 3) 空间形体， 4) 空间形体的投影等四个因素中的任意三个，是否可以确定第四个？或那些可以，那些不可以？

第二章 点的投影

§2—1 点的两个投影。正投影图的产生

在緒論中已講过，如果不附加任何条件，仅根据点在一个投影面上的一个投影，不能确定該点在空間的位置。因此我們选用**正投影法**。

正投影法是——1)用**平行直角投影**，2)将物体投影到二个（或二个以上）**互相垂直的投影面上**。

图 2—1 表示空間有二个互相垂直的投影面 H 和 V 。 H 面又称为**横面投影面**或**水平面**， V 面又称为**縱面投影面**或**直立平面**，其交綫 OX 称为**投影軸**（或简称 X 軸）。

如果将空間 A 点（用大写字母），用平行直角投影法，分別投影到 H 面和 V 面上，則用 a （小写字母）表示 A 点在 H 面上的投影（称**横面投影**），用 a' （小写字母加一撇）表示 A 点在 V 面上的投影（称**縱面投影**）。

在图 2—1 上，分別过 a 和 a' 点引 $aa_x \parallel Aa'$ ， $a'a_x \parallel Aa$ 。平面 Aaa_xa' 为一矩形（由讀者自己証明）， a_x 为此平面和 X 軸的交点。即

