高等数学讲义

上　册

（初　稿）

南京大学数学系《高等数学》编写小组

1972年6月

毛主席語录

我们的教育方针，应该使受教育者在德育、智育、体育几方面都得到发展，成为有社会主义觉悟的有文化的劳动者.

事物矛盾的法则，即对立统一的法则，是自然和社会的根本法则，因而也是思维的根本法则。

自然科学是人们争取自由的一种武器。人们为着要在社会上得自由，就要用社会科学来了解社会，改造社会，进行社会革命。人们为着要在自然界里得到自由，就要用自然科学来了解自然，克服自然和改造自然，从自然里得到自由。

前　言

为适应工农兵新学员的需要，我们在学习毛主席光辉的教育革命思想、学习兄弟院校的先进经验的过程中，边学边干，试编了这本高等数学讲义。我们试图从少而精、理论联系实际的原则出发，初步结合唯物辩证法，开展革命大批判并适当吸取过去教学经验来编写这本教材。在编写过程中我们吸取了很多同志的宝贵意见。讲义暂分两册装印，上册内容如目录，下册内容有多元函数微积分、场论大意、微分方程、及某些补充等。内容是根据我校物理、气象、天文、化学、计算机等专业提出的大纲要求而讨论确定的。教材也就是为这些专业的学员而用的。但是，是否适用，还没有经过实践。由于水平有限，时间仓促，讲义中的错误和问题肯定不少，希望同志们随时指正，特别是在教学中，希望多提宝贵意见，以便以后进行修改。

数学系《高等数学》编写小组

1972年6月

目　　录

注：带*号的内容可视情况不讲或少讲。

第一章　引　论

自然界本来是在永恒的运动或变化中，例如机械的运动，物理的运动（光和热的现象，电磁过程，引力的相互作用，原子内部和核内的过程以及粒子的转化等等），化学的运动（化学过程），生物学的运动（有机体的生命过程）等等。所以只有从自然界的运动或变化中去认识它，才能对它获得更深刻的了解，达到改造自然界的目的。因此主要是研究常量与固定图形的初等数学已显得无能为力了，必须有全新的数学观念和方法，这就是高等数学。正如恩格斯在“自然辩证法”中所指出的，数学中的转折点是笛卡儿的变数。有了变数，运动进入了数学，有了变数，辩证法进入了数学，有了变数，微分和积分也就立刻成为必要的了……。”（这里所指的微积分就是高等数学的基本内容。）

由于变量，函数，极限等概念是高等数学的基础，所以在本册一开头我们就来介绍这些概念及其运算法则，作为高等数学的引论。

§1. 常量与变量

自然界中“没有什么事物是不包含矛盾的”。一切事物由于内部矛盾的存在，总是处在不停的变化或运动过程中。各种运动形式，虽然性质千差万别，但都表现为一定的数量变化。毛主席教导我们：“对情况和问题，一定要注意到它们的数量方面，要有基本的数量的分析。”对于自然规律的掌握也是这样，就是说，要做到胸中有“数”。

下面通过几个例子讨论一下，如何从这些运动形式的数量关系方面掌握它们的变化规律，以便帮助我们分析和解决实际问题。

例 1. 甲乙两地相距2800公里，如果一列专车，以每小时60公里的速度，从甲地开往乙地，试指出其中的变量和常量。

在列车运行的过程中，存在着三个量：路程(S)，速度(V)，时间(t)。其中，速度(V)看作是不变的量，而列车运行的时间(t)和所走的路程(S)是不断变化的量。

例 2. 考虑在受重力作用下，物体离地面高为h米处自由下落的情形（不计其阻力）。从运动开始计算起的时间t(秒)与在这时间内所经过的路程S(米)是由方程

$$S=\frac{1}{2}gt^2$$

来联系的，其中$g=9.8$米/秒^{2}是重力加速度。

在这自由落体的运动过程中，亦有三个量：下落路程(S)，下落时间(t)，重力加速度(g)。其中重力加速度(g)在同一地点是不变的量，而物体下落的时间(t)和路程

(S)在这过程中是不断变化的量。

例 3. 在直流电路中，当电阻R一定时，电路中的电流强度I也就随着电压V的变化而变化，並遵循欧姆定律：

$$V = IR$$

或 $$I = \frac{V}{R}$$

(其中R是一个确定常数)。

还可以举出一些例子。例如，当温度一定时，一定质量的气体的压强P(单位面积所受压力)与体积V成反比：$PV = C$(C为常数)。又如，描述物体受热引起体积胀缩的关系是

$$V_t = V_0(1 + \beta t),$$

V_0，V_t分别表示$0℃$，$t℃$时物体体积，β为体膨胀系数，对各种气体而言近似为$\frac{1}{273}$。对液体固体这个系数还要小些。

在观察科学技术及生活的各种领域内的某一过程时，我们常遇到各种不同的量，例如长度，面积，体积，重量，温度，压力，时间，速度等等。这些不同的量，有着非常不同的状态。根据它们的情况，基本上可以分为两大类：

