

高中数学总复习  
课堂教学与练习实用讲义

《高中数理化总复习讲义》编写组

1994

活页练习册

教育科学出版社

G633

04

490430

# 高中数学总复习 课堂教学与练习实用讲义

《高中数理化总复习讲义》编写组



CS261461

教育科学出版社

重庆师院图书馆

CO

(京)新登字第111号

主编：王安文 张程  
编委：张鸿菊 张程 王运淼  
费光明 王惊雄 申敬红  
赵菁 李凡 张鹤

(作者单位：北京师范大学二附中 北京市景山学校  
北京师范大学实验中学 北京市第四中学 《中学生科学报》社)

高中数学总复习

课堂数学与练习实用讲义

《高中数理化总复习讲义》编写组

责任编辑：许佩云

---

教育科学出版社出版、发行 (北京·北太平庄·北三环中路46号)  
全国各地新华书店经销 昌平马池口印刷厂印装  
开本：787×1092毫米 1/16 印张：15.125 字数：300千字  
1993年6月第1版 1993年6月第1次印刷  
印刷：00,001—8,000册

---

ISBN 7-5041-1135-X/G·1092 定价：8.40元

(版权所有 翻版必究)

## 前 言

为了向全国广大中学教师和同学提供北京市重点中学高考前总复习课堂教学与练习的第一手资料，我们组织了北京师范大学第二附属中学，实验中学，北京四中，景山学校的优秀教师按照国家教委最新颁布的《教学大纲》与《考试说明》精心撰写了《高中数理化总复习课堂教学与练习实用讲义》丛书，这是一套与高中总复习同步的课堂教学实用讲义和练习测验试卷。《数学》共60讲，每讲（约需2课时）均包括以下几方面内容：

**【基本知识】**——列出本讲知识要点，主要包括概念、公式、定理和一些常用结论，并以填空形式给出，以便于学生课前充分预习。

**【例题精选】**——兼顾知识、方法与技巧的覆盖面和题型的多样性，以便于教师讲授选用；书中例题后面没有直接给出解答而留下空白处，以便于学生课上能够专心听讲、积极思考和认真总结。

**【练习测试】**——采用试卷样式给出，以便于教师布置作业或测试选用，让学生把获得的知识得以消化、巩固与提高，达到落实。

为了教师和同学使用方便，我们按全新的结构编写了这套丛书，力图提高学习效率、注重学习效果。

**可重新拆装** 本书为16开大本，每讲均占2张纸面（共4页），其中第一张正、反面分别为**【基本知识】**和**【例题精选】**——以便于教师提前拆下发给学生预习；第二张正、反面均为**【练习测试】**（实为一份完整试卷）——以便于教师布置作业或考试选用。

**集教案、笔记的优点于一体** 教师、学生课堂不必再花费很多时间去板书和抄题——以便于加大课堂容量，提高复习效率，确保复习质量。

**复习完毕，可再装订成书** 便为一本高考前最为实用的宝贵资料。

《高中数理化总复习》编写组

一九九三年夏于北京

# 目 录

## 第一篇 代 数

<b>第一章 集合与函数</b> .....	1
第一讲 集合.....	1
第二讲 映射.....	5
第三讲 函数、复合函数与反函数.....	9
第四讲 函数的性质.....	13
第五讲 二次函数.....	17
第六讲 指数式与对数式.....	21
第七讲 幂函数、指数函数与对数函数.....	23
第八讲 指数方程与对数方程.....	27
第九讲 函数图象.....	29
<b>第二章 三角函数、反三角函数与简单三角方程</b> .....	33
第十讲 三角函数的定义与基本关系.....	33
第十一讲 三角函数的图象与性质.....	37
第十二讲 和差倍半角的三角函数.....	41
第十三讲 三角函数的和积互化.....	45
第十四讲 三角形中的三角函数.....	49
第十五讲 反三角函数.....	53
第十六讲 三角方程.....	57
<b>第三章 不等式</b> .....	61
第十七讲 不等式的概念与性质.....	61
第十八讲 不等式的解法 (一).....	65
第十九讲 不等式的解法 (二).....	69
第二十讲 不等式的证明 (一).....	73
第二十一讲 不等式的证明 (二).....	77
第二十二讲 不等式的应用.....	81
<b>第四章 数列</b> .....	85
第二十三讲 数列的概念.....	85
第二十四讲 等差数列.....	89
第二十五讲 等比数列.....	93
第二十六讲 数列求和.....	97
第二十七讲 数列中的归纳与证明.....	101
第二十八讲 数列的极限.....	105
<b>第五章 复数</b> .....	109

