◆ 高 等 学 校 教 材

线性代数

辽宁科技大学高等数学部　组编
主　编　沙秋夫　姜本源　张金海
副主编　张大庆　郭良栋

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

高等学校教材

线性代数

Xianxing Daishu

辽宁科技大学高等数学部　组编

主　编　沙秋夫　姜本源　张金海

副主编　张大庆　郭良栋

编　者（按姓氏笔画排序）

沙秋夫　张大庆　张云生　张国磐

张金海　陈　斌　姜本源　顾文豹

郭良栋

高等教育出版社·北京
HIGHER EDUCATION PRESS　BEIJING

内容简介

本书涵盖高等学校理工科线性代数课程教学的全部内容，包括行列式、矩阵、n维向量、线性方程组、矩阵的特征值与特征向量、二次型以及线性空间与线性变换共7章。书中习题分为A、B两类，A类习题为基本问题，适用于课堂练习与作业；B类习题可以帮助学生更全面深入地理解相关概念与方法。本书可作为高等学校理工科非数学类专业、经济管理类专业线性代数课程的教材使用，加 * 号和小字排印的内容可供学有余力的学生选学。

图书在版编目（CIP）数据

线性代数 / 沙秋夫，姜本源，张金海主编；辽宁科技大学高等数学部组编. --北京：高等教育出版社，2012.8

ISBN 978-7-04-035827-8

Ⅰ. ①线… Ⅱ. ①沙… ②姜… ③张… ④辽… Ⅲ. ①线性代数-高等学校-教材 Ⅳ. ①O151.2

中国版本图书馆CIP数据核字(2012)第178812号

策划编辑 于丽娜　责任编辑 于丽娜　封面设计 于文燕　版式设计 余 杨
插图绘制 黄建英　责任校对 杨凤玲　责任印制 韩 刚

出版发行 高等教育出版社
社　　址 北京市西城区德外大街4号
邮政编码 100120
印　　刷 高教社（天津）印务有限公司
开　　本 787mm × 960mm 1/16
印　　张 14
字　　数 250千字
购书热线 010-58581118
咨询电话 400-810-0598
网　　址 http://www.hep.edu.cn
　　　　 http://www.hep.com.cn
网上订购 http://www.landraco.com
　　　　 http://www.landraco.com.cn
版　　次 2012年8月第1版
印　　次 2012年8月第1次印刷
定　　价 20.90元

物 料 号 35827-00

前　言

线性代数课程作为高等学校理工科专业的一门数学基础课,为学生学习后续课程提供了必要的线性代数理论基础与思想方法。但随着近几年来高校招生量的扩大以及教学改革的不断深入,我校原有的线性代数教材已不适应目前的教学现状,主要表现在教学内容多、习题难度较大,无法适应现在有限的学时。因此,为满足当前的实际教学需求,辽宁科技大学高等数学部从多年的教学实践以及教学经验的积累出发,组织编写了这本教材。

本教材共分为7章,主要内容包括行列式、矩阵、n维向量、线性方程组、矩阵的特征值与特征向量、二次型以及线性空间与线性变换。其中前6章为必修内容,第7章线性空间与线性变换可作为选修内容。考虑到大多数学生的学习重点是掌握本课程的基本概念与方法,因此本书将每一章的习题分为A、B两类,A类习题是基本题,适用于课堂练习与作业;B类习题较A类习题有些难度,对学生更全面深入地理解所学内容有所帮助,可作为课后练习使用。

本书是辽宁科技大学高等数学部集体智慧的结晶。已经退休的陈斌、张云生、张国磐、顾文豹等教授在形成本书的前期工作中,投入了大量的精力,在这里表示感谢!在本书的编写过程中,编写组得到辽宁科技大学教务处和理学院的大力支持,理学院的何希勤教授和王金萍教授多次参加编写组的讨论并提出了许多宝贵意见,这里一并表示感谢!