第一，在事物运动或变化过程中，保持一定数值的量叫做常量。如上面例子中的火车速度(V)(一般以平均速度计算)，重力加速度(g)以及例 3 中的电阻(R)等等。

第二，在事物运动或变化过程中，可以取不同数值的量叫做变量。如上面例子中的路程(S)，时间(t)，以及例 3 中的电源(I)和电压(V)。

常量在数学上常用a，b，c，g等表示，变量常用x，y，z，t等表示，但对实际问题则用惯用记号。

这里我们必须指出，常量与变量概念的划分是相对于一定条件来说的，应该辩证地来认识。同一个量在某一过程中是变量，而在另一过程中则可能是常量。例如，在例 3 中，当电压V一定而让电阻R改变，则电流强度I也就随着电阻R的变化而变化。在这一过程中电压(V)是常量，而电流强度(I)和电阻(R)是变量。特别值得注意的是一个量在某一过程中是一个变量，但当只考虑过程的某一阶段(或一局部范围)时它的变化很微小，以致对所研究的问题不发生影响，这时，我们可以把它看作常量。例如在上面例 1 中列车的速度，严格来讲，也是一个变量，但在通常情况下，一般以平均速度v来代替它而将其看作为常量。又如例 2 中的自由落体的重力加速度g，在地球上不同地点取不同的值，但在一个范围不大的(相对于整个地球来说)地区，例如对南京市来说，它变化极小，就可视为常量。又如一根质量连续分布但不均匀的金属棒，它在各处的密度不一样，但取相当小的一段来看，由于其上各点密度变化不大，在这一小段上的密度就可视为常量了。我们今后在各种问题的研究中经常采用这种观点。

在不同的问题中代表不同的物理量，不管是常量还是变量，在讨论数学问题时是都不考虑其具体的物理意义的。当引用数轴(有确定的方向、单位和起点)讨论时，这种量

就可以用数轴上的一个点来代表它，並且不同的实数对应着不同的点，这样，一切实数（有理数与无理数的全体）就同数轴上的点之间建立了一一对应。

自然界中每一事物的运动都和它周围其他事物互相联系和互相影响着，这就要求数学从研究变量的变化情况发展到研究变量与变量之间的相互关系。

§2. 函数概念

在同一个自然现象或技术过程中，往往同时有几个变量共同变化着。“因为一切客观事物本来是互相联系的和具有内部规律的”。因此各个变量通常並不是孤立地变化，而是彼此联系的，遵循着一定的规律而变化的。

例如在 §1 的例 1 中，我们知道(匀速前进)列车的路程(S)，速度(v)和时间(t)三个量之间的关系：为

$$S = vt = 60\,t.$$

显然，列车前进的时间和路程这两个变量是按 $S = 60\,t$ 的规律变化着。由上式可算出列车在各个时刻离开甲地的距离如下表：

时间 t (小时)	1	2	3	4	5	……
路程 S (公里)	60	120	180	240	300	……

上面的公式、表格反映列车前进的运动规律。它们给出变量在变化过程中的数值对应关系。

在 §1 的例 2 中自由落体的运动规律(不计空气的阻力)是由方程 $S = \frac{1}{2}gt^2$(其中 $g = 9.8$ 米/秒^2 为重力加速度)来表示。这就是落体下落的路程 S 和时间 t 的数值对应关系。

在直角坐标系中，画出 S 和 t 的对应关系的图形，是一条以坐标原点为顶点，以纵轴为其轴的抛物线(图 1.1)。

又如，我们在初等数学中已学过圆的面积计算公式：$Q = \pi R^2$，它表示了圆的面积 Q 和半径 R 的对应关系。在前节例 3 中当考虑直流电路中的电阻 R 一定时，电路中的电流强度 I 随着电压 V 的变化而变化，並遵循如下的规律：$I = \frac{V}{R}$，它表示了电流强度 I 与电压 V 的对应关系等等。

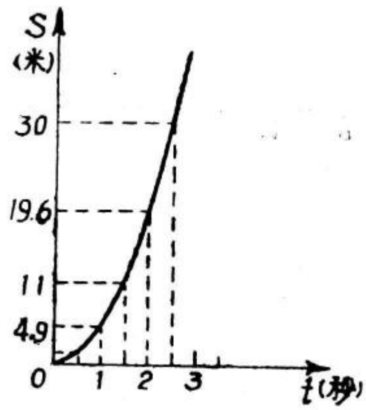

图1.1

毛主席教导我们：“就人类认识运动的秩序说来，总是由认识个别的和特殊的事物，逐步地扩大到认识一般的事物”。上面这些例子，虽然讲的是不同形式的运动问题，但共同的一点都是研究在某变化过程中变量间的

数值对应关系。从这里，我们抽象出函数的一般概念。

函数的概念。假定某变化过程中有两个变量 x 和 y。如果对于 x 在变化过程中所取得的每一个值，y 就按照一定的规律有一个确定的对应值，那么，我们就说 y 是 x 的函数。x 叫做自变量，而 y 叫做函数或因变量。记为 $y(x)$，或以 $y=f(x)$ 来表示。应注意，字母 f 指的是对应的规律而不是数值，记号 $f(x)$ 不能理解为 $f\cdot x$。又当同时考察几个不同的函数时，为了避免混淆就要用不同字母来表示这些不同的函数，如 $y=f(x)$ $y=F(x)$，$y=g(x)$，等等。

