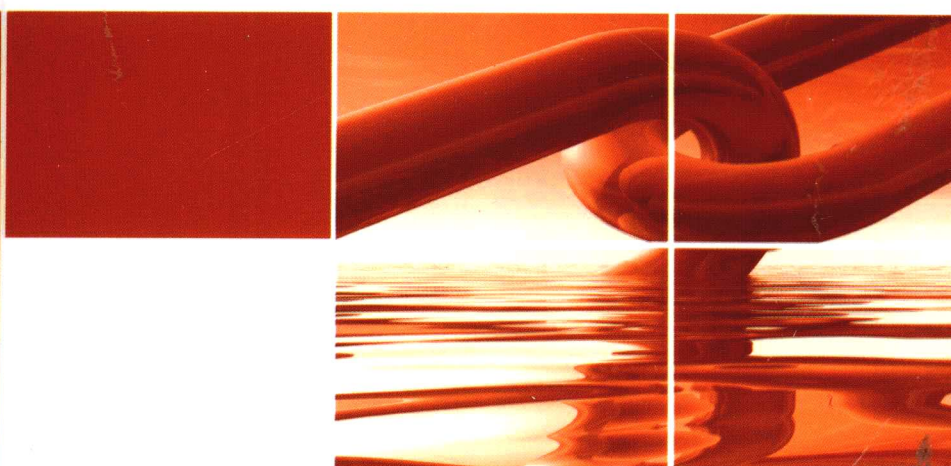


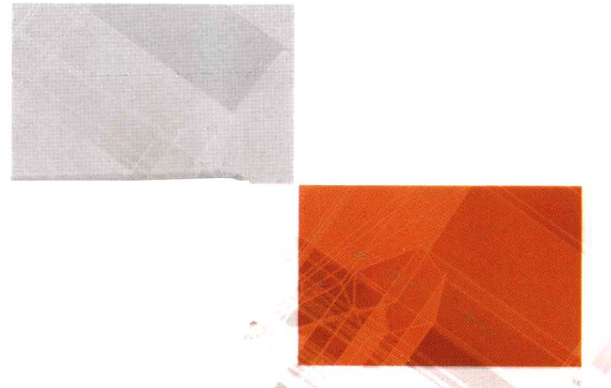
普通高等教育“十二五”规划教材

普通高等教育机电类实用型规划教材



# 工程力学

胡红玉 主 编  
刘 军 副主编



 **机械工业出版社**  
CHINA MACHINE PRESS



本书包括静力学和材料力学两部分内容,主要有静力学基本知识,平面力系(含摩擦),空间力系,轴向拉伸与压缩、圆轴扭转、梁弯曲时的强度和刚度计算,应力状态分析和强度理论,组合变形强度及压杆稳定计算等。全书共12章,每一章均配有思考题和习题。

本书可作为普通高等工科院校各专业力学基础课程教材,也可满足大学专科及高等职业技术学院力学课程的教学需要,并可供自学及广大工程技术人员阅读参考。

### 图书在版编目(CIP)数据

工程力学/胡红玉主编. —北京:机械工业出版社, 2012.11

普通高等教育“十二五”规划教材 普通高等教育  
机电类实用型规划教材

ISBN 978-7-111-40407-1

I. ①工… II. ①胡… III. ①工程力学-高等学校-  
教材 IV. ①TB12

中国版本图书馆CIP数据核字(2012)第271686号

机械工业出版社(北京市百万庄大街22号 邮政编码100037)

策划编辑:余 皞 责任编辑:余 皞 武 晋 任正一

版式设计:霍永明 责任校对:张莉娟

封面设计:张 静 责任印制:张 楠

北京京丰印刷厂印刷

2013年1月第1版第1次印刷

184mm×260mm · 14.75印张 · 359千字

标准书号:ISBN 978-7-111-40407-1

定价:28.00元

凡购本书,如有缺页、倒页、脱页,由本社发行部调换

电话服务

网络服务

社服务中心:(010) 88361066

教材网:<http://www.cmpedu.com>

销售一部:(010) 68326294

机工官网:<http://www.cmpbook.com>

销售二部:(010) 88379649

机工官博:<http://weibo.com/cmp1952>

读者购书热线:(010) 88379203

封面无防伪标均为盗版

# 目 录

## 序 前言

|                            |    |
|----------------------------|----|
| 绪论 .....                   | 1  |
| 思考题 .....                  | 2  |
| <b>第1章 静力学基础</b> .....     | 3  |
| 1.1 静力学的基本概念 .....         | 3  |
| 1.2 静力学的基本公理 .....         | 4  |
| 1.3 约束与约束力 .....           | 6  |
| 1.4 物体的受力分析和受力图 .....      | 9  |
| 思考题 1 .....                | 14 |
| 习题 1 .....                 | 15 |
| <b>第2章 平面简单力系</b> .....    | 17 |
| 2.1 平面汇交力系的合成与平衡 .....     | 17 |
| 2.2 平面力对点之矩的概念和计算 .....    | 20 |
| 2.3 平面力偶的合成与平衡 .....       | 22 |
| 思考题 2 .....                | 25 |
| 习题 2 .....                 | 26 |
| <b>第3章 平面任意力系</b> .....    | 28 |
| 3.1 平面任意力系的合成与平衡 .....     | 28 |
| 3.2 平面任意力系的简化结果分析 .....    | 31 |
| 3.3 平面任意力系的平衡条件和平衡方程 ..... | 34 |
| 3.4 物体系统的平衡·静定和超静定 .....   | 37 |
| 3.5 考虑摩擦的平衡问题 .....        | 43 |
| 思考题 3 .....                | 49 |
| 习题 3 .....                 | 51 |
| <b>第4章 空间力系</b> .....      | 56 |
| 4.1 空间力的投影与分解 .....        | 56 |
| 4.2 力对点之矩和力对轴之矩 .....      | 58 |
| 4.3 空间力系的平衡 .....          | 61 |
| 4.4 重心 .....               | 65 |
| 思考题 4 .....                | 69 |