$$aa_x \perp V \text{ 面}; \quad a'a_x \perp H \text{ 面}。$$

或

$$aa_x \perp X \text{ 軸}; \quad a'a_x \perp X \text{ 軸}。$$

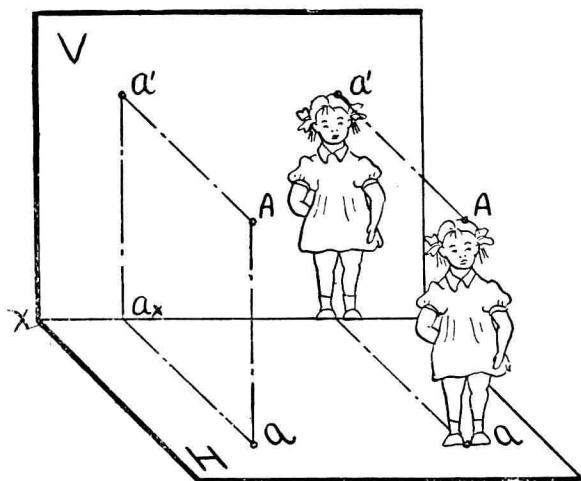


图 2—1

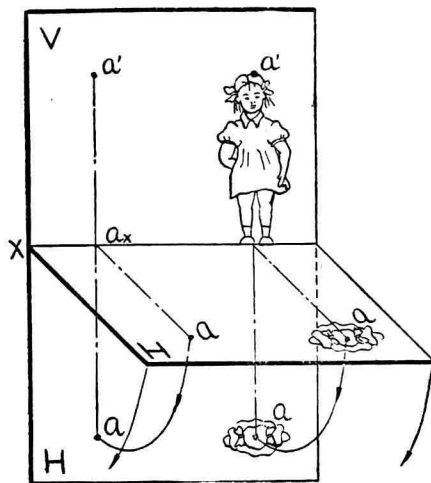


图 2—2

然后我們規定： V 面不动，而将 H 面繞 OX 軸向下旋轉 90° ，使 H 面和 V 面同在一个

❶ 如果是用平行斜投影和二個不垂直的投影面，同样也能确定該物体在空間的位置，但是作圖方法要复雜得多。

平面上。如图2—3或图2—4就是我们所需要的投影图，称为**正投影图**^❶。

投影面的大小可以根据需要而設，所以图2—3中的框子没有什么作用，因此以后我們取消边框和 H 、 V 等字样，即用图2—4表示。

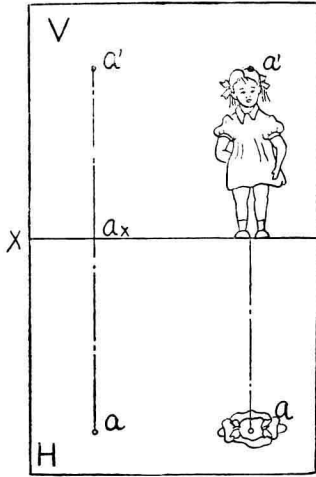


图 2—3

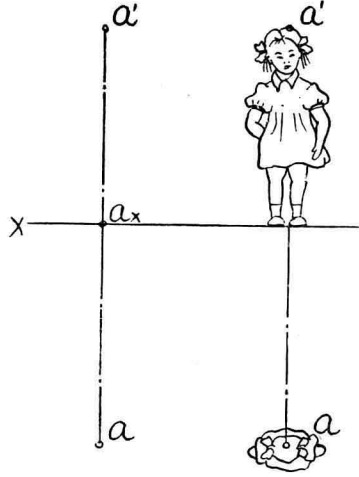


图 2—4

从上述的投影图中，可以得到以下二个重要的結論：

(1) 空間一点(A)的橫面投影(a)和縱面投影(a')的連線垂直 OX 軸，即 $aa_x \perp X$ 軸。

(2) 有了一点在正投影图上的二个投影，就可以完全确定該点在空間的位置。

这时候就需要运用空間想像力来讀图。从图2—4可以这样讀出：

$aa_x = A$ 点到 V 投影面的距离，称为縱标。(即人脚到牆根的距离 = 人头到牆的距离)。

$a'a_x = A$ 点到 H 投影面的距离，称为高标。(即人头到地板的距离)。

或者想像使 H 投影面恢复到原来位置。即将 H 投影面繞 X 軸向前向上轉 90° (如图2—5)。然后过 a 作一直線垂直 H 面，过 a' 作一直線垂直 V 面，此二直線必相交于一点 A ，此即 A 点在空間的位置。

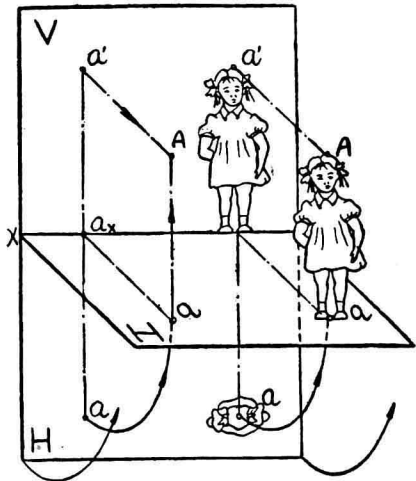


图 2—5

^❶ 图2—1不是正投影圖，是斜軸測投影圖，是立体圖的一种，我們用它來說明空間情况。本書中主要討論的是正投影圖，而軸測投影圖在第十章中討論。

§ 2—2 空間各象限中的点的投影

如果把 H 投影面往后扩大，把 V 投影面往下扩大，这时候二个投影面将空間分为四个象限（或叫做二面角），见图 2—6。用 H 、 H_1 、 V 和 V_1 表示二个投影面的四部份。并依照图 2—6 所表示，按次序称四个象限为：第一象限（ V 、 H 二面角）、第二象限（ V 、 H_1 二面角）、第三象限（ V_1 、 H_1 二面角）和第四象限（ V_1 、 H 二面角）。然后使 V 面不动，将 H 面繞 OX 軸向下轉动 90° ，（ H_1 面必然同时繞 OX 軸向上轉动 90° ），就成图 2—7 的形式，最后再省去边框和 H 、 H_1 、 V 、 V_1 等字样（如图 2—8）。这就是正投影图，同上节所討論的完全一样。要注意的是：点的横面投影可能在 OX 軸上面（ H_1 面），同理点的縱面投影也可能在 OX 軸的下面（ V_1 面）。