在上述的函数概念中，很重要的一点是：自变量 x 取每一数值时，按照一定的规律函数 y 都具有确定的数值。如 §1 例 2 中，S 是 t 的函数，$S=S(t)=\frac{1}{2}gt^2=4.9t^2$. 当 $t=1.5$ 时，对应的函数值是

$$S(1.5)=4.9\times(1.5)^2=11.025\text{，有时也记为}S\Big|_{t=1.5}=11.025.$$

又如，$y=f(x)=2x^2-1$，则 $y\Big|_{x=3}=f(3)=2\times3^2-1=17.$

因此，如果对于自变量的某一个已知数值(或在某一已知点处)，函数具有确定的对应值，那么，就说自变量取该值时(或在该点处)函数是有定义的。

数轴上使函数有定义即取实数值的一切点的全体叫做函数的定义域。定义域是指自变量的取值(实数值)的范围，对于函数所能取值(实数值)的范围称为函数的值域。

一般来说，函数的定义域是使表示式 $y=f(x)$ 有意义的全体 x 的值。例如，$y=\frac{1}{x-1}$ 的定义域为 $x\neq1$，因为当 $x=1$ 时分母为 0，函数没有意义。$y=\sqrt{x}$ 的定义域为 $x\geq0$，因为负数的平方根不是实数。对于实际问题，除了数学上的考虑外，还必须根据问题的实际意义来确定定义域。如 §1 例 1 中 $S=60t$ 其定义域为，$0\leq t\leq\frac{2800}{60}$（因甲乙两地相距 2800 公里）。对于函数的值域情况也是类似的。

函数的定义域往往可用数轴上的区间来表示。如 x 取 a 和 b 之间的所有数：$a<x<b$，则可用下图中 x 轴的区间表示，记作 (a,b)，称为开区间。

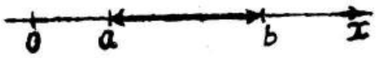

图 1.2

如果 x 的取值范围还包括区间端点 a 和 b，即 $a\leq x\leq b$，就叫做闭区间。记为 $[a,b]$。

如 §1 例 1 中的定义域为闭区间 $\left[0,\frac{2800}{60}\right]$，例 2 中函数 $S=\frac{1}{2}gt^2$ 的定义域是 $0\leq t\leq\sqrt{\frac{2h}{g}}$，即闭区间 $\left[0,\sqrt{\frac{2h}{g}}\right]$。当然有时也有半开半闭区间的情形。如函数 $y=f(x)=\sqrt{x-1}$ 的定义域是 $x\geq1$，我们把它记成区间 $[+1,\ +\infty)$，这里记号 $+\infty$ 读为正无穷大。

例 试讨论函数 (i) $y=\frac{\lg(1+x)}{x}$ 与 (ii) $y=\sqrt{x^2-3x+2}$ 的定义域。

解 (i) 在初等数学中已知，负数(与 0)不好求对数，实际上负数与零的对数不是

实数。故对分子来说，当 $1+x>0$ 或 $x>-1$ 时有定义。同时分母不能取零值（零作除数无意义），故对整个函数来说，还须补充限制 $x\neq 0$. 这样，函数的定义域是

$$x>-1 \quad 与 \quad x\neq 0$$

或者说，定义域由 $(-1, 0)$ 与 $(0,\infty)$ 两个区间所组成。

(ii) 根号内的式子可以分解为 $(x-1)(x-2)$，"负数不好开方，"负数的平方根不是实数，因而函数的定义域是

$$(x-1)(x-2)\geq 0.$$

两个因子之积非负当且仅当它们同号。由此可以确定定义域是

$$x\geq 2 \quad 与 \quad x\leq 1.$$

函数关系的表示法。两个变量之间的函数关系，可以用多种方式表达出来。最常用的表示法有分析法（或公式法），图示法和列表法三种。它们在不同场合下有不同的作用。

一 **分析法。**用数学式子表示变量之间的函数关系的方法，叫做分析法。

例如：$S=\frac{1}{2}gt^2$（自由落体运动），$C=2\pi R$（圆周长和半径 R 的关系），$y=\frac{1}{1+x^2}$ 等等就是用分析法来表示函数关系的。这种表示法，对于我们深入研究函数的性质非常有用，而且在工程技术实际应用上也是很重要的。但是，每次确定函数值都要进行一定的计算，计算有时相当复杂，在实际使用时並不方便有时甚至不可能，而且不是每个函数关系都能用数学式子表示的。

二 **列表法。**在实际应用中，常将一系列的自变量值与对应的函数值列成表。如对数表，三角函数对数表等等。如此表示函数关系的方法叫做函数的列表法。

函数的列表法，不但是为了应用上的便利——避免函数研究中的繁复计算，而且它可以表示当分析表达式未知时的函数，这在自然科学与工程技术上是常用的。例如：水文资料月流量记录表。对于某河流的水文站，记录了该河历年的月流量 Q（即一个月流过的水量的总和）现将40年的平均月流量列表如下，並画成图 1.3。

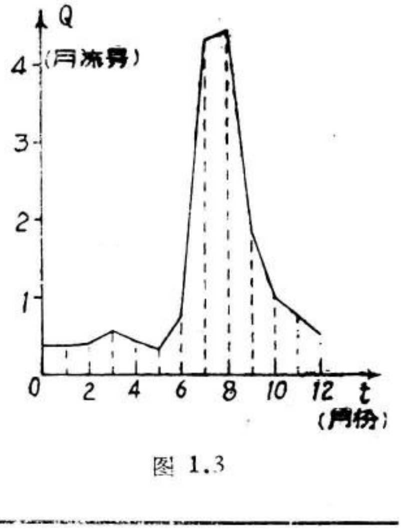

图 1.3

月份 t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
月流量(Q)	0.39	0.40	0.57	0.44	0.35	0.72	4.3	4.4	1.8	1.0	0.72	0.50