由于编者水平有限,书中难免存在不足之处,欢迎读者不吝指正,以利于本书进一步完善。

编　者

2012年5月

目　　录

第1章　行　列　式

行列式是一个重要的数学工具，在数学的各个分支以及其他学科领域中都有广泛应用。特别在线性代数自身的理论发展过程中几乎处处都要用到行列式，本书的第1章先介绍行列式的概念与理论，并给出著名的求解线性方程组的克拉默法则。

1.1　行列式的定义

为了建立 n 阶行列式的概念，我们先从已熟悉的二元、三元线性方程组的求解出发，引出二阶、三阶行列式的定义，进而给出 n 阶行列式的定义。

1.1.1　二阶、三阶行列式

对于二元线性方程组：

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \tag{1-1}$$

其中，b_1，b_2 是常数；a_{ij}是第 i 个方程 x_j 的系数。用消元法消去 x_2，得

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - b_2a_{12}$$

同样，消去 x_1 得

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = a_{11}b_2 - a_{21}b_1$$

当由方程组(1-1)的系数确定的式子 $D = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ 时，方程组有唯一解

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \\[2ex] x_2 = \dfrac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \end{cases} \tag{1-2}$$

为了便于记忆这个公式，我们引进记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \overset{\triangle}{=\!=} a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \tag{1-3}$$

式(1-3)左端是任意4个数排成两行两列的方阵，并在两侧加有竖线的式子，称为**二阶行列式**。横的称为**行**，竖的称为**列**，行列式中的a_{ij}叫做行列式的**第i行第j列元素**，其中a_{ij}的第一个下标i表示该元素所在的第i行号，第二个下标j表示该元素所在的第j列号（等号上方加个"△"表示用右边式子来定义左边的式子）。从式(1-3)可以看出，二阶行列式是两个项的代数和，一项是从左上角到右下角的对角线（叫做行列式的**主对角线**）上两个元素的乘积，取正号；另一项是从右上角到左下角的对角线（叫做行列式的**副对角线**）上两个元素的乘积，取负号（图1-1）。有了定义式(1-3)，对任意给定的4个数$a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$，都可以计算该行列式的值。例如，

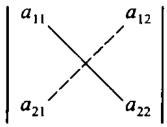

图1-1

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 1 \times 5 - (-2) \times 3 = 11$$

由二阶行列式的定义，很容易将线性方程组解的表达式(1-2)中的分母和分子分别写成

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$$

其中，D叫做线性方程组(1-1)的**系数行列式**。当系数行列式$D \neq 0$时，方程组有唯一解，且可以写成

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} \qquad (1-4)$$

显然，用行列式来表示线性方程组(1-1)的解，容易记忆和计算。

【例1-1】　解线性方程组

$$\begin{cases} 2x + y = 7 \\ x - 3y = -2 \end{cases}$$

解

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = 2 \times (-3) - 1 \times 1 = -7$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 7 & 1 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} = 7 \times (-3) - 1 \times (-2) = -19$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 2 \times (-2) - 7 \times 1 = -11$$

因为 $D \neq 0$,所以线性方程组有唯一解,由式(1-4)得

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{-19}{-7} = \frac{19}{7}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{-11}{-7} = \frac{11}{7}$$

为方程组的唯一解。

类似地,在一定条件下,三元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases} \tag{1-5}$$

的解也可以用行列式表示。为此,引入

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \xlongequal{\triangle} a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} \tag{1-6}$$

式(1-6)左端称为**三阶行列式**,是由 9 个数(也叫**元素**)排成 3 行 3 列的方阵,并在两侧加有竖线的式子,它实际表示右端形式的 6 个乘积项的代数和,每项都是取自三个不同行、不同列元素的乘积。为便于正确写出这 6 项,我们采用连线方式写出,规定实线上三个元素的乘积取正号,虚线上三个元素的乘积取负号(图 1-2)。

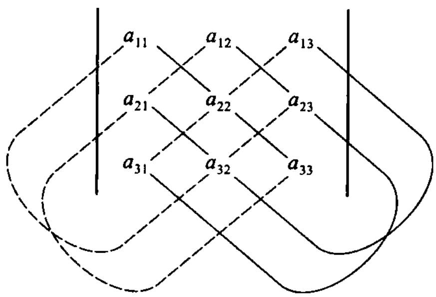

图 1-2

例如，

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -4 & 3 & -1 \\ -2 & 5 & 6 \end{vmatrix} = 2\times 3\times 6+0\times(-1)\times(-2)+1\times(-4)\times 5-1\times 3\times(-2)-2\times(-1)\times 5-0\times(-4)\times 6=32$$

有了三阶行列式的定义，可以验证，当三元线性方程组(1-5)的系数构成的行列式（以下简称为**系数行列式**）

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}\neq 0$$

时，该三元线性方程组也有唯一解，且其解可以表示成

$$x_1=\frac{D_1}{D},\quad x_2=\frac{D_2}{D},\quad x_3=\frac{D_3}{D} \tag{1-7}$$

其中，D_1，D_2，D_3 分别是用方程组(1-5)的常数项替换系数行列式 D 中的第1，2，3列元素所得的三阶行列式，即

$$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},\quad D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix},\quad D_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