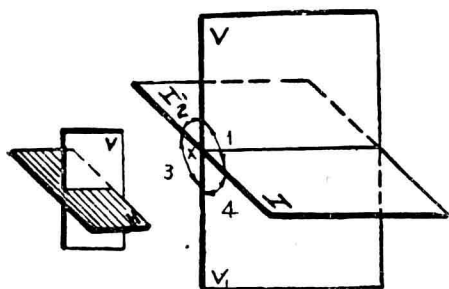


图 2—6

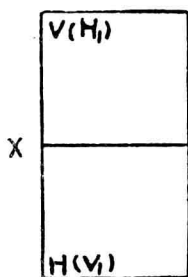


图 2—7

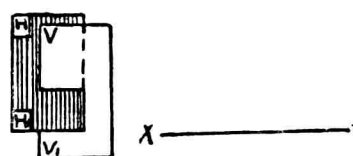


图 2—8

图 2—9 表示空間各象限中点的投影的情况。图 2—10 为其投影图。

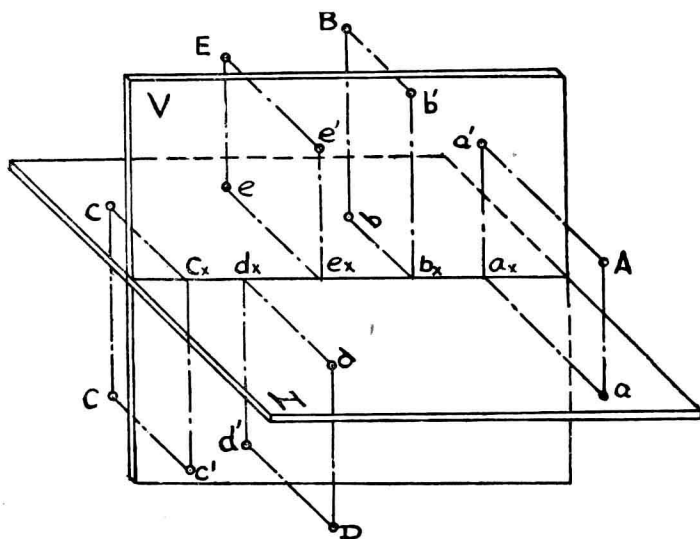


图 2—9

在讀上述这种投影图的时候，不要仅知道該点在那一个象限就滿足了，更重要的是要想像出該点到那一个投影面的距离是多少、或者其距离是用那一段綫来表示的，应多練習。

例如圖 2—10 的 B 点，我們应该这样讀：
 $b'b_x$ 是 B 点到 H_1 投影面的距离， bb_x 是 B 点到 V 投影面的距离，因在 H_1 上 V 后，所以它是在第二象限。同样根据 E 点的二个投影，就知道 E 点到 H_1 投影面和到 V 投影面的距离相等，即 $e'e_x = e'e_x$ ，它也是在第二象限。

圖 2—11 表示空間各点在投影面上和在投影軸上的情况。圖 2—12 是它們的投影图。

点在投影面上时，其投影的特点是：有一个投影在 X 軸上，說明它到某一个投影面的距离为零；另一个投影和点在空間的位置重合。

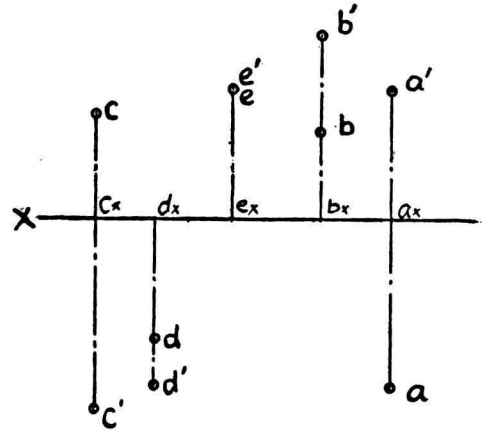


圖 2—10

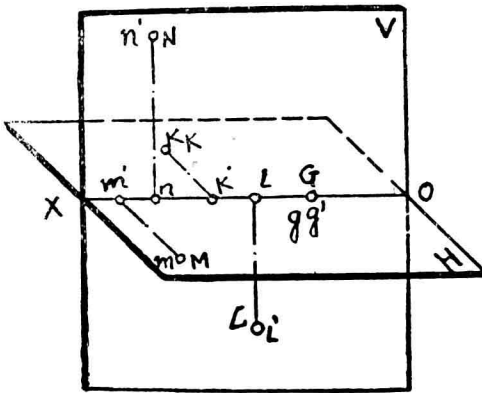


圖 2—11

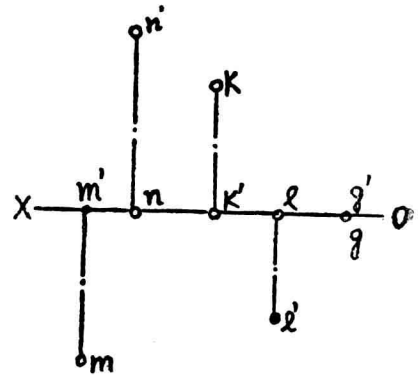


圖 2—12

§ 2—3 点的三个投影

前面已經講过，在投影图上有了一点的二个投影就可以完全确定該点在空間的位置。但是为了以后解决某些較為复杂的問題，往往需要增加第三个投影或者更多的投影。

在 H 和 V 二投影面的基础上，再加上第三个投影面 W （如图 2—13）。 W 面又叫侧面投影面（或侧面）。 H 、 V 、 W 三个投影面互相垂直，因此 OX 、 OY 、 OZ 三根投影軸也是互相垂直。 O 点称为原点。