第二十九讲	复数的概念	109
第三十讲	复数的三角形式	113
第三十一讲	复数的运算	117
第三十二讲	复数与方程	121
第三十三讲	复数与几何	125

<b>第六章 排列组合</b>		129
第三十四讲	排列与组合	133
第三十五讲	排列与组合应用	137
第三十六讲	二项式定理及其应用	141

## 第二篇 解析几何

第三十七讲	基本公式	141
第三十八讲	曲线和方程	145
第三十九讲	直线	149
第四十讲	直线方程的综合问题	153
第四十一讲	圆	157
第四十二讲	圆的直线、圆和圆的位置关系	161
第四十三讲	椭圆	165
第四十四讲	双曲线	169
第四十五讲	抛物线	173
第四十六讲	坐标轴的平移	177
第四十七讲	中心不在坐标系原点的圆锥曲线	181
第四十八讲	圆锥曲线的综合问题	185
第四十九讲	参数方程	189
第五十讲	参数方程的应用	193
第五十一讲	极坐标	197

## 第三篇 立体几何

第五十二讲	平面	201
第五十三讲	空间两条直线	205
第五十四讲	空间直线和平面	209
第五十五讲	空间两个平面	213
第五十六讲	柱体	217
第五十七讲	锥体	221
第五十八讲	台体	225
第五十九讲	球体	229

## 第四篇 模拟题

第十六讲	高考模拟试题	233
------	--------	-----

# 第一讲 集 合

## 〔基本知识〕

### 一、集合的概念

(1) 定义 (描述性说明):

(2) 分类: ①有限集:

②无限集:

(3) 性质: ①确定性:

②相异性:

③无序性:

(注: 性质③无序性: 对于象自然数组成的无限集, 通常表示为  $N = \{1, 2, 3, \dots\}$ , 而不能交换元素之间的顺序, 其目的在于体现集合中省略号所表示的那些元素的规律, 而不是集合本身所要求的.)

(3) 表示方法:

①列举法:

②描述法:

③图示法:

④专用符号表示法:

### 二、集合与集合的关系

名称	定 义	图 示	符号表示
子 集	对于两个集合 $A$ 和 $B$ , 如果集合 $A$ 的任一元素都是集合 $B$ 的元素, 那么 $A$ 叫做 $B$ 的子集		若 $x \in A$ , 则 $x \in B$ 记作 $A \subseteq B$ 或 $B \supseteq A$
真子集			
交 集			
并 集			
补 集			

### 三、集合的有关运算性质

(1)  $A \cap A = ( \quad )$ ,  $A \cup A = ( \quad )$ .

(2)  $A \cap B = B \cap A$ ,  $A \cup B = ( \quad )$ .

(3)  $\phi \subseteq A \cap B \subseteq A \subseteq A \cup B$ ,  $\phi ( \quad ) A \cap B ( \quad ) B ( \quad ) A \cup B$ .

(4)  $\overline{A} = ( \quad )$ ,  $\overline{A} \cap A = ( \quad )$ ,  $\overline{A \cup A} = I$ .

(5) 若  $A, B$  均为有限集合, 设  $n(A)$  表示集  $A$  中元素的个数,  $n(B)$  表示集合  $B$  中元素的个数, 则  $n(A) + n(B) = n(A \cup B) + n(A \cap B)$ .