|                            |            |
|----------------------------|------------|
| 习题4 .....                  | 70         |
| <b>第5章 材料力学的基本概念 .....</b> | <b>73</b>  |
| 5.1 变形固体基本假设 .....         | 73         |
| 5.2 内力 截面法 .....           | 74         |
| 5.3 应力与应变 .....            | 75         |
| 5.4 杆件变形的基本形式 .....        | 76         |
| 思考题5 .....                 | 78         |
| 习题5 .....                  | 78         |
| <b>第6章 轴向拉伸与压缩 .....</b>   | <b>80</b>  |
| 6.1 概述 .....               | 80         |
| 6.2 轴力和轴力图 .....           | 80         |
| 6.3 轴向拉压杆横截面上的应力 .....     | 82         |
| 6.4 轴向拉压杆的变形与胡克定律 .....    | 84         |
| 6.5 材料在拉伸与压缩时的力学性能 .....   | 88         |
| 6.6 轴向拉压杆的强度计算 .....       | 93         |
| 6.7 剪切与挤压的实用计算 .....       | 97         |
| 思考题6 .....                 | 101        |
| 习题6 .....                  | 101        |
| <b>第7章 圆轴扭转 .....</b>      | <b>104</b> |
| 7.1 概述 .....               | 104        |
| 7.2 外力偶矩的计算及扭矩与扭矩图 .....   | 104        |
| 7.3 圆轴扭转时横截面上的应力 .....     | 107        |
| 7.4 圆轴扭转时的强度计算 .....       | 111        |
| 7.5 圆轴扭转时的变形与刚度计算 .....    | 111        |
| 思考题7 .....                 | 114        |
| 习题7 .....                  | 114        |
| <b>第8章 梁弯曲时的强度计算 .....</b> | <b>116</b> |
| 8.1 概述 .....               | 116        |
| 8.2 梁的剪力与弯矩 剪力图与弯矩图 .....  | 117        |
| 8.3 横截面的几何性质 .....         | 126        |
| 8.4 纯弯曲时梁的正应力 .....        | 129        |
| 8.5 弯曲正应力强度条件 .....        | 132        |
| 8.6 梁的切应力计算 .....          | 136        |
| 8.7 提高梁承载能力的措施 .....       | 140        |
| 思考题8 .....                 | 143        |
| 习题8 .....                  | 144        |
| <b>第9章 梁弯曲时的刚度计算 .....</b> | <b>148</b> |

|                           |            |
|---------------------------|------------|
| 9.1 挠曲线近似微分方程             | 148        |
| 9.2 计算梁位移的积分法             | 150        |
| 9.3 计算梁位移的叠加法             | 153        |
| 9.4 简单超静定梁                | 155        |
| 9.5 梁的刚度条件与合理刚度设计         | 157        |
| 9.6 提高梁刚度的措施              | 159        |
| 思考题 9                     | 160        |
| 习题 9                      | 161        |
| <b>第 10 章 应力状态分析和强度理论</b> | <b>163</b> |
| 10.1 应力状态概述               | 163        |
| 10.2 平面应力状态分析——解析法        | 166        |
| 10.3 平面应力状态分析——应力圆法       | 169        |
| 10.4 三向应力状态分析简介           | 171        |
| 10.5 广义胡克定律               | 172        |
| 10.6 强度理论                 | 174        |
| 思考题 10                    | 178        |
| 习题 10                     | 179        |
| <b>第 11 章 组合变形</b>        | <b>182</b> |
| 11.1 组合变形的概念              | 182        |
| 11.2 拉伸（压缩）与弯曲的组合变形       | 182        |
| 11.3 扭转与弯曲的组合变形计算         | 187        |
| 思考题 11                    | 190        |
| 习题 11                     | 191        |
| <b>第 12 章 压杆的稳定问题</b>     | <b>193</b> |
| 12.1 稳定性的概念               | 193        |
| 12.2 细长压杆的临界载荷            | 194        |
| 12.3 临界应力总图               | 196        |
| 12.4 压杆的稳定性计算             | 199        |
| 12.5 提高压杆稳定性的措施           | 202        |
| 思考题 12                    | 203        |
| 习题 12                     | 203        |
| <b>附录</b>                 | <b>205</b> |
| 附录 A 型钢规格表                | 205        |
| 附录 B 梁在简单载荷作用下的变形         | 218        |
| <b>参考文献</b>               | <b>221</b> |

# 绪 论

## 1. 工程力学的研究内容

工程力学所研究的内容较为广泛，在工程技术领域有着广泛、最基础的应用。无论是古代社会手工业发展的需求，还是近现代社会科学技术的发展，以及新世纪高科技领域日新月异，无一不是在力学知识的累积、应用、完善和指导下不断发展完善的，并形成许许多多与力学有关的交叉学科。本书所要研究的内容包含静力学和材料力学两部分，主要研究物体的受力分析、平衡条件和构件的强度、刚度和稳定性，亦即构件受力后能否满足强度、刚度和稳定性的要求。

静力学研究物体在力系作用下的平衡规律。平衡是指物体相对于惯性参考系处于静止或匀速直线运动状态。

在静力学这一部分中，将研究三个方面的问题：

- (1) 物体的受力分析 分析物体的受力情况，每个力的大小、方向和作用位置。
- (2) 力系的简化 用一个简单力系等效地代替一个复杂的力系。
- (3) 力系的平衡条件 研究作用在物体上的各种力系平衡时所需满足的平衡条件。

静力学侧重于研究物体的外力及外力之间的平衡关系，为研究的方便可以将研究对象简化为刚体。所谓刚体，是指受力后其内部任意两点之间的距离保持不变。刚体是一个理想化的力学模型。

材料力学研究构件在外力作用下的变形、受力与破坏的规律，为选择合适的构件材料、合理设计构件截面形状和尺寸提供有关强度、刚度与稳定性分析的基本理论和设计方法。

强度要求是指构件应有足够的抵抗破坏的能力，即在外力作用下不发生不可恢复的塑性变形或断裂。

刚度要求是指构件应有足够的抵抗变形的能力，即指构件在外力作用下不产生过量的弹性变形。

稳定性要求是指构件应有足够的保持原有平衡状态的能力，即在某种外力作用下，其平衡形式不发生突然转变。

材料力学在研究问题时侧重于力与变形的关系，事实上构件受力后都会发生变形，所以此时研究对象为变形体。

## 2. 工程力学的研究方法

工程力学与工程实践紧密结合，在解决工程实践问题时，首先从实践出发，观察生活和生产中的各种现象，进行实验、分析、综合和归纳，得到基本定律和理论；然后将理论用于生产实际，解决工程中的力学问题。一般工程问题处理时，先建立力学模型，再建立数学模型，然后进行计算、解题，看结果是否与实际情况相符，如相符，工程问题得以解决。