（亿立方米）

上面的表及图 1.3 表示了月流量 Q 与月分 t 的函数关系。

在科学技术的研究中，要找出变量间的函数关系，常常是首先通过试验观测得到若干数据，制成表格，然后对这些数值进行分析和处理，从中总结归纳出整个函数关系来。所以在一般情况下用列表法表示函数关系，不可能把自变量所有的值都列在表里，因而也就不可能把所有的函数值完全列出来。

三　**图示法**。利用解析几何的坐标法，把变量间的函数关系，用一个几何图形表示出来。函数 $y=f(x)$ 通常用平面上的一条曲线(特殊情形下是直线)来表示。我们在平面上取一动点 P，并以自变量 x 为 P 点的横坐标，因变量 y 为 P 点的纵坐标，当 x 和 y 按照函数关系 $y=f(x)$ 变化时，动点 $P(x,y)$ 的轨迹即是函数 $y=f(x)$ 的图形。例如在前面我们已知道，自由落体运动规律 $S=\frac{1}{2}gt^2$ 可以用平面上的一条抛物线表示。当然，图示法不一定非得指一条连续曲线的情况，当自变量只取几个点的情形也是可以的。

函数的图示法在物理及工程上是常用的，例如利用自动记录器，可以把大气压力与时间的函数关系用曲线表示出来。在无线电技术中我们常用示波器，显示出各种波形的曲线。它的特点是非常醒目，形象直观，对于两个变量的变化规律，一目了然。但是在图象上找自变量值和对应的函数值时，不易准确。

§3. 初等函数及其图形

在用公式表示的函数关系中，有几种简单函数关系是生产实际问题中常常遇到的。很多变化规律是通过这些函数来表示的，因此它起着基础的作用。这些简单函数，在初等数学里都已熟悉了。这里打算结合图形把它们的性质再进一步叙述一下。

一、线性函数(一次函数)

在解析几何里我们已经学过了直线方程：$y=kx+b$ 及其图形(如图 1.4)(其中，k 与 b 是常数)，它与 x 轴的正方向构成一个满足 $tg\alpha=k$ 的夹角 α，并与 y 轴交于点 $(0,b)$。因此，函数 $y=kx+b$ 称为线性函数。又因为 y 与 x 是一次关系，所以又叫一次函数。它的定义域为整个数轴 $(-\infty,+\infty)$。

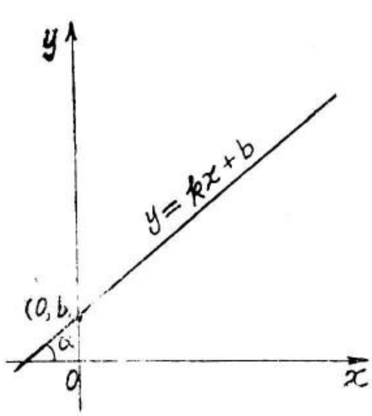

图 1.4

线性函数是实际问题中经常碰到的函数。例如，等速运动的物体其所走路程 S 与时间 t 的函数关系就是线性函数 $S=S_0+vt$(S_0, v 均为常数；其中 S_0 为开始时物体离原点的距离，v 为速度)。又如，金属丝电阻 R 与温度 t 的函数关系，也是线性函数 $R=R_0+\alpha t$(R_0 是 0℃时的电阻，α 是温度每增加一度时电阻增加的数值；R_0, α 都是常数)。线性函数之所以得到极广泛的应用，不仅是由于这函数本身简单，而主要是反映了均匀变化的运动。事实上，对自变量的任意二个值 x_1, x_2 与相应的函数值 y_1, y_2，有

$$\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{(kx_2+b)-(kx_1+b)}{x_2-x_1}=k\frac{x_2-x_1}{x_2-x_1}=k\text{(常数)},$$

它表示了函数的改变量与自变量的改变量成正比，k 为其比例系数。例如，在上面物体的等速运动问题中 $k=v$，它表示物体运动速度。在电阻 R 与温度 t 的函数关系中 $k=\alpha$，它表示电阻温度系数。另一方面，重视线性函数还因为不均匀变化至少在小的分段上有近似地当作均匀变化的可能。这一思想方法在后面我们经常要遇到。

二、幂 函 数

$$y=x^{\alpha}(\alpha\text{ 是实数})。$$

幂就是乘方。代数中我们学过 a，a^2，……，a^n，分别叫 a 的一次方，二次方，……，n 次方。如果底数是自变量 x，指数 α 等于某个常数，则 $y=x^{\alpha}$ 就叫做幂函数。这里 α，不仅可以取正整数，还可以是负数、分数、小数或零等等。当 α 取小数，分数时，我们规定函数 $y=x^{\alpha}$ 的定义域为 $x>0$，即数轴上的右半轴 $(0,+\infty)$。