[例题精选]

例1. 用描述法表示下列集合:

(1)  $A = \left\{ 1, -\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{4}{\sqrt{5}}, -\frac{8}{\sqrt{7}}, \dots \right\}$ ,

(2) 直角坐标系中第一象限内所有点的坐标.

例2. 下列命题中, 哪些是正确的?

(1)  $\phi \in \{x | x \leq 0\}$ ;                      (2)  $\phi \subset \{x | x \leq 0\}$ ;

(3)  $\phi \in \{\phi\}$ ;                              (4)  $\phi \subset \{\phi\}$ ;

(5)  $\phi \subset \{0\}$ ;                              (6)  $0 \subset \{0\}$ .

例3. 已知集合  $M = \{x, xy, \lg(xy)\}$ ,  $N = \{0, |x|, y\}$ , 其中  $x, y \in R$ , 试问当  $M = N$  时  $x$  与  $y$  的取值?

例4. 已知集合  $M = \{x | x = a^2 + 1, a \in N\}$ ,  $N = \{y | y = b^2 - 4b + 5, b \in N\}$ , 求证:  $M \subset N$ .

例5. 已知全集  $I = \{x | x < 10, x \in N\}$ ,  $A \cap B = \{2, 5\}$ ,  $\overline{B} \cap A = \{1, 7\}$ ,  $\overline{A} \cap \overline{B} = \{3, 8, 9\}$ , 试写出集合  $A$  和  $B$ .

例6. 已知  $I = R$ ,  $A = \{x | x^2 - x - 2 < 0\}$ ,  $B = \{x | |x| = y + 1, y \in A\}$ , 试求  $\overline{B}$ ,  $A \cap B$ ,  $A \cup B$ ,  $A \cup \overline{B}$ ,  $A \cap \overline{B}$ .

例7. 已知函数  $f(x) = x^2 + px + q$ , 集合  $A$  和  $B$  分别定义如下:  $A = \{x | f(x) = x\}$ ,  $B = \{x | f(x-1) = x + 3\}$ , 当  $A = \{2\}$  时, 试求集合  $B$ .

[练习测试1]

学号: \_\_\_\_\_ 姓名: \_\_\_\_\_

一、选择题:

1. 已知集合  $A = \{(x, y) | (x+2)^2 + (y-1)^2 = 0\}$ ,  $B = \{-1, 0, 2, 1\}$ , 则  $A$  与  $B$  的关系是 ( )

- A)  $A \subset B$ .                      B)  $A \supset B$ .                      C)  $A \in B$ .                      D)  $A \neq B$ .

2. 设  $M = \{x | x \leq \pi\}$ ,  $a = 2$ , 则下列关系中正确的是 ( )

- A)  $a \notin M$ .                      B)  $a \subset M$ .                      C)  $\{a\} \in M$ .                      D)  $\{a\} \subset M$ .

3. 已知  $A = \{2, 3, 4\}$ ,  $B = \{3, 4, 5, 6\}$ , 那么  $A \cup B$  的真子集的个数有 ( )

- A) 8.                                  B) 31.                                  C) 32.                                  D) 16.

4. " $x \in \overline{A \cup B}$ " 的充要条件是 ( )

- A)  $x \in \overline{A}$ .                      B)  $x \in \overline{B}$ .                      C)  $x \in \overline{A}$  且  $x \in \overline{B}$ .                      D)  $x \in \overline{A}$  或  $x \in \overline{B}$ .

5. 已知  $M = \{x | x = t^2 + 1\}$ ,  $N = \{x | x = 4 - |t|\}$  其中  $t \in R$ , 则  $M \cap N$  等于 ( ) .

- A)  $\{x | 1 < x < 4\}$ .                      B)  $\{x | 0 \leq x \leq 4\}$ .  
C)  $\{x | 1 < x < 4\}$ .                      D)  $\{x | 1 \leq x \leq 4\}$ .

