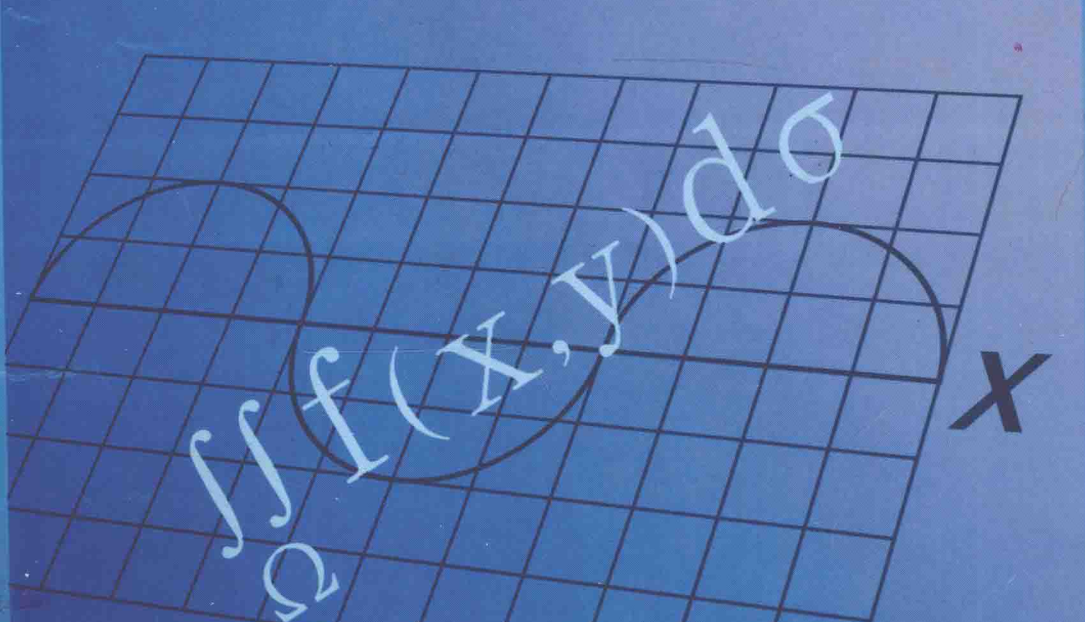
# 医用高等数学

## 学习辅导

主编 张若东 潘淑霞



高等医学院校配套辅导教材

# 医用高等数学学习辅导

主　编　张若东　潘淑霞

副主编　郇志艳　吴　希　卢敦敏

主　审　孙王杰　陈巨龙



吉林科学技术出版社

## 内 容 简 介

本书是医学院校高等数学配套辅导书，全书共分10章，重点论述了一元函数微积分学、多元函数微积分学、空间解析几何与向量代数、微分方程、概率论与数理统计、线性代数、和级数等内容.编写注重实际应用，与医学联系紧密，结构新颖，内容丰富.本书可供全国医学院校的药学、基础、临床、口腔医学等专业使用，也可供相关专业人员自学参考.


医用高等数学学习辅导

主　　编：张若东　潘淑霞
副 主 编：郜志艳　吴　希　卢敦敏
责任编辑：王宏伟
封面设计：吴　希
出版发行：吉林科学技术出版社
印　　刷：北华印务
开　　本：16开　　　　印　　张：24.25
字　　数：345654
版　　次：2005年5月第一版第1次印刷
标准书号：ISBN7—5384—1826—1/
定　　价：34.20元

# 目　　录

# 第一章 函数与极限

医用高等数学的研究对象是函数，极限的思想方法是研究函数的一种重要工具，极限思想贯穿医用高等数学的始终，了解函数的概念，熟悉极限思想，掌握极限的运算方法与函数的连续性，是学好医用高等数学的基础.