圖 2—14 是表示空間 A 点在三个投影面的投影情形。

因为投射綫： $Aa \perp H$ 面， $Aa' \perp V$ 面， $Aa'' \perp W$ 面。

所以引： $\begin{cases} a a_x \perp X \text{ 軸,} \\ a' a_x \perp X \text{ 軸,} \end{cases} \quad \begin{cases} a a_y \perp Y \text{ 軸,} \\ a'' a_y \perp Y \text{ 軸,} \end{cases} \quad \begin{cases} a' a_z \perp Z \text{ 軸,} \\ a'' a_z \perp Z \text{ 軸,} \end{cases}$

則 $A-O$ 是一个正六面体。从图2-14中可以得出：

$Aa = a' a_x = a'' a_y = A$ 点到 H 投影面的距离 = 高标，或称 Z 标。

$Aa' = a a_x = a'' a_z = A$ 点到 V 投影面的距离 = 纵标，或称 Y 标。

$Aa'' = a' a_z = aa_y = A$ 点到 W 投影面的距离 = 横标，或称 X 标。

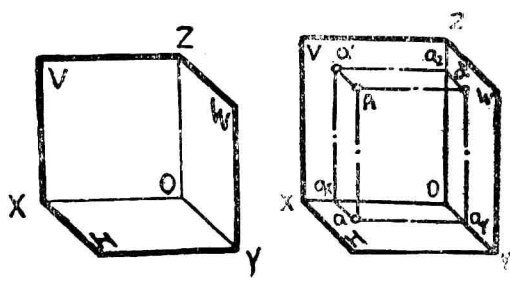


图 2-13

图 2-14

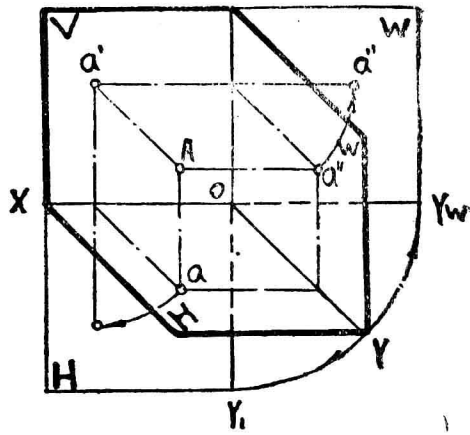


图 2-15

将 H 、 V 、 W 三个投影面展开成为一个平面（如图2-15），规定如下：使 V 面不动，将 H 面绕 X 轴向下转动 90° ， W 面绕 Z 轴向右转动 90° 。结果 Y 轴就拆开来成为 Y_H 和 Y_W 两条线（还是代表空间同一条轴綫）。展开后成图2-16，去掉边框后，图 2-17 就是我们所需要的投影图。

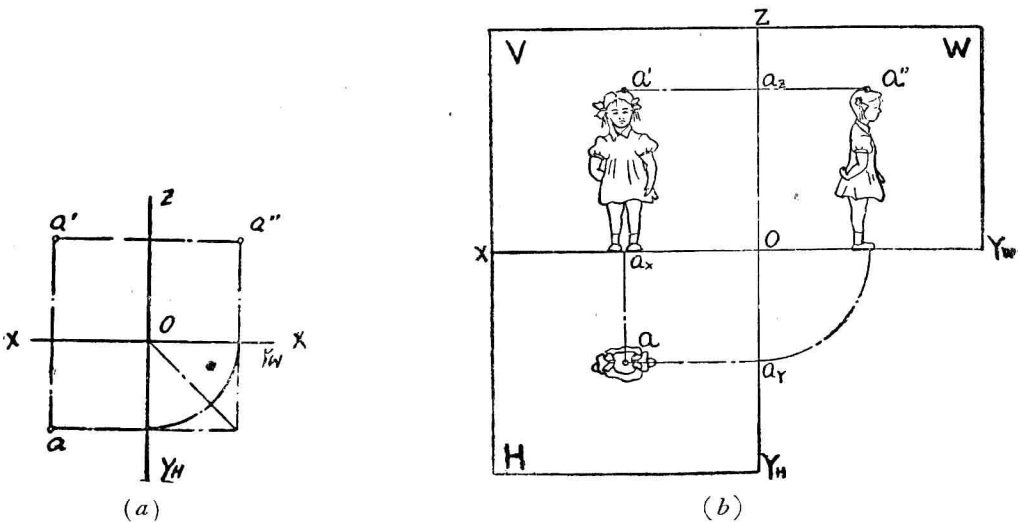


图 2-16