前面我们已经碰到过不少幂函数的形式：§1 例 1 中列车前进的路程 $S=60t$ 就是一次幂函数 $y=x$ 经过乘上常数 $a=60$ 得到的。一次幂函数实际上就是经过原点而比例系数 $k=1$ 时的线性函数。例 2 中自由落体运动规律 $S=\frac{1}{2}gt^2$ 是二次幂函数 $y=x^2$ 的形式（多一个常因子）。又如直流电路中的欧姆定律，如果电压 V 取定，则 $I=\frac{V}{R}$（V 是常数）是负一次幂函数 $y=x^{-1}=\frac{1}{x}$ 的形式（多一个常因子）。

幂函数的图形，我们可以利用描点法来画出。图 1.5，图 1.6 是对应于 $x>0$ 的部分的。不管 α 取什么值，当 $x=1$ 有 $y=1$，故所有曲线都通过点(1.1)。在 $x>0$ 范围内，当 $\alpha>0$ 时，$y=x^{\alpha}$ 随 x 的增大而增大。当 $\alpha<0$ 时，$y=x^{\alpha}$ 随 x 的增大而减小。

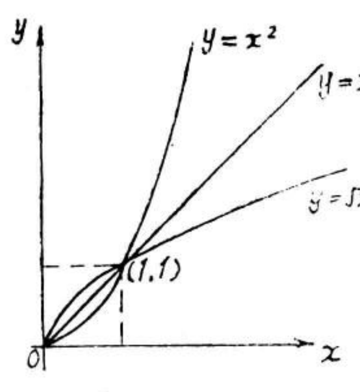

图 1.5

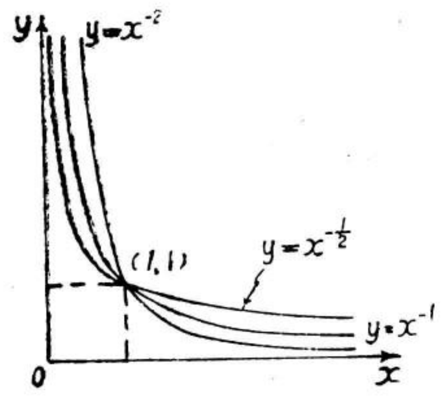

图 1.6

三、指数函数

$$y=a^x\quad(a\neq1,\ a>0)$$

底数 a 不变，指数是自变量 x 的这样的函数 $y=a^x$，叫做指数函数。它的定义域为整个数轴 $(-\infty,+\infty)$。因为无论 x 如何，总有 $a^x>0$，又 $a^0=1$，所以指数函数的图形，

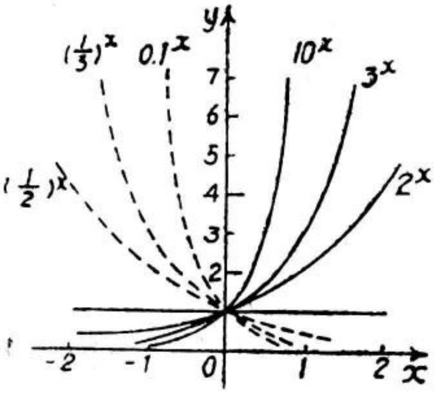

图 1.7

总在 x 轴上方，且通过点 (0,1)，如图 1.7 所示。

若 $a>1$，则 $y=a^x$ 随 x 的增大而增大。这种增大比幂函数的增大要快，常称为指数式的增大。

若 $0<a<1$，则情形相反，随 x 的增大而减小(如图 1.7)。

当 $a=e=2.71828\cdots\cdots$ 时，就变成特殊的指数函数 $y=e^x$，这种函数在应用上经常碰到。例如充电至电压 V_0 的电容 C，经电阻 R 放电（图 1.8)，电容器上电压 $u_C=V_0e^{-\frac{t}{RC}}$。这是电子技术中很有用的一个规律。$u_C=V_0e^{-\frac{t}{RC}}$ 是一个负指数函数，它的图如图 1.9所示，这个波形能够在示波器上看到。

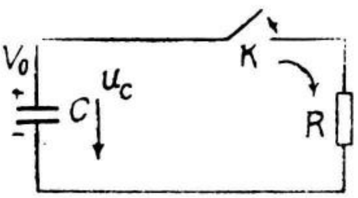

图 1.8

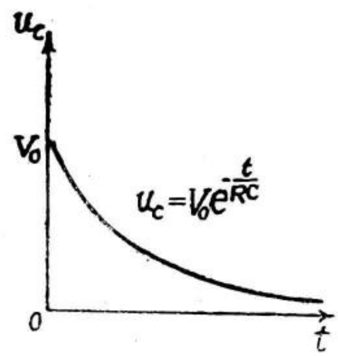

图 1.9

四、对数函数

从研究实际问题提出的函数关系，其自变量和因变量之间，存在着辩证关系。在同一个问题中，两个变量间的函数关系，从数量方面反映了这两个变量间相互联系和相互影响，但它们在相互作用的过程中，两个变量的地位並不是一成不变的。也就是说，构成函数关系的这对变量 x,y，是这个过程中矛盾着的双方，它们在一定条件下共存于统一体中，在某种条件下，x 是独立变化的，由 x 的变化决定了变量 y 的变化，则有函数 $y=f(x)$。而在另一条件下，y 可视为独立变量，要求由 y 的变化决定 x 的变化，即对于每一个 y 值，欲由关系 $y=f(x)$ 确定 x 的值，这时有函数关系 $x=\varphi(y)$。例如，在 §1 例 2 的自由落体运动中，通常是由自变量 t 的数值变化去分析计算因变量 S 的数值变化，其相依关系由 $S=f(t)=\frac{1}{2}gt^2$ 给定。但是，有时也需要从落体下落的距离 S 推算下落的时间 t，那么可以把距离 S 取作自变量，而时间 t 取作函数或因变量。这样，时间 t 是距离 S 的函数，这函数我们记作 $t=\varphi(S)$，t 与 S 的相依关系可由公式 $S=\frac{1}{2}gt^2$