## 一 主要内容归纳

### （一）函数

1. 函数的定义

设$x$和$y$是两个变量，$D$是实数集$R$的非空子集. 若对任意$x\in D$，变量$y$按照对应规律$f$总有确定的实数值与之对应，则称对应法则$f$为定义在$D$上的函数. 记为

$$y=f(x)\quad x\in D$$

其中$x$为自变量，$y$为因变量，$D$称为函数的定义域. 全体函数值的集合

$$M=\left\{y\middle|y=f(x),x\in D\right\}$$

称为函数的值域.

2. 函数图像

平面点集 $\{(x,y)|y=f(x),x\in D\}$称为函数$y=f(x)$的图像.

3. 反函数

设函数$f$：$D\to f(D)$是单射，则它存在逆映射$f^{-1}$：$f(D)\to D$，称此映射$f^{-1}$为函数$f$的反函数.

4. 复合函数

设$y$是$u$的函数$y=f(u)$，而$u$是$x$的函数$u=\varphi(x)$，且$\varphi(x)$的全部或部分使$f(u)$有意义，则称$y$是$x$的函数，记为$y=f[\varphi(x)]$. 这个函数叫做由函数$y=f(u)$及$u=\varphi(x)$

复合而成的复合函数，其中$u$称为中间变量.

5. 基本初等函数与初等函数

幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数统称为基本初等函数.

由常数和基本初等函数经过有限次的四则运算和有限次的复合而构成并可用一个式子表示的函数，称为初等函数.

6. 分段函数

用不同的解析式子表示一个函数，该函数称为分段函数.

## （二）函数的几种特性

1. 有界性

设函数 $f(x)$ 在数集 $D$ 上有定义，若存在 $M>0$，使得对任意的 $x \in D$，恒有

$$|f(x)| \le M$$

则称函数 $f(x)$ 在数集 $D$ 上有界，数 $M$ 为函数 $f(x)$ 的一个界；若不存在这样的正数 $M$，则称 $f(x)$ 在数集 $D$ 上无界.

2. 单调性

设函数 $f(x)$ 在数集上 $D$ 有定义，若对任意的 $x_1$、$x_2 \in D$，当 $x_1 < x_2$ 时，恒有

$$f(x_1) < f(x_2) \text{ 或（} f(x_1) > f(x_2) \text{）}$$

则称函数 $f(x)$ 在区间 $D$ 上是单调增加（或单调减少）的.

3. 奇偶性

设函数 $f(x)$ 的定义域数集 $D$ 关于原点对称，若对任意的 $x \in D$，有

$$f(-x) = f(x) \text{ 或（} f(-x) = -f(x) \text{）}$$

则称函数 $f(x)$ 为偶函数（或奇函数）.

奇偶函数的运算性质：

（1）奇函数的代数和为奇函数；偶函数代数和为偶函数.

（2）偶数个奇（或任意多个偶）函数之积为偶函数；奇数个奇函数之积为奇函数.

（3）一个奇函数与一个偶函数之积为奇函数.

4. 周期性

设函数 $f(x)$ 的定义域为数集 $D$，若存在一个与 $x$ 无关的正数 $T$，使得对任意 $x \in D$，恒有

$$f(x+T) = f(x)$$

则称函数 $f(x)$ 是以 $T$ 为周期的周期函数.

周期函数的运算性质：

（1）若 $T$ 为 $f(x)$ 的周期，则 $f(ax+b)$ 的周期为 $\dfrac{T}{|a|}$.

（2）若 $f(x)$、$g(x)$ 均是以 $T$ 为周期的函数，则 $f(x) \pm g(x)$ 也是以 $T$ 为周期的函数.

（3）若 $f(x)$、$g(x)$ 分别是以 $T_1$、$T_2$（$T_1 \ne T_2$）为周期的函数，则 $f(x) \pm g(x)$ 是以 $T_1$、$T_2$ 的最小公倍数为周期的函数.