在研究工程问题时可以用理论分析方法、实验分析方法和计算机分析方法来求解答案。随着计算机技术和数值计算方法的发展，计算机分析方法已经成为力学分析中非常重要的手段，从而可解决更为复杂的工程问题。

在课程的学习过程中，要留意生活、生产中的力学现象和问题，对理论、公式和定理内容理解要透彻，应用条件和应用范围要清晰，要多看、多做、多练，熟能生巧，掌握本课程的学习要求，解决工程实际问题，并为后继课程的学习打下良好的基础。

### 思 考 题

- 0-1 平衡状态一定是静止状态？
- 0-2 匀速运动的物体处于平衡状态？
- 0-3 在任何情况下，刚体体内任意两点距离保持不变。
- 0-4 构件要正常完成工作，需满足哪几个方面的要求？

# 第 1 章 静力学基础

## 1.1 静力学的基本概念

力是物体间相互的机械作用，这种作用使物体的机械运动状态发生变化。力对物体产生的效应一般可分为两个方面：一是物体运动状态的改变，称为力的运动效应；另一个是物体形状的改变，称为力的变形效应。例如运动员打排球时，手对排球的作用力使排球的运动状态和形状都发生变化。静力学研究力的运动效应，运动效应也称外效应。静力学研究的物体只限于刚体，故又称刚体静力学。所谓刚体是一个理想化的力学模型，在力的作用下其内部任意两点之间的距离始终保持不变。

实践证明，力对物体的作用效果取决于力的三个要素：①力的大小；②力的方向；③力的作用点。所以可用一个矢量来表示力的三个要素，如图 1-1 所示。力的大小就是这一矢量的长度（ $AB$ ，按一定的比例尺）；力的方向就是矢量的方向；矢量的始端（点  $A$ ，有时是终点）表示力的作用点。矢量  $\overrightarrow{AB}$  所沿着的直线（图 1-1 上的虚线）表示力的作用线。常用加粗字体的字母  $\mathbf{F}$  表示力的矢量，而用普通字母  $F$  表示力的大小。若以  $\mathbf{F}^\circ$  表示沿矢量  $\mathbf{F}$  方向的单位矢（图 1-2），则力矢  $\mathbf{F}$  可写成

$$\mathbf{F} = F\mathbf{F}^\circ$$

即力的矢量可以用它的模（即力的矢量大小）和单位矢量的乘积表示。

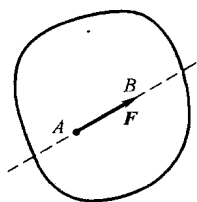


图 1-1 力矢量

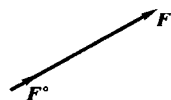


图 1-2 力矢量、单位矢量

在国际单位制（SI）中，以“N”作为力的单位符号，称为牛[顿]。有时也以“kN”作为力的单位符号，称为千牛[顿]。

力系是指作用于物体上的一群力。

如果作用在物体上的两个力系对物体的作用效果相同，则这两个力系为等效力系。

如果力系作用在物体上，物体仍保持平衡状态，则这个力系为平衡力系。

如果力系各力的作用线交于一点，则这个力系为汇交力系。

如果力系各力的作用线在同一个平面内，则这个力系为平面力系。

如果力系各力的作用线互相平行，则这个力系为平行力系。

如果力系没有上述特征，这个力系就是一个最一般的力系，为空间力系。



## 1.2 静力学的基本公理

公理是符合客观实际的最普遍、最一般的规律。它是人们在生活和生产实践中长期积累的经验的总结，又经过实践检验是正确的。

### 公理1 力的平行四边形规则

作用在物体上同一点的两个力，可以合成为一个合力。合力的大小和方向，由这两个力为边构成的平行四边形的对角线确定，合力的作用点在同一点如图 1-3a 所示，合力矢量等于这两个力矢量的几何和，即

$$\mathbf{F}_R = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 \quad (1-1)$$

应用此公理可以求两汇交力合力的大小和方向。在求解时常作力三角形，在任一点  $O$ ，顺序画出力矢量  $\mathbf{F}_1$  和  $\mathbf{F}_2$  为三角形的两个边，则三角形的第三边  $\mathbf{F}_R$  就是合力矢量，合力的作用点仍在原力汇交点，如图 1-3b、c 所示。

### 公理2 二力平衡条件

作用在刚体上的两个力，使刚体保持平衡的必要和充分条件是这两个力的大小相等、方向相反，且在同一直线上，如图 1-4 所示，即

$$\mathbf{F}_1 = -\mathbf{F}_2 \quad (1-2)$$

这个公理表明了作用于刚体上的最简单的力系平衡时所必须满足的条件。

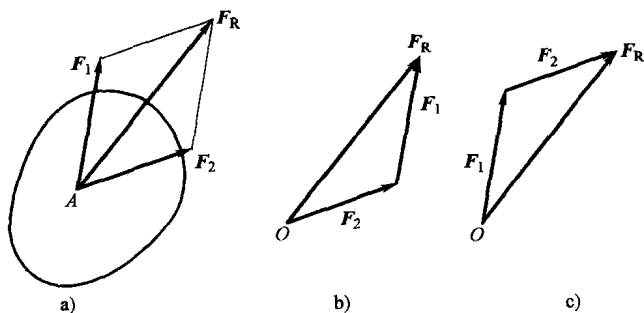


图 1-3 力的合成

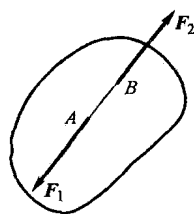


图 1-4 二力平衡

### 公理3 加减平衡力系公理

在已知力系上加上或减去任意的平衡力系，并不改变原力系对刚体的作用，如图 1-5 所示，即，如果两个力系只相差一个或几个平衡力系，则它们对刚体的作用是相同的，因此可以等效替换。这个公理是研究力系等效变换的重要依据。