二、填空题:

1. 设  $A = \{a^2, a+1, -3\}$ ,  $B = \{a-3, 2a-1, 1+a^2\}$ , 若  $A \cap B = \{-3\}$ , 则  $a = \underline{\hspace{2cm}}$ ,  $A \cup B = \underline{\hspace{2cm}}$ .

2. 已知  $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ,  $B$  中有  $k$  个元素且  $B \subset A$ , 若对所有这样的集合  $B$  中的元素之总和为 210, 则  $k = \underline{\hspace{2cm}}$ .

3. 已知  $A = \{x | x^2 - ax + a^2 - 13 = 0\}$ ,  $B = \{x | \log_2(x^2 - 5x + 8) = 1\}$ ,  $C = \{x | x^2 = 8 - 2x\}$ , 若  $A \cap B \supset \phi$ ,  $A \cap C = \phi$ , 则  $a = \underline{\hspace{2cm}}$ .

4. 若  $A = \{x | -2 < x < -1 \text{ 或 } x > 1\}$ ,  $B = \{x | a \leq x \leq b\}$ , 且  $A \cup B = \{x | x > -2\}$ ,  $A \cap B = \{x | 1 < x \leq 3\}$ , 则  $a = \underline{\hspace{2cm}}$ ,  $b = \underline{\hspace{2cm}}$ .

5. 已知集合  $A = \{y | y = 1 - x^2, x \in R\}$ ,  $B = \{y | y = x^2, x \in R\}$ , 设全集  $I = R$ . 则  $\overline{A \cup B} = \underline{\hspace{2cm}}$ .

三、解答题:

1. 已知  $A = \{(x, y) | ax + y = 1\}$ ,  $B = \{(x, y) | x + ay = 1\}$ ,  $C = \{(x, y) | x^2 + y^2 = 1\}$ . 试问:

(1) 当  $a$  为何值时,  $(A \cup B) \cap C$  为含有两个元素的集合?

(2) 当  $a$  为何值时,  $(A \cup B) \cap C$  为含有三个元素的集合?

2. 已知  $f(x) = ax^2 + b$ ,  $a, b, x$  均为实数, 且  $A = \{x | f(x) = x\}$ ,  $B = \{x | f[f(x)] = x\}$ ,

(1) 求证:  $A \subseteq B$ .

(2) 当  $B \neq A \neq \emptyset$  时, 求  $a^2 + b^2$  的取值范围.

3. 已知  $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ ,  $B = \{a_1^2, a_2^2, a_3^2, a_4^2\}$ , 其中  $a_1, a_2, a_3, a_4 \in \mathbb{N}$ , 且  $a_1 < a_2 < a_3 < a_4$ , 又知  $a_1 a_4 = a_2 a_3$ ,  $a_1 + a_4 = 13$ ,  $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 = 170$ , 求  $A$  中四个元素的和.

4. 试求集合  $\{1, 2, 3, \dots, n\}$  所有子集的元素和的总和.