## （三）极限

1. 数列极限的定义

对于数列 $\{x_n\}$，如果存在一个常数 $A$，对任意给定的 $\varepsilon > 0$，总存在正整数 $N$，使得

$n>N$ 时，恒有 $|x_n - A|<\varepsilon$ 成立，则称 $A$ 是数列 $\{x_n\}$ 的极限，或者称数列 $\{x_n\}$ 收敛于 $A$. 并记为 $\lim\limits_{x\to\infty} x_n = A$ 亦即，当 $n$ 趋于 $\infty$ 时，数列极限 $\{x_n\}$ 无限趋于 $A$.

2. 函数极限的概念

（1）有限点处的极限

设 $f(x)$ 定义在 $x_0$ 的一个可能不包括 $x_0$ 的开区间上，如果，对任意 $\varepsilon>0$，存在相应的 $\delta>0$ 使得对所有满足 $0<|x-x_0|<\delta$ 的 $x$ 有

$$|f(x)-A|<\varepsilon$$

我们说当 $x$ 趋于 $x_0$ 时 $f(x)$ 的极限为 $A$，并记为

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A$$

（2）无穷远处的极限

设函数 $f(x)$ 在 $x$ 的绝对值大于某一正数时有定义，如果，对任意 $\varepsilon>0$，存在相应的 $X>0$ 使得对所有满足 $|x|>X$ 的 $x$ 有

$$|f(x)-A|<\varepsilon$$

则称当 $x$ 趋于 $\infty$ 时 $f(x)$ 的极限为 $A$，并记为

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=A$$

3. 左右极限的概念

设函数 $f(x)$ 在 $(x_0-\delta,x_0)$ 内有定义，如果，对任意的 $\varepsilon>0$，存在相应的 $\delta>0$ 使对所有满足 $0<x_0-x<\delta$ 的一切 $x$ 有

$$|f(x)-A|<\varepsilon$$

则称 $A$ 为函数 $f(x)$ 当 $x$ 自左趋于 $x_0$ 时的左极限. 记为 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=A$.

设函数 $f(x)$ 在 $(x_0,x_0+\delta)$ 内有定义，如果，对任意的 $\varepsilon>0$，存在相应的 $\delta>0$ 使对所有满足 $0<x-x_0<\delta$ 的一切 $x$ 有

$$|f(x)-A|<\varepsilon$$

则称 $A$ 为函数 $f(x)$ 当 $x$ 自右趋于 $x_0$ 时的右极限. 记为 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=A$.

4. 极限的有关定理

（1）极限的唯一性

收敛数列的极限是唯一的，对函数极限有相同的性质.

（2）收敛数列的有界性

收敛数列必有界，反之不然.

（3）子数列收敛性

二

如果数列$\{x_n\}$收敛于$a$，则其任何子数列也收敛，且收敛于$a$.

（4）局部保号性

如果$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$,且$A>0$（或$A<0$），则必存在$\delta>0$，使得当$x$属于$x_0$的某去心邻域时，恒有$f(x)>0$（或$f(x)<0$）.

（5）保持不等式性

若在$x_0$的某去心邻域时，恒有$f(x)\ge g(x)$，且$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A,\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=B$，则有$A\ge B$.

5. 极限与左右极限的关系

（1）$f(x)$在点$x_0$处极限存在的充分必要条件是它在$x_0$的左、右极限存在且相等，即

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0^-} f(x)=\lim_{x\to x_0^+} f(x)=A;$$

（2）$f(x)$当$x$趋于$\infty$时极限存在的充分必要条件是它趋于$-\infty$和趋于$+\infty$时的极限都存在且相等，即　$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$.