根据上述公理可以导出下列两个推论：

#### 推论1 力的可传性

作用于刚体上某点的力，可以沿着它的作用线移到刚体内任意一点，并不改变该力对刚体的作用。

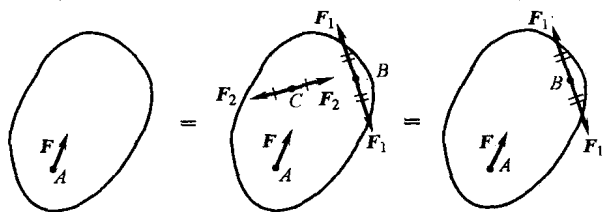


图 1-5 加减平衡力系公理

如图 1-6a 所示, 设力  $F$  作用在刚体上  $A$  点。根据加减平衡力系原理, 可在力的作用线上任取一点  $B$ , 在点  $B$  加上两个相互平衡的力  $F_1$  和  $F_2$ , 使  $F = F_2 = -F_1$ , 如图 1-6b 所示。由于力  $F$  和  $F_1$  也是一个平衡力系, 故可同时去掉, 这样只剩下一个力  $F_2$ , 如图 1-6c 所示。于是, 原来的这个点  $A$  处力  $F$  与力系 ( $F$ 、 $F_1$ 、 $F_2$ ) 以及点  $B$  处力  $F_2$  均等效, 即原来的  $A$  点处力  $F$  沿其作用线移到了  $B$  点。

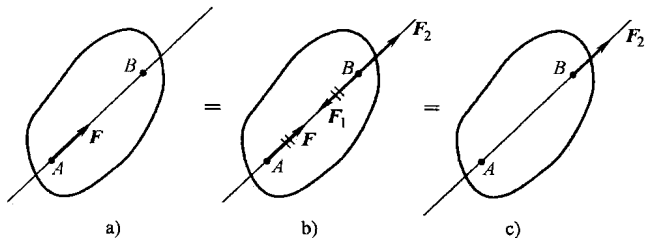


图 1-6 力的可传性

由此可见, 力的作用线取代力的作用点成为决定力的作用效应的要素。因此, 作用于刚体上的力的三要素是: 力的大小、力的方向和力的作用线。力矢量是滑动矢量。

### 推论 2 三力平衡汇交定理

作用于刚体上三个相互平衡的力, 若其中两个力的作用线汇交于一点, 则这三个力必在同一平面内, 且第三个力的作用线通过汇交点。

如图 1-7 所示, 在刚体的  $A$ 、 $B$ 、 $C$  三点上, 分别作用三个相互平衡的力  $F_1$ 、 $F_2$ 、 $F_3$ 。  $F_1$  和  $F_2$  的作用线交于  $O$  点。根据力的可传性, 将力  $F_1$  和  $F_2$  移到汇交点  $O$ ,  $F_1$  和  $F_2$  合成得一合力  $F_{12}$ , 则力  $F_3$  应与  $F_{12}$  平衡。由于两个力平衡必须共线, 所以力  $F_3$  必定与力  $F_1$  和  $F_2$  共面, 且通过力  $F_1$  与  $F_2$  的交点  $O$ 。

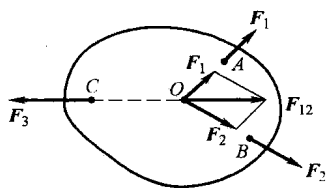


图 1-7 三力平衡汇交

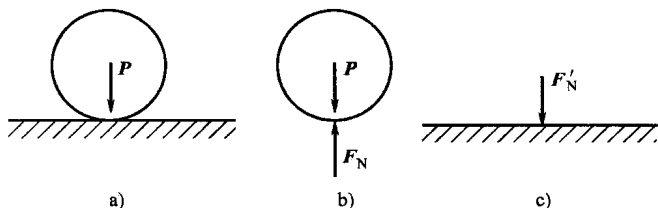


图 1-8 作用力和反作用力

### 公理 4 作用和反作用定律

作用力和反作用力总是同时存在, 两力的大小相等、方向相反, 且沿着同一直线, 分别作用在两个相互作用的物体上。

这个公理概括了物体间相互作用的关系, 表明作用力和反作用力总是成对出现的。

如图 1-8a 所示, 放置在桌面上的重物, 受重力  $P$  和桌面的约束力  $F_N$  的作用 (见图 1-8b)。重力  $P$  是地球对重物的吸引力, 作用在重物上; 同时, 重物对地球也有一个吸引力  $P'$  作用在地球上, 这两个力是作用力和反作用力, 两者等值、反向、共线, 即  $P = -P'$ 。此外, 重物对桌面也作用压力  $F_N'$ , 其中力  $F_N$  与  $F_N'$  是作用力与反作用力关系, 即  $F_N = -F_N'$ 。作用力和反作用力用同一字母表示, 但其中之一, 在字母的上方加一 “'” (见图 1-8c)。

作用力和反作用力大小相等、方向相反, 且沿着同一直线, 但它们不是一对平衡力, 因为作用力与反作用力分别作用在两个物体上。

### 公理 5 刚化原理

变形体在某一力系作用下处于平衡，如将此变形体刚化为刚体，其平衡状态保持不变。

如图 1-9 所示，绳索在等值、反向、共线的两个拉力作用下处于平衡，如将绳索刚化成刚体，其平衡状态保持不变。反之则不一定成立。由此可见，刚体的平衡条件是变形体平衡的必要条件，而非充分条件。

静力学全部理论都建立在上述五个公理上。

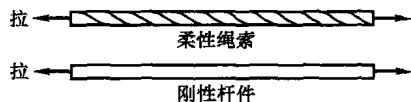


图 1-9 刚化公理

## 1.3 约束与约束力

放飞的气球在空中任意飘动，它们在空间的位移不受任何限制。位移不受限制的物体称为自由体。如小孩牵着气球，则气球不能沿绳索方向向外飞行，此时气球的一个方向上位移受到限制。位移受到限制的物体称为非自由体。对非自由体的某些位移起限制作用的周围物体称为约束。例如，细绳对于气球，轴承对于机床主轴，铁轨对于机车，钢索对于重物等，都是约束。

约束阻碍了物体的位移，是由于在限制的位移方向上产生了阻碍其运动的力，这种力称为约束力，简称反力。约束力的方向必与该约束所能够阻碍的位移方向相反。用这个规则，可以确定约束力的方向或作用线的位置。约束力的大小则是未知的，可用平衡条件求出未知的约束力。如图 1-8b 所示，重物向下的位移被桌面阻碍了，桌面对重物来讲就是约束，重物不能向下运动，是由于  $F_N$  作用的结果， $F_N$  就是约束力， $F_N$  的方向竖直向上。

下面介绍几种在工程中常遇到的约束类型和确定约束力方向的方法。

### 1.3.1 具有光滑接触表面的约束

如图 1-10 所示，重物放置在光滑的支承面上，不计摩擦的接触面等都属于光滑接触面约束。再如，支持物体的固定面（见图 1-10）、啮合齿轮的齿面（见图 1-11）、机床中的导轨接触面等，当摩擦忽略不计，都属于这类约束。