## 第二讲 映射、一一映射与逆映射

### [基本知识]

概念	定义	图例	关系表述
映射	<p>一般地, 设 <math>A, B</math> 是两个集合, 如果按照 ( ), 对于集合 <math>A</math> 中的 ( ), 在集合 <math>B</math> 中都有 ( ) 和它对应 (包括集合 <math>A, B</math> 及从 <math>A</math> 到 <math>B</math> 的对应法则 <math>f</math>) 叫做从集合 <math>A</math> 到集合 <math>B</math> 的映射, 记作</p> $f: A \rightarrow B.$		<p>对于任意 <math>x \in A</math>, 都存在唯一 <math>x \in B</math>, 使</p> $x \xrightarrow{f} y.$
	<p>如果给定一个从集合 <math>A</math> 到集合 <math>B</math> 的映射. 那么, 和 <math>A</math> 中的元素 <math>a</math> 对应的 <math>B</math> 中的元素 <math>b</math> 叫做 <math>a</math> 的 ( ), <math>a</math> 叫做 <math>b</math> 的 ( ).</p>		
一一映射			<p>① 对于映射 <math>f: A \rightarrow B</math>, 如果 <math>a_1, a_2 \in A</math>, 则</p> $f(a_1) = b_1, \neq b_2 = f(a_2) (b_1, b_2 \in B)$ <p>② 对于映射 <math>f: A \rightarrow B</math>, 如果任一 <math>y \in B</math>, 都存在 <math>x \in A</math>, 使得</p> $x \xrightarrow{f} y$
逆映射	<p>一般地, 设 <math>f: A \rightarrow B</math> 是集合 <math>A</math> 到集合 <math>B</math> 上的一一映射, 如果对于 <math>B</math> 中的每一个元素 <math>b</math>, 使 <math>b</math> 在 <math>A</math> 中的原象 <math>a</math> 和它对应, 这样所得的映射叫做 ( ), 记作: <math>f^{-1}: B \rightarrow A</math>.</p> <p>由此可知, 映射 <math>f: A \rightarrow B</math> 也是 ( ) 的逆映射, 且 <math>f^{-1}: B \rightarrow A</math> 也是一一映射.</p>		

### [例题精选]

例1. 下列对应是不是从  $A$  到  $B$  的映射? 是不是从  $A$  到  $B$  的一一映射? 为什么?

- (1)  $A = \mathbb{R}^+$ ,  $B = \mathbb{R}$ , 对应法则是“求常数对数”.
- (2)  $A = \{\text{平面 } M \text{ 内的点}\}$ ,  $B = \{\text{平面 } M \text{ 内的圆}\}$ , 对应法则是“以点  $P$  为圆心画圆”.
- (3)  $A = \{\alpha | 0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ\}$ ,  $B = [0, 1]$ , 对应法则是“求余弦”.

(4)  $A = \{\text{平面}M\text{内的三角形}\}$ ,  $B = \{\text{平面}M\text{内的圆}\}$ , 对应法则是“画三角形的外接圆”。

例2. 在集合 $A$ 到集合 $B$ 的映射中, 试回答:

(1) 对于集合 $A$ 中的任意一个元素 $a$ , 在集合 $B$ 中是不是有象? 是不是只有一个象?

(2) 对于集合 $B$ 中的任意一个元素 $b$ , 在集合 $A$ 中是不是有原象? 是不是只有一个原象?

例3. 已知 $f: x \rightarrow y$ 是一个一一映射, 对应法则是 $f: x \rightarrow y = 7x + 9$ , 试求 $f: x \rightarrow y$ 的逆映射。

例4. 已知:  $(x, y)$  在映射 $f$ 下的象是  $(x + y, x - y)$ ,

试求: (1)  $(3, 1)$  在 $f$ 下的原象;

(2)  $(a, b)$  在 $f$ 下的原象。

例5. 设 $A = \{a_1, a_2, a_3\}$ ,  $B = \{b_1, b_2, b_3\}$ , 试问从 $A$ 到 $B$ 上的可能的——映射的个数?

例7. 已知 $A = \{1, 2, n + 1, 2n\}$ ,  $B = \{-2, 2, \frac{4}{3}, m\}$ , 且从 $A$ 到 $B$ 上的一一映射为 $f$ ,

$x \rightarrow y = ax^2 + b$ , 又 $A$ 中的元素 $1, 2$ 在 $B$ 中的象分别为 $2, -2$ 及  $n \in (\frac{1}{3}, 1)$ , 试求 $m, n$ 的值。