6. 极限的运算法则

（1）若$\lim f(x)=A,\lim g(x)=B$，则它们和差的极限等于极限的和差，即

$$\lim[f(x)\pm g(x)]=\lim f(x)\pm\lim g(x)=A\pm B.$$

（2）若$\lim f(x)=A,\lim g(x)=B$，则它们积的极限等于极限的积，即

$$\lim[f(x)\cdot g(x)]=\lim f(x)\cdot\lim g(x)=A\cdot B.$$

（3）若$\lim f(x)=A,\lim g(x)=B$，且$B\ne 0$，则它们商的极限等于极限的商，即

$$\lim\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim f(x)}{\lim g(x)}=\frac{A}{B}.$$

7. 极限的存在准则及两个重要极限

（1）夹逼准则

如果数列$\{x_n\},\{y_n\},\{z_n\}$满足：$y_n\le x_n\le z_n(n\in z)$，$\lim\limits_{n\to\infty} y_n=\lim\limits_{n\to\infty} z_n=A$则$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=A$.

如果对于满足：$0\le|x-x_0|<\delta$（或$|x|>M$）的一切$x$有

$$g(x)\le f(x)\le h(x);\lim g(x)=A,\lim h(x)=A$$

则 $\lim f(x)$ 存在，且等于 $A$.

（2）单调有界准则

单调有界数列必有极限.

（3）两个重要极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1；\ \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e，\text{或}\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e.$$

8. 无穷小与无穷大的概念及关系

（1）无穷小

以零为极限的变量，即如果 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0$（或 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$），则称 $f(x)$ 当 $x\to\infty$（或 $x\to x_0$）时是无穷小.

（2）无穷小

如果当自变量 $x$ 在某一变化过程中变化时，$|f(x)|$ 无限增大，则称 $f(x)$ 是在这一变化过程中的无穷大. 即对于任意给定的正数 $M$ 总存在 $\delta>0$（或 $X>0$），使得对于适合不等式 $0<|x-x_0|<\delta(|x|>X)$ 的一切 $x$ 所对应的函数值 $f(x)$ 总满足不等式

$$|f(x)|>M$$

则称函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$（或 $x\to\infty$）时为无穷大，记为 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$（或 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty$）.

（3）无穷大与无穷小的关系

在同一自变量的同一变化过程中：

如果 $f(x)$ 为无穷大，则 $\dfrac{1}{f(x)}$ 为无穷小；

如果 $f(x)$ 为无穷小，且 $f(x)\neq 0$，则 $\dfrac{1}{f(x)}$ 为无穷大.

9. 无穷小的性质

（1）有限个无穷小的和、差、积还是无穷小.

（2）有界函数与无穷小的乘积还是无穷小.

（3）极限与无穷小的关系：$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x\to\infty}}f(x)=A\Leftrightarrow f(x)=A+\alpha(x)$，其中 $\alpha(x)$ 是无穷小量，即 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x\to\infty}}\alpha(x)=0$.

（4）无穷小的替换：如果 $\alpha\sim\alpha',\beta\sim\beta'$，则 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=\lim\dfrac{\beta'}{\alpha'}$.

10. 无穷小的比较

设$\alpha,\beta$是在同一自变量在同一变化过程中的无穷小

（1）若$\lim\frac{\alpha}{\beta}=0$，则称$\alpha$是$\beta$的高阶无穷小，记为$\alpha=o(\beta)$. 0

（2）若$\lim\frac{\alpha}{\beta}=\infty$，则称$\alpha$是$\beta$的低阶无穷小. $\infty$

（3）若$\lim\frac{\alpha}{\beta}=c\neq 0$，则称$\alpha$与$\beta$是同阶无穷小. $c$

（4）若$\lim\frac{\alpha}{\beta^k}=c\neq 0$，则称$\alpha$是$\beta$的$k$阶无穷小$(k>0)$.

（5）若$\lim\frac{\alpha}{\beta}=1$，则称$\alpha$与$\beta$是等阶无穷小，记为$\alpha\sim\beta$.

**（四）函数连续性**

1. 函数连续的定义

设函数$y=f(x)$在点$x_0$的某一领域内有定义，若当自变量的增量$\Delta x=x-x_0$趋于零时，对应的函数增量$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$也趋于零，即

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim_{\Delta x\to 0}[f(x_0+\Delta x)-f(x_0)]=0\text{（或}\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)\text{）}$$

则称函数$y=f(x)$在点$x_0$处是连续的.