确定为： $t=\sqrt{\frac{2S}{g}}$。

在这种情形，我们称函数 $t=\varphi(S)$ 是函数 $S=f(t)$ 的反函数。

抽去上面例子中变量的物理意义，我们来给出反函数概念。

反函数概念。 设已给 y 是 x 的函数

$$y=f(x)。\tag{1}$$

若将 y 当作自变量，x 当作函数，则由关系(1)所确定的函数

$$x=\varphi(y)\tag{2}$$

叫做函数 $f(x)$ 的反函数，而 $f(x)$ 叫做直接函数。

注意，在反函数概念中，重要的是函数关系 φ，至于自变量、因变量用什么记号是没有关系的。习惯上常用 x 作自变量，故有时将上述反函数写为 $y=\varphi(x)$。

例 设直接函数为 $y=ax+b$，则它的反函数为 $x=\frac{y-b}{a}$。又设直接函数为 $y=x^2$，则它的反函数为 $x=\sqrt{y}$ 或 $x=-\sqrt{y}$（此例的反函数不是单值的）。

直接函数与反函数之间，有着密切的联系，知道了直接函数的性质，就可引出有关反函数的一些性质。

有了反函数概念后，下面我们来介绍对数函数。

在初等数学里我们学过指数运算的逆运算，即已知 a，N 由关系式 $a^b=N$ 求 b，我们叫求对数。类似地在函数概念中，指数函数 $y=a^x$ 的反函数叫做以 a 为底的对数函数：$y=\log_a x(a\neq1,\ a>0)$。其定义域是 $x>0$ 即为数轴上的右半轴，也可用 $(0,+\infty)$ 来表示，其图形如图 1.10。

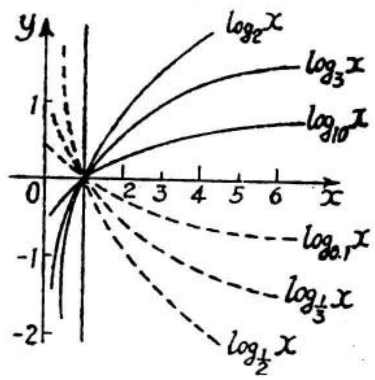

图 1.10

当 $a=10$ 时，把 $\log_a x$ 记为 $\lg x$，称为常用对数。当 $a=e$ 时，则把 $\log_a x$ 记为 $\ln x$，称为自然对数。

五、三角函数

学习三角时，我们已经接触到三角函数的概念。如正弦函数 $y=\sin x$，余弦函数 $y=\cos x$，正切函数 $y=\operatorname{tg} x$，余切函数 $y=\operatorname{ctg} x$，正割函数 $y=\sec x$，余割函数 $y=\operatorname{cse} x$，等等。它们统称三角函数。在研究机械运动和交流电等现象中，常遇到用三角函数表示的变化规律。由于 $\operatorname{ctg}x=\frac{1}{\operatorname{tg}x}$，$\sec x=\frac{1}{\cos x}$，$\csc x=\frac{1}{\sin x}$，这里就着重讨论 $\sin x$，$\cos x$，$\operatorname{tg}x$ 的性质，其余就从略了。

(1) 三角函数的单位圆表示法和三角函数的图形。

要作出三角函数的图形，我们可以用一般的函数作图法——描点法来作。这里我们介绍一个用几何作圆的方法，这在电工学和其他工程技术上也要遇到，它可以更直观的

看出函数图形的一些特点。

先介绍 $\sin x$，$\cos x$ 的单位圆表示法。即作一个半径为 1 的单位圆，$O'A$ 为底边，$O'P$ 为动径，P 点在圆周上移动。过 P 作 $O'A$ 的垂线，垂足为 Q。因 $O'P$ 之长为 1，根据三角函数的定义，可知就数值和符号两者而言都有 $PQ=\sin x$，$O'Q=\cos x$。这样我们就可以用角度 x 的大小(用弧度来表示)作横坐标，PQ 的长度作纵坐标，画出 $\sin x$ 的图形，如图 1.11。如果用 $O'Q$ 的长度作纵坐标，就可画出 $\cos x$ 的图形，如图 1.12。图中画的是当 $0\le x\le 2\pi$ 时，$y=\sin x$ 与 $y=\cos x$ 的曲线的那一段。