## 一、选择题:

1. 设  $f: A \rightarrow B$  是集合  $A$  到  $B$  的映射, 则下列命题中正确的是 ( )
  - A)  $A$  中的每一个元素在  $B$  中必有象.
  - B)  $B$  中的每一个元素在  $A$  中必有原象.
  - C)  $B$  中的每一个元素在  $A$  中的原象必唯一.
  - D)  $A$  中的每一个元素在  $B$  中的象必不同.
2. 按对应法则  $f: x \rightarrow y = x^2$ , 使集合  $X$  中的元素  $x$  对集合  $Y$  中的元素  $y$ , 其中使  $f$  从  $X$  到  $Y$  成为一一映射的是 ( )
  - A)  $X = \mathbb{R}, Y = \mathbb{R}$ .
  - B)  $X = \mathbb{R}, Y = \{x | x \geq 0\}$ .
  - C)  $X = \{x | x \geq 0\}, Y = \mathbb{R}$ .
  - D)  $X = \{x | x \geq 0\}, Y = \{y | y \geq 0\}$ .
3. 已知  $(x, y)$  在映射  $f$  下的象是  $(\frac{x+y}{2}, \frac{x-y}{2})$ , 那么  $(-5, 2)$  在  $f$  下的原象是 ( )
  - A)  $(-10, 4)$ .
  - B)  $(-6, -4)$ .
  - C)  $(-3, -7)$ .
  - D)  $(-\frac{3}{2}, -\frac{7}{2})$ .
4. 下列对应中从  $A$  到  $B$  的一一映射为 ( )
  - A)  $A = \mathbb{R}, B = \mathbb{R}, f: x \rightarrow y = \frac{1}{x}$ .
  - B)  $A = \mathbb{R}, B = \mathbb{R}, f: x \rightarrow y = |x|$ .
  - C)  $A = \mathbb{R}, B = \{y | |y| \leq 1\}, f: x \rightarrow y = \sin x$ .
  - D)  $A = \mathbb{R}, B = \mathbb{R}, f: x \rightarrow y = \sqrt[3]{x} + 1$ .
5. 如果集合  $M, N$  中各含有  $m, n$  个元素, 那么从  $M$  到  $N$  可能建立的映射的个数是 ( )
  - A)  $m+n$ .
  - B)  $mn$ .
  - C)  $m^n$ .
  - D)  $n^m$ .

## 二、填空题

1. 已知从  $\mathbb{R}$  到  $\mathbb{R}$  的映射  $f: (x, y) \rightarrow (x+y, xy)$ , 则  $(8, 15)$  的原象为 \_\_\_\_\_.
2. 已知  $A = \{1, 2, 3, k\}, B = \{4, 7, a^2+3a, a^4\}$ , 从  $A$  到  $B$  的对应  $f: x \rightarrow y = mx + n$  是一一映射, 且  $1, 2$  分别对应  $4, 7$ , 其中  $k, a \in \mathbb{N}$ , 则  $m =$  \_\_\_\_\_,  $n =$  \_\_\_\_\_,  $a =$  \_\_\_\_\_,  $k =$  \_\_\_\_\_.
3. 已知  $A, B$  中各分别含有  $3$  个和  $2$  个元素, 则从  $A$  到  $B$  的可能建立的映射的个数有 \_\_\_\_\_.
4. 已知  $A, B$  中均含有  $5$  个元素, 则从  $A$  到  $B$  的所有映射中存在逆映射的个数最多有 \_\_\_\_\_.
5.  $f$  是以  $A = \{1, 2, 3\}$  为定义域,  $B = \{2, 4, 6\}$  为值域的函数, 这样的函数一共有 \_\_\_\_\_ 个.

## 三、解答题

1. 已知对应  $f: x \rightarrow 2x+3 (x \in \mathbb{R})$  是  $\mathbb{R}$  到  $\mathbb{R}$  的对应, 试证明  $f$  是一一映射, 并求  $f$  的逆映射.

2. 已知集合  $A$  到  $B = \left\{0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right\}$  的映射是  $f: x \rightarrow \frac{1}{|x|-1}$ , 那么  $A$  中元素最多有几个, 并写出元素个数最多时的集合  $A$ .

3. 已知集合  $A = \left\{x \mid x \in \mathbb{R} \text{ 且 } x \neq \frac{n\pi}{4} + \frac{\pi}{4}, n \in \mathbb{Z}\right\}$ ,  $B = \{y \mid y \in \mathbb{R}\}$ , 集合  $A$  中的元素按对应关系  $f: x \rightarrow y = \operatorname{tg} 2x$  和  $B$  中的元素对应.