2. 左、右连续的定义

如果$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=f(x_0)$，则称$f(x)$在点$x_0$处左连续；如果$\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=f(x_0)$，则称$f(x)$在点$x_0$处右连续.

3. 区间上连续的定义

如果函数$f(x)$在$(a,b)$内每一点都连续，则称函数$f(x)$在区间$(a,b)$内连续；如果函数$f(x)$在区间$(a,b)$内连续，在$a$点右连续，在$b$点左连续，则称函数$f(x)$在区间$[a,b]$上连续.

4. 连续与左右连续的关系

$f(x)$在点$x_0$处连续的充要条件是，$f(x)$在点$x_0$处既左连续又右连续. 即

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)\Leftrightarrow\lim_{x\to x_0^-}f(x)=\lim_{x\to x_0^+}f(x)=f(x_0).$$

**（五）函数的间断点**

1. 函数间断点的定义

如果函数 $f(x)$ 满足下列条件之一;(1)在点 $x=x_0$ 处没有定义;(2)虽在 $x=x_0$ 有定义,但 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 不存在;(3)虽在 $x=x_0$ 有定义,且 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在,但 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\neq f(x_0)$ 则 $f(x)$ 在点 $x_0$ 不连续,称点 $x_0$ 为 $f(x)$ 的间断点.

2. 间断点的类型

(1)第一类间断点:若 $\lim\limits_{x\to x^-_0}f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to x^+_0}f(x)$ 存在,但不相等;或者 $\lim\limits_{x\to x^-_0}f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to x^+_0}f(x)$ 存在且相等,但极限值不等于函数值 $f(x_0)$,这时称 $x_0$ 是 $f(x)$ 的第一类间断点. 而后者又称为可去间断点.

(2)第二类间断点:若 $\lim\limits_{x\to x^-_0}f(x)$ 或 $\lim\limits_{x\to x^+_0}f(x)$ 至少有一个不存在,则称 $x_0$ 是 $f(x)$ 的第二类间断点.

### (六)连续函数的性质

1. 连续函数的四则运算

连续函数的和、差、积与商(分母不为零)都是连续函数.

2. 反函数的连续性

若函数 $y=f(x)$ 在某区间上单调增(减)且连续,则它的反函数 $x=\varphi(y)$ 也在对应的区间上单调增(减)且连续.

3. 复合函数的连续性

(1)若函数 $u=\varphi(x)$ 在点 $x=x_0$ 处连续,且 $\varphi(x_0)=u_0$,而函数 $y=f(u)$ 在点 $u=u_0$ 处连续,则复合函数 $y=f[\varphi(x)]$ 在点 $x=x_0$ 处也连续.

(2)若 $u=\varphi(x)$,且有 $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=a$,而函数 $y=f(u)$ 在 $u=a$ 处连续,则复合函数 $y=f[\varphi(x)]$ 当 $x\to x_0$ 时的极限也存在,且等于 $f(a)$,即

$$\lim_{x\to x_0}f[\varphi(x)]=f(a)=f[\lim_{x\to x_0}\varphi(x)].$$

4. 基本初等函数的连续性

基本初等函数在其定义域内都是连续的.

5. 初等函数的连续性

初等函数在其定义区间内是连续的.

### (七)闭区间上连续函数的性质

1. 最大最小值定理

闭区间上的连续函数,必能取得最大值与最小值.

2. 介值定理

闭区间上的连续函数,必能取得介于函数最大值与最小值之间的一切值.

3. 有界性定理

闭区间上的连续函数在该区间上有界.

4．零点定理

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a)f(b)<0$，则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使 $f(\xi)=0$.