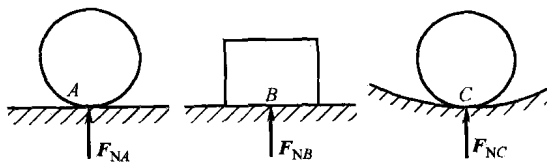


图 1-10 光滑接触表面——固定面

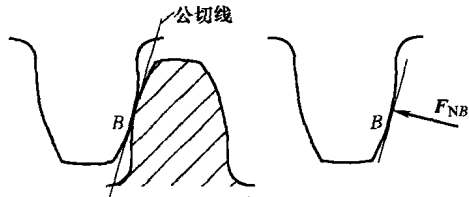


图 1-11 光滑接触表面——齿轮啮合面

光滑接触面约束只能阻碍物体沿接触表面法线方向并向约束内部的位移，而不能限制物体沿约束表面切线方向的位移。因此，光滑接触面对物体的约束力，作用在接触点处，方向沿接触表面的公法线方向，并指向受力物体。这种约束力称为法向约束力，通常用  $F_N$  表示，如图 1-10 所示的  $F_{NA}$ 、 $F_{NB}$ 、 $F_{NC}$  和图 1-11 所示的  $F_{NB}$  等。

### 1.3.2 由柔软的绳索、链条或胶带等构成的约束

如图 1-12a 所示, 绳索吊住重物。由于绳索本身只能承受拉力 (见图 1-12b), 所以它对物体的约束力也只可能是拉力 (见图 1-12c)。绳索对物体的约束力, 作用在接触点, 方向沿着绳索背离物体。通常用  $F$  或  $F_T$  表示这类约束力。

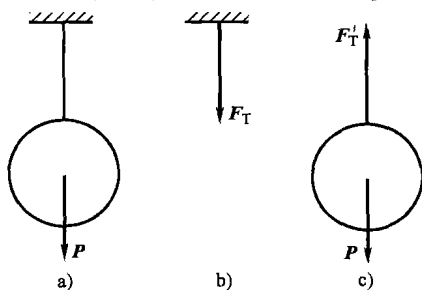


图 1-12 绳索拉力

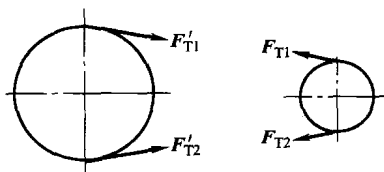


图 1-13 链条拉力

胶带或链条也都只能承受拉力。当它们绕在轮子上, 对轮子的约束力沿轮缘的切线方向 (见图 1-13)。

### 1.3.3 光滑铰链约束

光滑铰链约束有向心轴承、圆柱形铰链和固定铰链支座等。

#### 1. 向心轴承 (径向轴承)

图 1-14a 所示为轴承装置, 简图如图 1-14b 所示。轴可在轴承孔内任意转动, 也可沿轴承孔的中心线移动。但是, 轴承阻碍着轴沿径向向外的位移。忽略摩擦, 当轴和轴承在某点  $A$  光滑接触时, 轴承对轴的约束力  $F_A$  作用在接触点  $A$ , 且沿公法线方向指向轴心, 其受力如图 1-14b 所示。

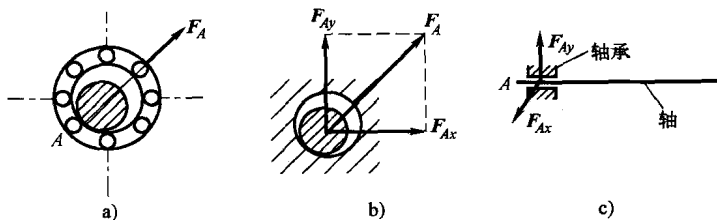


图 1-14 向心轴承约束

轴所受的主动力方向的不同, 轴和孔的接触点的位置也不同。所以, 当主动力尚未确定时, 约束力的方向暂不能确定。然而, 无论约束力朝向何方, 它的作用线必垂直于轴线并通过轴心。因此, 约束力  $F_A$ , 通常可用通过轴心的两个大小未知的正交分力  $F_{Ax}$ 、 $F_{Ay}$  来表示, 如图 1-14c 所示,  $F_{Ax}$ 、 $F_{Ay}$  的指向暂可任意假定。

#### 2. 圆柱铰链和固定铰链支座

图 1-15a 所示的拱形结构是由两个拱形构件通过圆柱铰链  $C$  以及固定铰链支座  $A$  和  $B$  连接而成。圆柱铰链简称铰链, 构件 I 和构件 II 的  $C$  处钻有同样大小的孔, 两个构件由销钉  $C$

连接在一起 (见图 1-15c), 其简图如图 1-15a 所示的铰链  $C$ 。如果铰链连接中有一个构件固定在地面或机架上作为支座, 则这种约束称为固定铰链支座, 简称固定铰支座, 如图 1-15c 所示的支座  $A$ 、 $B$ , 其简图如图 1-15a 所示的固定铰链支座  $A$  和  $B$ 。