(1) 求  $B$  的元素 3 的原象;

(2) 上述对象  $f$  是否为一一映射? 为什么?

4. 设  $A = \{1, 2\}$ , 若从集合  $A$  到  $A$  的映射的对应法则是  $f: x \rightarrow y = f(x)$ , 试求满足  $f[f(x)] = f(x)$  的映射的个数.

### 第三讲 函数、复合函数与反函数

#### [基本知识]

#### 一、函数的概念

函数	①定义:( ) ②从映射观点看,函数是:( )
三要素	①定义域. ②值域. ③从定义域到值域的对应法则.
表示方法	①列表法.举例:( ). ②解析法.举例:( ). ③图象法.举例:( ).

#### 二、复合函数的概念

复合函数	如果 $y$ 是 $u$ 的函数,而 $u$ 又是 $x$ 的函数,即 $y=f(u), u=g(x)$ ,那么 $y$ 关于 $x$ 的函数 $y=f[g(x)]$ 叫做 $f$ 和 $g$ 的复合函数, $u$ 叫做中间变量. 设 $y=f(u)$ 的定义域是 $A, y(x)$ 的定义域是 $B$ ,值域 $C$ ,则必有 $A \supseteq C$ ,这时 $B$ 是复合函数 $y=f[g(x)]$ 的定义域.
举例	

#### 三、反函数的概念

反函数的概念	
互为反函数的关系	①定义域和值域的关系; ②图象的关系;
求反函数的步骤	①由 $y=f(x)$ 解出 $x$ , 即“反解”; ②由函数 $y=f(x)$ 的定义域与值域确定反函数 $x=f^{-1}(y)$ 的 $y$ , 即“互换”; ③把 $x=f^{-1}(y)$ 改写为 $y=f^{-1}(x)$ , 并注明相应的 $x$ , 即“改写”.

#### [例题精选]

例1. 下面各函数是否相同? 为什么? 分别画出它们的图象.

$$f_1(x)=x, f_2(x)=\frac{x^2}{x}, f_3(x)=\sqrt{x^2}, f_4(x)=(\sqrt{x})^2,$$

$$f_5(x)=\sqrt[3]{x^3}, f_6(x)=2^{\log_2 x}, f_7(x)=\log_2 2^x, f_8(x)=(\operatorname{tg} x \operatorname{ctg} x)x.$$

例2. 下列对应中, 表示从集合 $X$ 到集合 $Y$ 上的函数是 ( )

A)  $X = \{x | 0 \leq x \leq 1\}$ ,  $Y = \{y | 0 \leq y \leq 1\}$ ,  $f: x \rightarrow y = \lg(1-x)$ .

B)  $X = \{x | x \in R \text{ 且 } x \neq 0\}$ ,  $Y = \{y | y \in R, y \neq 1\}$ ,  $f: x \rightarrow y = 1 - \frac{1}{x}$ .

C)  $X = \{\text{矩形}\}$ ,  $Y = \{y | y > 0\}$ ,  $f: x \rightarrow y = x$  的面积.

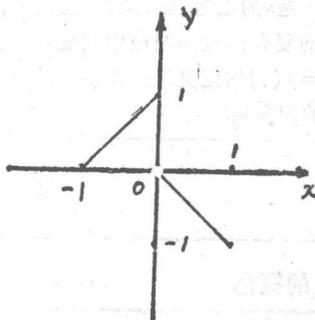
D)  $X = \{x | x \geq 0\}$ ,  $Y = \{y | y \in R\}$ ,  $f: x \rightarrow y^2$ .

例3. 求下列函数的反函数:

(1)  $y = \frac{1 + \sqrt{x}}{1 - \sqrt{x}}$ ;

(2)  $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2} (x < 0)$

例4. 已知函数  $y = \frac{1}{2}x + m$  和  $y = nx - \frac{1}{3}$  互为反函数, 试求 $m, n$  的值及两个函数图象的交点.