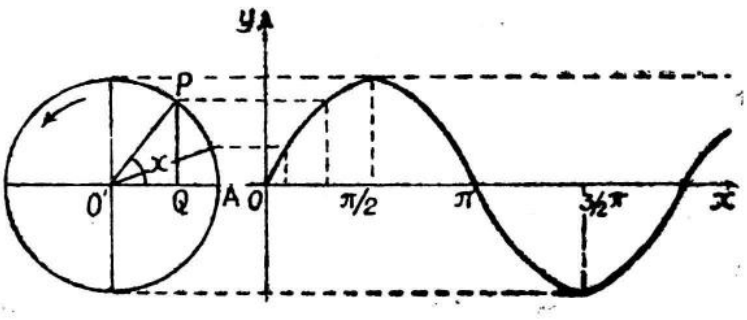

图 1.11

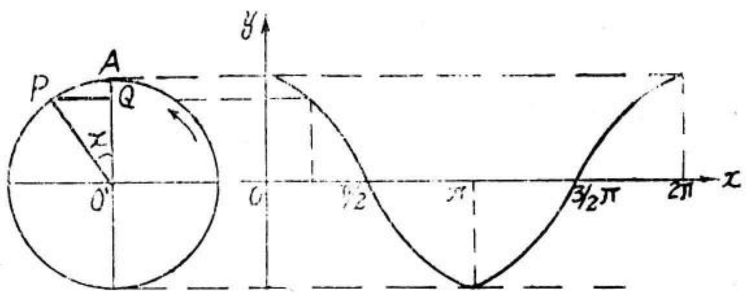

图 1.12

$\operatorname{tg} x$ 的单位圆表示法是这样的，作一个半径为 1 的单位圆，底边为 $O'A$，过 A 作 $O'A$ 的垂线，动径与垂线的交点为 P。因为 $O'A=1$，根据定义，$\operatorname{tg}x=PA:O'A=PA:1$，即 $PA=\operatorname{tg} x$，但是 $\operatorname{tg} x$ 的符号要看 x 所在的象限而定的。例如 x 在第二象限变化时，则 $O'A=-1$，PA 仍是正的，因而 $\operatorname{tg} x=PA:O'A$ 是负的。所以以 x 为横坐标，相应的 PA 的长度为纵坐标，就可作出 $\operatorname{tg} x$ 的图形，如图 1.13。

(2) 三角函数的周期性。

从上述作图过程中，我们看到对 $\sin x$，$\cos x$ 来说，角度为 $2\pi+x$，$4\pi+x$，$6\pi+x$，……，$2n\pi+x$（n 为任意正整数)时的纵坐标相同(因为它相当于动径绕 O' 点一周，二周、三周，……，n 周，又回到原来的位置)。因此说明：

$$\sin x=\sin(2\pi+x)=\sin(4\pi+x)=\cdots\cdots=\sin(2n\pi+x),$$

$$\cos x=\cos(2\pi+x)=\cos(4\pi+x)=\cdots\cdots=\cos(2n\pi+x)。$$

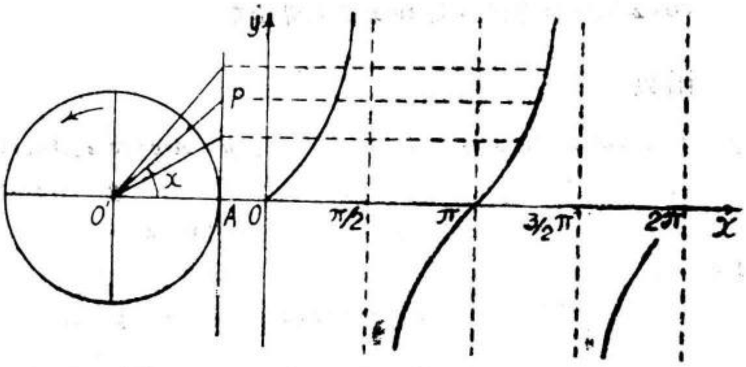

图 1.13

然而对 $\operatorname{tg} x$ 来说，却有 $x+\pi$，$x+2\pi$，$x+3\pi$，……，$x+n\pi$ 对应的纵坐标与 $O'A$ 之比和 x 对应的纵坐标与 $O'A$ 之比相等，因此说明 $\operatorname{tg} x=\operatorname{tg}(\pi+x)=\cdots\cdots\operatorname{tg}(n\pi+x)$。

函数的周期性。一般说来，如果对一个函数 $y=f(x)$，有一个最小的正数 T 能够使 $f(x+T)=f(x)$ 对 x 在定义域内的一切值都成立，那末称 $f(x)$ 为周期函数，T 就称为函数 $f(x)$ 的周期。周期函数的图形只要在一个周期长的区间 $[O,T]$ 上画出来就行了。其它部分都可由这图形左右平移周期倍数而得到。

因此，$\sin x$，$\cos x$ 与 $\operatorname{tg} x$ 都是周期函数。$\sin x$，$\cos x$ 的周期为 2π，$\operatorname{tg} x$ 的周期为 π。

(3) 三角函数的奇偶性。

学习三角时我们知道，关于正、负角三角函数之间的关系，有

$$\sin(-x)=-\sin x,\ \cos(-x)=\cos x,\ \operatorname{tg}(-x)=-\operatorname{tg} x.$$

由此可见 $\sin x$ 和 $\operatorname{tg} x$ 的图形是对称于坐标原点的，而 $\cos x$ 的图形则对称于 y 轴。

函数的奇偶性。一般的，如果对一个函数数 $y=f(x)$ 有 $f(-x)=-f(x)$，则称 $f(x)$ 为奇函数。如果 $f(-x)=f(x)$，则称 $f(x)$ 为偶函数。