## 二 典型例题分类解析

### （一）函数定义域的求法

由函数解析式子，求初等函数的自然定义域有以下原则：

（1）分式中分母不能为零.

（2）偶次根式的被开方数不能为负数.

（3）对数的真数大于零，底数大于零且不等于一.

（4）反三角函数 $\arcsin x,\arccos x$ 的定义域为 $|x|\le 1$.

（5）正切函数 $\tan x$ 的定义域为 $x\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2}$，$k\in Z$.

（6）余切函数 $\cot x$ 的定义域为 $x\neq k\pi$，$k\in Z$.

（7）两函数和（差）的定义域为这两函数定义域的公共部分.

例 1：求下列函数的定义域：

（1）$y=\dfrac{1}{x^2-3x+2}$；　　（2）$y=\lg(x-1)+\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}$；

（3）$y=\arcsin(2x-3)$；　　（4）$y=\ln(x^2-1)+\arcsin\dfrac{1}{x+1}$.

解（1）由题意 $x^2-3x+2\neq 0$ 解得 $x\neq 1,x\neq 2$，即定义域为 $(-\infty,1)\cup(1,2)\cup(2,+\infty)$.

（2）由题意 $\begin{cases}x-1>0\\x+1>0\end{cases}\Rightarrow x>1$，即定义域 $(1,+\infty)$.

（3）由题意 $|2x-3|\le 1\Rightarrow 1\le x\le 2$，即定义域 $[1,2]$.

（4）由题意 $\begin{cases}x^2-1>0\\x+1\neq 0\\\left|\dfrac{1}{x+1}\right|\le 1\end{cases}$，由 $x^2-1>0\Rightarrow x<-1$ 或 $x>1$；由 $\left|\dfrac{1}{x+1}\right|\le 1\Rightarrow x\le -2$ 或 $x\ge 0$. 故定义域 $(-\infty,-2]\cup(1,+\infty)$.

例 2：设函数 $f(x)$ 的定义域为 $[0,1]$，求 $f(2x-1)$ 的定义域.

解 由 $f(x)$ 的定义域为 $[0,1]$，有 $0\le 2x-1\le 1\Rightarrow \frac{1}{2}\le x\le 1$，即函数 $f(2x-1)$ 的定义域为 $[\frac{1}{2},1]$.

## （二）函数的两个要素

函数的对应法则与定义域确定函数的本质，称为函数的两大要素；两函数相与函数变量符号的选取无关.

例 3：设函数 $f(x)=\begin{cases}2^x & -1<x<0\\ 2 & 0\le x<1\\ x-1 & 1\le x\le 3\end{cases}$，求 $f(2),f(\frac{1}{2}),f(-\frac{1}{2})$ 的值.

解 由 $2\in[1,3]$，知 $f(2)=2-1=1$；由 $\frac{1}{2}\in[0,1)$，知 $f(\frac{1}{2})=2$；由 $-\frac{1}{2}\in(-1,0)$，知 $f(-\frac{1}{2})=2^{-\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

例 4：下列函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是否相同？

（1） $f(x)=\frac{x-1}{x^2-1},g(x)=\frac{1}{x+1}$；　　（2） $f(x)=\sqrt{(1-x)^2},g(x)=1-x$；

（3） $f(x)=x,g(x)=\ln e^x$；（4） $f(x)=\arctan x\ (x>0),g(x)=\arctan\frac{1}{x}\ (x>0)$.

解（1） $f(x)$ 的定义域为 $x\ne\pm1,g(x)$ 的定义域为 $x\ne-1$，故 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是不同函数.

（2）由 $f(x)=\sqrt{(1-x)^2}=|1-x|$，所以当 $x>1$ 时，$f(x)\ne g(x)$，即 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是不同函数.

（3）由 $g(x)=\ln e^x=x\ (x\in R)$，即 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的定义域与对应法则均相同，故 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是同一函数.

（4）虽然两函数的定义域相同，但对应法则不同，故两函数是不同的函数.