例5. 已知 $y = f(x)$  的图象如图. 试求:

(1)  $f(x)$  的表达式;

(2)  $f(x)$  的反函数并作出图象.

例6. 求下列函数的定义域:

(1)  $y = \frac{1}{\sqrt{64-x^2}} + \lg \sin x$ ; (2)  $y = \sqrt{\log_a(x-5)} (a > 0 \text{ 且 } a \neq 1)$ .

例7. 已知 $y = f(x)$  的定义域为 $[0, 1]$ , 试求下列函数的定义域:

(1)  $y = f(x+1)$ ; (2)  $y = f(\sqrt{x} - 2)$ ;

(3)  $y = f(\lg x)$ ; (4)  $y = f(x+a) f(x-a)$ .

## 一、选择题

1. 与函数  $y=x$  有相同图象的一个函数是 ( )

A)  $y=\sqrt{x^2}$ , B)  $y=\frac{x^2}{x}$ , C)  $y=a^{\lg a \cdot x}$ , D)  $y=\log_a a^x$ . ( $a>0$ 且 $a\neq 1$ )

2. 函数  $y=(0.2)^{-x}+1$  的反函数是 ( )

A)  $y=\log_5 x+1$ , B)  $y=\log_x 5+1$ , C)  $y=\log_5(x-1)$ , D)  $y=\log_5 x-1$ .

3. 若函数  $f(x)$  的定义域为  $[0, 2]$ , 则函数  $f(x^2)$  的定义域为 ( )

A)  $[0, \sqrt{2}]$ , B)  $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ , C)  $[0, 4]$ , D)  $[-4, 4]$ .

4. 已知  $f(x)=\lg(x^2-4x)$  的定义域为  $F$ ,  $g(x)=\lg x+\lg(x-4)$  的定义域为  $G$ , 则有

A)  $G=F$ , B)  $F\subset G$ , C)  $F\supset G$ , D)  $F\cap G=\phi$ .

5. 若点  $(1, 2)$  在函数  $y=\sqrt{ax+b}$  的图象上, 又在它的反函数的图象上, 则数对  $(a, b)$  的值为

A)  $(-3, 7)$ , B)  $(-3, -7)$ , C)  $(3, -7)$ , D) 不存在.

## 二、填空题:

1. 已知  $f(x)$  的定义域为  $[0, 1]$ , 则  $f\left(\lg\frac{x^2+x}{2}\right)$  的定义域为 \_\_\_\_\_.

2. 已知  $f(x)$  的定义域为  $[a, b]$  且  $b>-a>0$ , 则函数  $g(x)=f(x)+f(-x)$  的定义域为 \_\_\_\_\_.

3. 已知函数  $f(x)=\sqrt{x^2-2}$  ( $x\leq-\sqrt{2}$ ) 则  $f^{-1}(3)=$  \_\_\_\_\_.

4. 已知  $f(x)=2x-1$ ,  $g(x)=\frac{2}{x^2+1}$ , 则  $f[g(x)+2]=$  \_\_\_\_\_.

5. 已知  $f(x)=\begin{cases} 3x-6 & (x\geq 0) \\ x+5 & (x< 0) \end{cases}$  则  $f[f(1)]=$  \_\_\_\_\_.

## 三、解答题:

1. 试写出函数  $f(x)=\begin{cases} x^2-4 & (0\leq x\leq 2) \\ x^2 & (-2\leq x< 0) \end{cases}$  的反函数.

2. 边长为4的正方形  $ABCD$  的边上有一动点  $P$  沿着折线  $ABCD$  由点  $A$  (起点) 向  $D$  点 (终点) 运动, 设  $P$  点移动的路程为  $x$ ,  $\triangle APD$  的面积为  $y$ , 写出  $y$  与  $x$  函数关系的解析式.