因此，$\sin x$，$\operatorname{tg} x$ 均为奇函数，而 $\cos x$ 为偶函数。

(4) 三角函数的定义域和值域。

根据以上讨论，我们看到，对于 $\sin x$ 和 $\cos x$，不论角 x 取什么值，$\sin x$，$\cos x$ 总是有意义的，因此，$\sin x$、$\cos x$ 的定义域是一切实数(或说整个数轴)，以 $(-\infty,+\infty)$ 来表示。而且从 $\sin x$，$\cos x$ 的单位圆表示法可知，它们能取 -1 与 $+1$ 之间的任何数值，而值域都是区间 $-1\leq y\leq 1$。这样对任一 x 值，都有 $|\sin x|\leq 1$，$|\cos x|\leq 1$。然而 $\operatorname{tg} x$ 的情况就不同。从图上可以看到当 $x=\pm\frac{\pi}{2}$，$\pm\frac{3}{2}\pi$，……，$\pm\frac{2n-1}{2}\pi$ 时（n 是整数），$\operatorname{tg} x$ 是不存在的。因此 $\operatorname{tg} x$ 的定义域是除去这些数以外的一切实数，而且 $\operatorname{tg} x$ 的曲线可以向上向下无限延长，因此 $\operatorname{tg} x$ 的取值范围没有限制，其值域是 $-\infty<y<\infty$。

函数的有界性。一般说来，如果存在一个正数 M，对于自变量 x 所取的每一个值，函数 $f(x)$ 的绝对值都不超过 M，即 $|f(x)|\leq M$，那末，这个函数叫做有界函数。否则，就叫做无界函数。

因此，$\sin x$，$\cos x$ 都是有界函数而 $\operatorname{tg} x$ 是无界函数。

六、反三角函数

三角函数 $y=\sin x$、$\cos x$、$\operatorname{tg} x$ 的反函数，依次记作 $y=Arc\sin x$、$Arc\cos x$、$Arc\operatorname{tg} x$，叫做反三角函数，並依次称为反正弦、反余弦、反正切函数。以 $y=Arc\sin x$ 为例，它表示正弦为 x 的角度(以弧度为单位)。即 y 满足关系：$\sin y=x$。

函数 $y=Arc\sin x$ 的图形（如图 1.14）介于二直线 $x=-1$，$x=+1$ 之间，所以函数的定义域是闭区间$[-1,+1]$。又由于 $y=Arc\sin x$ 相当于 $\sin y=x$，所以给定 x 的值就有无穷多个角度 y 与之对应，如对于 $x=1$ 有 $\sin\frac{\pi}{2}=1$，$\sin\left(\frac{\pi}{2}\pm2\pi\right)=1$，$\sin\left(\frac{\pi}{2}\pm4\pi\right)=1$，等等。在图形上也表明，若过闭区间$[-1,+1]$中一点 x 作垂直于 x 轴的直线，交此图形于无穷多个点，这些点的纵标都是角度 y 的对应值。对于这个函数，给定一个 x，有一个以上的 y 值与之对应，它就是所谓多值函数的例。为了研究方便起见，往往取其单值的一个分支，如图 1.14 通常选择函数值的闭区间$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$上的一段曲线（在图上用粗线所画出的弧 AB），这样所限定的函数值（对每个 x 只有一个 y 与之对应）叫做 $Arc\sin x$ 的主值，记作 $Arc\sin x$，它满足 $-\frac{\pi}{2}\le arc\sin x\le\frac{\pi}{2}$。于是，$y=arc\sin x$ 是定义在闭区间$[-1,1]$上且随 y 的增加而增加的函数。

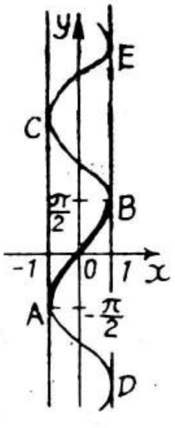

图 1.14

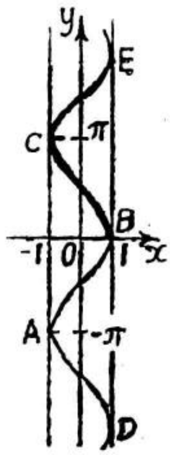

图 1.15

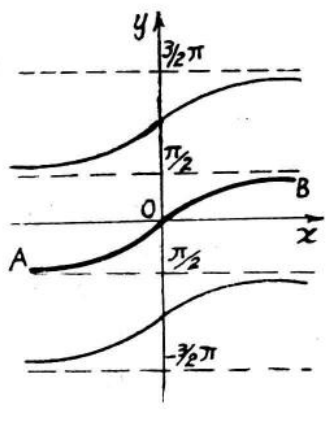

图 1.16

把 $y=arc\sin x$ 的图形向下平移一段距离 $\frac{\pi}{2}$，就得到 $y=arc\cos x$ 的图形。(图 1.15)。仿上讨论，在对应于已给 x 值的一切函数值中，我们选取自 0 到 π 的那些值，叫做 $arc\cos x$ 的主值，记作 $arc\cos x$，它满足 $0\le arc\cos x\le\pi$。

函数 $y=arc\cos x$ 是定义在闭区间$[-1,+1]$上的，且随 x 的增加而减少的函数。它的图形是图 1.15 中用粗线画出的一段弧 CB。

最后，看函数$y=arc\operatorname{tg} x$ 的图形（图 1.16)。它定义于整个数轴即 $(-\infty,+\infty)$ 上、