## （三）函数符号的运算

函数的运算主要是复合函数的问题，对于复合函数要搞清复合的成分或结构，有时需适当引入中间变量.

例 5：已知 $f(x)=x^2-3x+1$，求 $f(x+1),f(\sin x),f[f(x)]$.

解 由 $f(x+1)=(x+1)^2-3(x+1)+1=x^2-x-1$，知

$$f(x+1)=x^2-x-1;\quad f(\sin x)=(\sin x)^2-3\sin x+1;$$

$$f[f(x)]=[f(x)]^2-3f(x)+1=(x^2-3x+1)^2-3(x^2-3x+1)+1=x^4-6x^3+8x^2+3x-1.$$

例 6：已知 $f(x-1)=x^2+x+1$，求 $f(\frac{1}{x-1})$.

解 本题为复合函数问题，关键在于求得 $f(u)$，故引入中间变量，令 $u=x-1$，则 $x=u+1$，得

$$f(u)=(u+1)^2+(u+1)+1=u^2+3u+3$$

故 $f(\frac{1}{x-1})=\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{3}{x-1}+3$.

例 7：已知 $f(3x)=\log_2\sqrt{\frac{9x+1}{2}}$，求 $f(1)$.

解 令 $3x=1$，即 $x=\frac{1}{3}$，则 $f(1)=f(3\cdot\frac{1}{3})=\log_2\sqrt{\frac{9\cdot\frac{1}{3}+1}{2}}=\log_2\sqrt{2}=\frac{1}{2}$.

**（四）反函数的求法**

由 $y=f(x)$ 出发解出 $x$ 的表达式 $x=\varphi(y)$，然后交换 $x$ 与 $y$ 的位置，即可求得反函数 $y=f^{-1}(x)$.

例 8：求下列函数的反函数：

（1） $y=e^x$；（2） $y=x^2$；

（3） $y=1+\log_4 x$；（4） $y=\frac{2^x}{2^x+1}$.

解（1）由 $y=e^x$ 解出 $x=\ln y$，于是有反函数 $y=\ln x$.

（2）由 $y=x^2$ 知，$y=x^2$ 在 $(-\infty,0)$ 上的反函数为 $y=-\sqrt{x}$；$y=x^2$ 在 $(0,+\infty)$ 上的反函数为 $y=\sqrt{x}$.

（3）由 $y=1+\log_4 x\Rightarrow x=4^{y-1}$，故反函数为 $y=4^{x-1}$.

（4）由 $y=\frac{2^x}{2^x+1}\Rightarrow y\cdot 2^x+y=2^x\Rightarrow 2^x=\frac{y}{y-1}\Rightarrow x=\log_2\frac{y}{y-1}$，故反函数为 $y=\log_2\frac{x}{1-x}$.

**（五）数列极限**

一数列 $\{x_n\}$ 以 $A$ 为极限，常有下列几种情况：$x_n$ 小于极限 $A$ 而趋于 $A$；$x_n$ 大于极限 $A$

而趋于 $A$；$x_n$ 时而小于、时而大于极限 $A$ 而趋于 $A$ 等等. 一数列 $\{x_n\}$ 的极限不存在常有以下情况：当 $n\to\infty$ 时，$x_n$ 趋于 $\infty$；当 $n\to\infty$ 时，$x_n$ 不趋于任何一个常数.

例 9：观察下列数列的变化趋势，若极限存在，写出它们的极限：

（1） $x_n=\dfrac{n-1}{n}$； （2） $x_n=\dfrac{n+(-1)^{n-1}}{n}$；

（3） $x_n=(-1)^{n-1}$； （4） $x_n=n$.

解（1）由 $x_n=\dfrac{n-1}{n}=1-\dfrac{1}{n}$，当 $n\to\infty, x_n\to 1$，即 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n-1}{n}=1$.