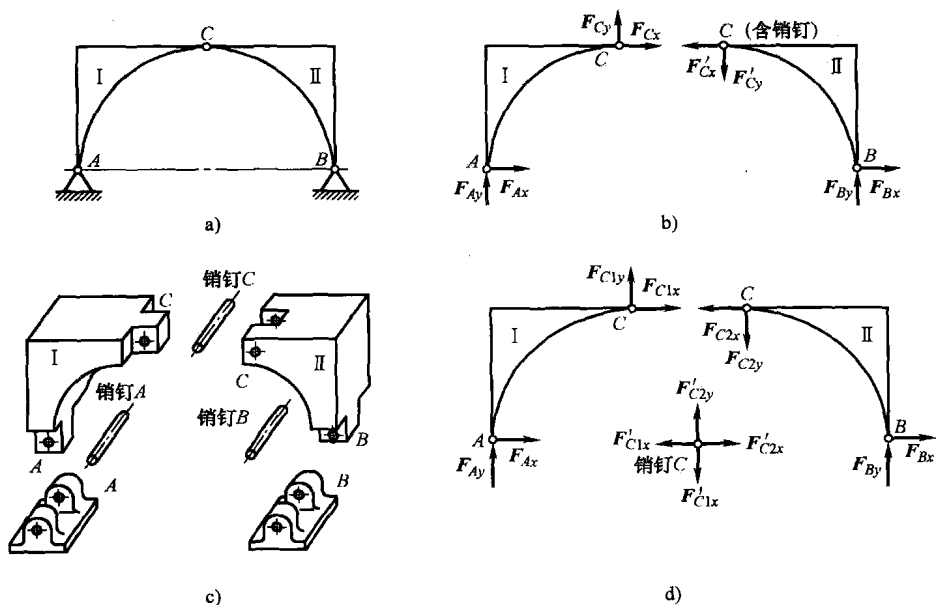


图 1-15 圆柱铰链约束

在分析铰链  $C$  处的约束力时, 可以把销钉  $C$  固连在其中任意一个构件上, 也可单独研究。如果把销钉  $C$  固连在构件  $I$  和  $II$  上, 则构件  $I$ 、 $II$  (含销钉  $C$ ) 互为约束。显然, 当忽略摩擦时, 构件  $II$  (含销钉  $C$ ) 上的销钉与构件  $I$  的结合实际上是轴与光滑孔的配合问题。因此, 它与轴承具有同样的约束性质, 即约束力的作用线不能预先定出, 但约束力垂直轴线并通过铰链中心, 故也可用两个大小未知的正交分力  $F_{Cx}$ 、 $F_{Cy}$  和  $F'_{Cx}$ 、 $F'_{Cy}$  来表示, 如图 1-15b 所示。其中  $F_{Cx} = -F'_{Cx}$ ,  $F_{Cy} = -F'_{Cy}$ , 表明它们互为作用力与反作用力关系。

当需要分析销钉  $C$  的受力时, 可以把销钉分离出来单独研究。这时, 销钉  $C$  将同时受到构件  $I$ 、 $II$  上的孔对它的反作用力。其中  $F_{C1x} = -F'_{C1x}$ ,  $F_{C1y} = -F'_{C1y}$ , 为构件  $I$  与销钉  $C$  的作用力和反作用力; 又  $F_{C2x} = -F'_{C2x}$ ,  $F_{C2y} = -F'_{C2y}$ , 则为构件  $II$  与销钉  $C$  的作用力和反作用力。销钉  $C$  所受到的约束力如图 1-15d 所示。

当将销钉  $C$  与构件  $II$  固连为一体时,  $F_{C2x}$  与  $F'_{C2x}$ ,  $F_{C2y}$  与  $F'_{C2y}$  为作用在同一刚体上的成对的平衡力, 可以消去不画。此时, 力的下角不必再区分为  $C_1$  和  $C_2$ , 铰链  $C$  处的约束力仍如图 1-15b 所示。

同理, 把销钉固连在  $A$  或  $B$  支座上, 则固定铰支座  $A$ 、 $B$  对构件  $I$ 、 $II$  的约束力分别为  $F_{Ax}$ 、 $F_{Ay}$  与  $F_{Bx}$ 、 $F_{By}$ , 如图 1-15b 所示。

上述三种约束都可表示为光滑铰链约束。此类约束的特点是只限制两物体径向的相对移动, 而不限两物体绕铰链中心的相对转动及沿轴向的位移。

### 3. 滚动支座

如图 1-16a 所示的结构中,  $A$  端为固定铰支座,  $B$  端则在铰链支座与光滑支承面之间装

上几个滚轴,成为滚动支座约束,如图1-16b所示。在桥梁、屋架等结构中经常采用滚动支座约束,它可以沿支承面移动,当温度变化时,允许结构跨度自由伸长或缩短,其简图如图1-16c所示。显然,滚动支座只限制沿接触面的法线方向运动,约束性质与光滑面约束相同,其约束力必垂直于支承面,且通过铰链中心。通常用 $F_N$ 和其支座名称表示其法向约束力,如图1-16d所示。

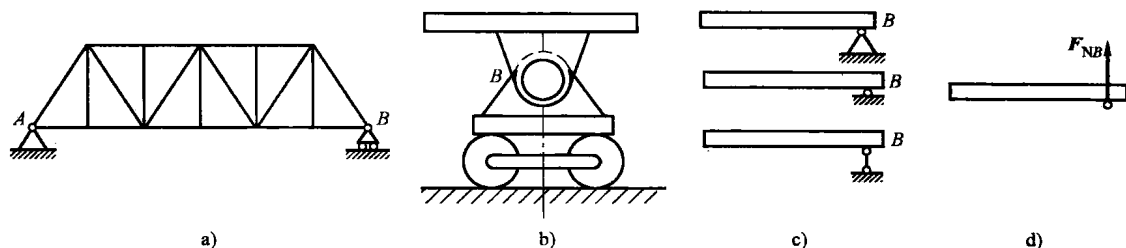


图 1-16 滚动支座约束

### 1.3.4 其他约束

#### 1. 推力轴承

推力轴承除能限制轴的径向位移以外,还能限制轴沿轴向的位移。因此,它比径向轴承多一个沿轴向的约束力,即其约束力有三个正交分量 $F_{Ax}$ 、 $F_{Ay}$ 、 $F_{Az}$ 。轴向约束力的具体方向,由推力轴承所阻碍的运动方向决定。推力轴承的简图及其约束力如图1-17所示。

#### 2. 球铰链

汽车的变速操纵杆连接处,收音机的天线与机壳的连接,都属于球铰链约束。这类约束是通过圆球和球壳将两个构件连接在一起的,如图1-18a所示。在这类约束中,构件可绕球心任意转动,但不能有沿球心任何方向的位移。若忽略摩擦,其约束力应是通过球心但方向不能预先确定的一个空间力,可用三个正交分力 $F_{Ax}$ 、 $F_{Ay}$ 、 $F_{Az}$ 表示,其简图及约束力如图1-18b所示。