（2）由 $x_n=\dfrac{n+(-1)^{n-1}}{n}=1+(-1)^{n-1}\dfrac{1}{n}$， $n\to\infty, x_n\to 1$，即 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+(-1)^{n-1}}{n}=1$.

（3）由，当 $n\to\infty$ 时，$x_n$ 时而为 1，时而为-1，不趋于任何固定常数，故极限不存在.

（4）由，当 $n\to\infty$ 时，$x_n$ 无限增大，它不趋于任何固定的常数，故极限不存在. 记为 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\infty$.

### （六）利用极限的四则运算法则求极限

利用极限运算法则求极限常常有以下几种方法：

设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是 $x$ 的多项式，则有

（1） $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$.

（2）若 $g(x_0)\neq 0$ 时，则有 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{f(x_0)}{g(x_0)}$.

（3）若 $g(x_0)=0, f(x_0)\neq 0$ 时，则由 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{g(x)}{f(x)}=0$，可得 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\infty$.

（4）若 $f(x_0)=0, g(x_0)=0$，通常可通过因式分解、分子或分母有理化、三角恒等式等手段约去使分母的极限为零的非零因子从而消去极限为零的零因子.

（5）对 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 型，分子分母同除以它们代数和中的最高阶无穷大因子.

（6）对 $\infty-\infty$ 型，常常经过通分或有理化因子先化简，再求极限.

例 10：求下列函数的极限：

（1） $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2-3}{x+1}$； （2） $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x-2}$；

（3） $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(\sqrt{x^2+1}+x)^2}{\sqrt[3]{x^6+1}}$； （4） $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-\sqrt{x}}{1-\sqrt[3]{x}}$.

解（1） $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2-3}{x+1}=\dfrac{\lim\limits_{x\to 1}(2x^2-3)}{\lim\limits_{x\to 1}(x+1)}=-\dfrac{1}{2}$.

（2）$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)(x+2)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}(x+2)=4$.

（3）分子分母同除以 $n^2$ 有，原式$=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1)^2}{\sqrt[3]{1+\frac{1}{x^6}}}=\dfrac{2^2}{1}=4$.

（4）$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-\sqrt{x}}{1-\sqrt[3]{x}}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})(1+\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2})}{(1-\sqrt[3]{x})(1+\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2})(1+\sqrt{x})}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1+\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2}}{1+\sqrt{x}}=\dfrac{3}{2}$.

### （七）利用两个重要极限求极限

利用极限运算法则求极限常常有以下几种方法：

（1）在$\dfrac{0}{0}$型时，恒等变换后会出现第一个重要极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ 时，实际运用时经常是它的变量替换形式，即当 $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=0$ 时，则 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\sin[\varphi(x)]}{\varphi(x)}=1$.

（2）在$1^\infty$型时，可凑出第二个重要极限 $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{1}{x})^x=e$，一般是它的变量替换形式，即当 $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=\infty$ 时，有 $\lim\limits_{x\to x_0}[1+\dfrac{1}{\varphi(x)}]^{\varphi(x)}=e$.

例 11：求下列函数的极限：

（1）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{\sin 4x}$；　　（2）$\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\dfrac{1}{x}$；　　（3）$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(\dfrac{\pi}{4}-x)\csc(\dfrac{3}{4}\pi+x)$.

解（1）原式$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{3x}\cdot\dfrac{4x}{\sin 4x}\cdot\dfrac{3x}{4x}=\dfrac{3}{4}$.

（2）原式$=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}=1$.

（3）原式$=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(\dfrac{\pi}{4}-x)\csc(\dfrac{3}{4}\pi+x)=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(\dfrac{\pi}{4}-x)\csc[\pi-(\dfrac{1}{4}\pi-x)]$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{(\frac{\pi}{4}-x)}{\sin[\pi-(\frac{\pi}{4}-x)]}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{(\frac{\pi}{4}-x)}{\sin(\frac{\pi}{4}-x)}=1.$$

例 12：求下列函数的极限：