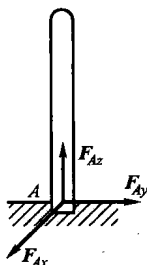


图 1-17 推力轴承约束

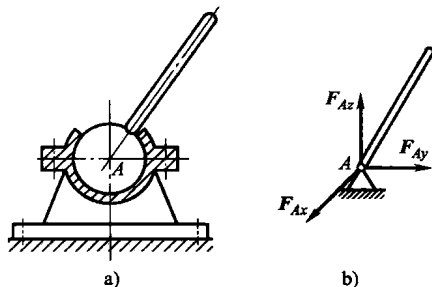


图 1-18 球铰链约束

## 1.4 物体的受力和受力图

在工程实际中,为了求解力学问题,必须对物体进行受力分析。受力分析就是要确定物

体受哪几个力作用，每个力的作用位置和力的作用方向，这种分析过程称为物体的受力分析。

作用在物体上的力可分为两类：一类是主动力，例如：物体的重力、风力、气体压力等，一般是已知的；另一类是约束对于物体的约束力，为未知的被动力。

在对物体进行受力分析时，把要研究的物体从周围的物体中分离出来，并画出其简图，这个步骤称为取研究对象或取分离体。然后把其他各物体对研究对象的作用力（包括主动力和约束力）全部画出来，这种表示物体受力的简明图形，称为受力图。画物体受力图是解决力学问题的一个重要步骤。下面举例说明。

**例 1-1** 用力  $F$  拉动滚子时受到一凸台的阻碍，滚子重为  $P$ ，如图 1-19a 所示。不计摩擦，试画出滚子的受力图。

**解：**取滚子为研究对象，画出其简图。

**受力分析：**滚子受到主动力  $F$  和重力  $P$  的作用，光滑接触面  $A$  处的约束力垂直地面，光滑接触面  $B$  处的约束力垂直圆弧表面，通过圆心。受力图如图 1-19b 所示。

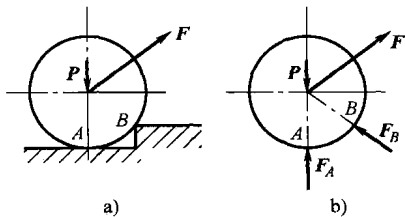


图 1-19 例 1-1 图

**例 1-2** 均质圆柱重为  $P$ ，由杆  $AB$ 、绳索与墙壁来支承，如图 1-20a 所示。杆重及摩擦不计。试分别画出圆柱和杆  $AB$  的受力图。

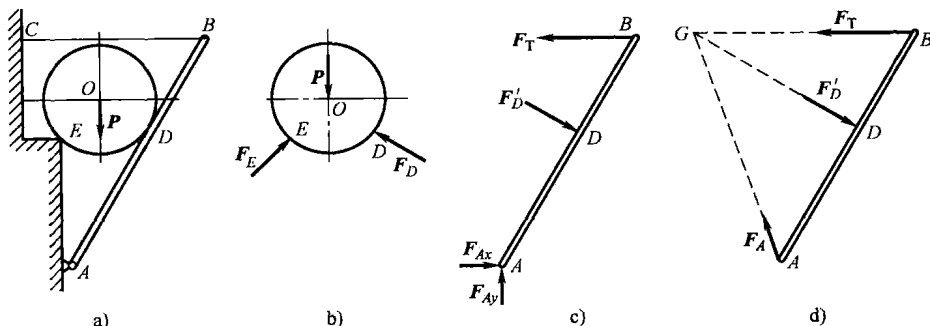


图 1-20 例 1-2 图

**解：**取圆柱  $O$  为研究对象。

**受力分析：**圆柱受到重力  $P$  的作用，光滑接触面  $D$  处的约束力垂直杆  $AB$ ，光滑接触面  $E$  处的约束力垂直圆弧表面，通过圆心  $O$ ，受力图如图 1-20b 所示。

取杆  $AB$  为研究对象。

**受力分析：**杆  $AB$  受到圆柱  $D$  处的约束力  $F_D'$ ，在  $B$  处受到绳子拉力  $F_T$  的作用，沿水平方向。 $A$  端为固定铰支座约束，约束力为两个正交的力  $F_{Ax}$ 、 $F_{Ay}$ ，受力图如图 1-20c 所示。本题  $A$  处的受力可以进一步简化， $A$  处的约束力  $F_A$  作用线一定通过  $F_D'$  和  $F_T$  力的作用线交点  $G$ ，受力图如图 1-20d 所示。

**例 1-3** 梁  $AB$  如图 1-21a 所示， $A$  端为固定铰支座约束， $B$  端为滚轴支座约束，支承平面与水平面夹角为  $30^\circ$ 。梁中点  $C$  处作用力为  $F$ ，不计梁的自重，画出梁的受力图。

**解：**取梁为研究对象。

受力分析：梁受到主动力  $F$  的作用， $A$  端为固定铰支座约束，其约束力为两个正交的力  $F_{Ax}$ 、 $F_{Ay}$ 。 $B$  端为滚动支座约束，其约束力垂直支承平面，方向斜向上。受力图如图 1-21b 所示。本题  $A$  处的受力可以进一步简化， $A$  处的约束力作用线一定通过  $F$  和  $F_B$  力的作用线交点  $E$ ，受力图如图 1-21c 所示。

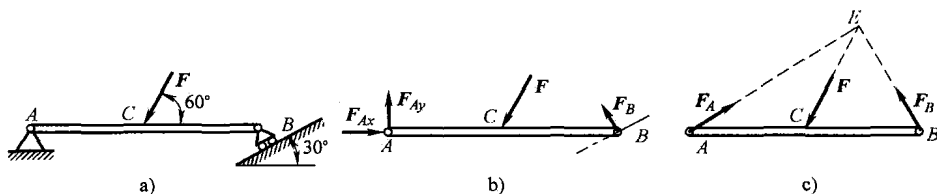


图 1-21 例 1-3 图

**例 1-4** 如图 1-22a 所示的三铰拱桥，由左、右两拱铰接而成。设各拱自重不计，在拱  $AC$  上作用有载荷  $F$ 。试分别画出拱  $AC$ 、 $CB$  和整体系统的受力图。

**解：**(1) 取拱  $BC$  为研究对象。

受力分析：拱  $BC$  上没有主动力并不计自重，且只在  $B$ 、 $C$  两处受到铰链约束，因此拱  $BC$  为二力构件。二力构件是指只在两个力作用下平衡的构件，也称二力杆。 $BC$  在铰链中心  $B$ 、 $C$  处分别受  $F_{BC}$ 、 $F_{CB}$  两力的作用，且  $F_{BC} = -F_{CB}$ ，这两个力的方向如图 1-22b 所示。

(2) 取拱  $AC$  为研究对象。

受力分析：拱  $AC$  上有主动力  $F$ ，不计自重，在铰链  $C$  处受拱  $BC$  给它的约束力  $F'_{CB}$  的作用。根据作用和反作用定律， $F'_{CB} = -F_{CB}$ 。拱在  $A$  处受有固定铰支给它的约束力  $F_A$  的作用，由于方向未定，可用两个大小未知的正交分力  $F_{Ax}$  和  $F_{Ay}$  代替。受力图如图 1-22c 所示。

进一步分析可知，由于拱  $AC$  在  $F$ 、 $F_A$  和  $F'_{CB}$  三个力作用下平衡，故可根据三力平衡汇交推论，确定铰链  $A$  处约束力  $F_A$  的方向。点  $E$  为力  $F$  和  $F'_{CB}$  作用线的交点，当拱  $AC$  平衡时，约束力  $F_A$  的作用线必通过点  $E$ ，受力图如图 1-22d 所示。至于  $F_A$  的指向，可以先假设，以后由平衡条件确定。

(3) 取整体系统为研究对象。

受力分析：整体系统上有主动力  $F$ ，在固定铰链支座  $A$  处有固定铰支给它的约束力  $F_A$  的作用，在固定铰链支座  $B$  处有固定铰支给它的约束力  $F_{BC}$  的作用，铰链  $C$  为系统内部约束，此处的约束力在整体系统受力图上不表达出来。受力图如图 1-22a 所示。要注意的是，不同研究对象受力图上同一处的约束力表达形式应一致，如图 1-22a、图 1-22d 的  $A$  处及图 1-22a、图 1-22b 的  $B$  处，约束力表达形式是一致的。

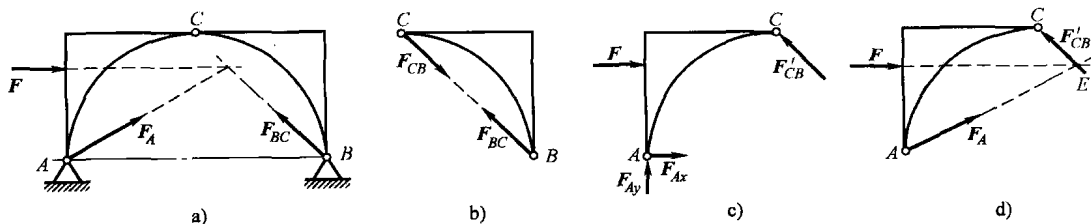


图 1-22 例 1-4 图



**例 1-5** 如图 1-23a 所示系统由杆  $AC$ 、 $BD$ 、 $CD$ 、轮  $G$  和绳索组成。 $A$  端为固定端支座约束， $B$  端为固定铰支座约束。试分别画出杆  $CD$ 、 $BD$ 、 $AC$ 、轮  $G$ 、杆  $BD +$  轮  $G$  及整体的受力图。不计各杆自重。

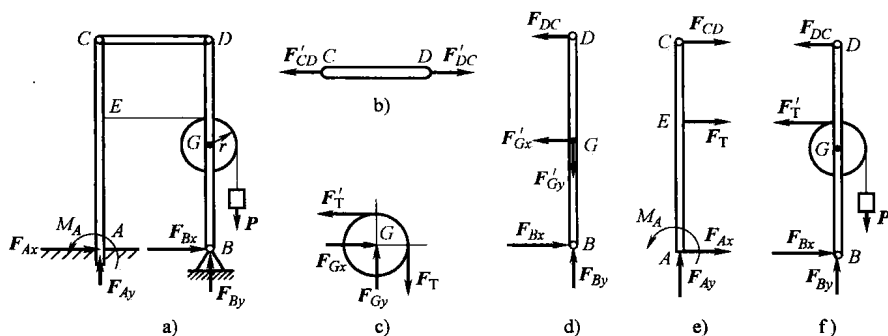


图 1-23 例 1-5 图

**解：**(1) 取杆  $CD$  为研究对象。

受力分析：杆  $CD$  为二力杆，假设此二力杆受拉，其两端画上拉力  $F'_{DC}$ 、 $F'_{CD}$ ，如图 1-23b 所示。

(2) 取轮  $G$  为研究对象。

受力分析：轮  $G$  的上侧和右侧有绳索约束，因此在上侧和右侧有绳索约束力  $F_T$ ，轮  $G$  中心为中间铰链约束，有两个正交的约束力  $F_{Gx}$ 、 $F_{Gy}$ ，受力图如图 1-23c 所示。

(3) 取杆  $BD$  为研究对象。

受力分析：杆  $BD$  上端与  $CD$  杆  $D$  处是中间铰链约束，杆  $CD$  为二力杆，所以  $D$  处的约束力为二力杆对它的拉力  $F_{DC}$ ，它与  $F'_{DC}$  是一对作用力和反作用力。杆  $BD$  中间与轮  $G$  为中间铰链约束，其约束力为  $F'_{Gx}$ 、 $F'_{Gy}$ ，它们与  $F_{Gx}$ 、 $F_{Gy}$  也是一对作用力和反作用力。杆  $BD$  下端  $B$  处为固定铰支座约束，有两个正交的约束力  $F_{Bx}$ 、 $F_{By}$ ，受力图如图 1-23d 所示。

(4) 取杆  $AC$  为研究对象。

受力分析：杆  $AC$  上端与  $CD$  杆  $C$  处是中间铰链约束，杆  $CD$  为二力杆，所以  $C$  处的约束力为二力杆对它的拉力  $F_{CD}$ ，它与  $F'_{CD}$  是一对作用力和反作用力。杆  $AC$  中间为绳索约束，有绳索对他的约束力  $F_T$ ，它与轮  $G$  上侧的绳索约束力  $F'_T$  是一对作用力和反作用力。杆  $AC$  下端  $A$  处为固定端支座约束，有两个正交的约束力  $F_{Ax}$ 、 $F_{Ay}$  和一个约束力偶  $M_A$ 。受力图如图 1-23e 所示。

(5) 取杆  $BD +$  轮  $G$  为研究对象。

受力分析：杆  $BD$  上端与  $CD$  杆  $D$  处是中间铰链约束，杆  $CD$  为二力杆，所以  $D$  处的约束力为二力杆对它的拉力  $F_{DC}$ ，它与  $F'_{DC}$  是一对作用力和反作用力。杆  $BD$  中间轮  $G$  上侧和右侧有绳索约束，其约束力均为  $F'_T$ 。杆  $BD$  中间与轮  $G$  中间是中间铰链约束，但对杆  $BD +$  轮  $G$  这个研究来说，它们是内部约束，其相互间的约束力  $F_{Gx}$ 、 $F_{Gy}$ 、 $F'_{Gx}$ 、 $F'_{Gy}$  平衡，因此不