在1.4节我们将证明，对于含 n 个方程、n 个未知数的线性方程组，在类似条件下也有唯一解，且同样有形如式(1-4)和式(1-7)的解的表示式。由此可见，很有必要把二阶、三阶行列式的概念推广，给出 n 阶行列式的一般定义。

二阶、三阶行列式的定义方法通常称为几何连线法。对二阶、三阶行列式来说，这样定义直观、易于记忆。然而对于更高阶的行列式，我们就不能用这种方法来定义。那么，如何定义更高阶的行列式？为此，先介绍排列及其逆序数。

1.1.2　排列及其逆序数

为了定义 n 阶行列式，并研究行列式的性质，先介绍排列及其基本性质。

定义1.1　由 n 个自然数 $1,2,\cdots,n$ 按任意顺序排成的一个有序数组称为一个 n **阶排列**，记作

$$j_1 j_2\cdots j_n$$

其中,j_k 表示自然数 1,2,…,n 中的一个数,k 表示数 j_k 在排列的第 k 个位置上。

例如,312,213 等都是 3 阶排列;51324,42135 等都是 5 阶排列。n 阶排列共有 $n!$ 个,其中,$123\cdots n$ 叫做**自然排列**。

定义 1.2 在一个 n 阶排列 $j_1 j_2\cdots j_n$ 中,任取数 j_k 与 j_t,当 $k<t$ 时,若 $j_k>j_t$(即排在前面的数大于排在后面的数),就称这两个数在排列中构成一个**逆序**,否则,称这两个数构成**顺序**。排列 $j_1 j_2\cdots j_n$ 中逆序的总数称为这个排列的**逆序数**,记作 $\tau(j_1 j_2\cdots j_n)$。逆序数为偶数的排列称为**偶排列**;逆序数为奇数的排列称为**奇排列**。

排列 $j_1 j_2\cdots j_n$ 中任一个数 j_k 后面有几个比 j_k 小的数就称元素 j_k 的逆序数是几,计算一个排列的逆序数,只需从前往后计算出排列中每个元素的逆序数,再求和即可。例如,

$$\tau(312)=2+0=2$$

$$\tau(53142)=4+2+0+1=7$$

$$\tau(12\cdots n)=0$$

$$\tau(n\cdots 21)=(n-1)+(n-2)+\cdots+1=\frac{n(n-1)}{2}$$

把一个排列中两个数的位置互换,其余各数的位置保持不变,称为作了一次**对换**。例如,把排列 4231 变成 4132 就是把前一排列的第二个数 2 和第四个数 1 作了一次对换的结果。

关于排列,可以证明如下定理:

定理 1.1 对换改变排列的奇偶性,即经过一次对换,奇排列必然变成偶排列,偶排列必然变成奇排列。

证明 首先证明结论对排列中任意相邻元素的对换成立。

设对排列

$$j_1\cdots j_k j_{k+1}\cdots j_n \tag{1}$$

仅作一次 j_k 与 j_{k+1} 的对换,其余元素位置不变,得新排列

$$j_1\cdots j_{k+1} j_k\cdots j_n \tag{2}$$

排列(2)中除元素 j_k 和 j_{k+1} 外的 $n-2$ 个元素的逆序关系不变,而且 j_k 和 j_{k+1} 相对于其余元素的逆序关系也不变。当 $j_k<j_{k+1}$ 时,在(1)中 $j_k j_{k+1}$ 不构成逆序,但在(2)中 $j_{k+1}j_k$ 构成逆序,从而(2)的逆序数等于(1)的逆序数加 1;反之,若 $j_k>j_{k+1}$,则 $j_k j_{k+1}$ 是逆序,而 $j_{k+1}j_k$ 是顺序,故排列(2)的逆序数等于排列(1)的逆序数减 1。因此,若(1)是奇排列,则(2)变成偶排列;若(1)是偶排列,则

(2)变成奇排列。

再考虑不相邻元素的对换。

设对排列(1)作一次元素 j_k 与 j_t 的对换,中间含有 s 个元素(即 $t=k+s+1$),得到排列

$$j_1\cdots j_{k-1}j_t j_{k+1}\cdots j_{t-1}j_k j_{t+1}\cdots j_n \tag{3}$$

这种对换等同于将(1)中的元素 j_k 先向后作 $s+1$ 次相邻元素的对换,把(1)变成

$$j_1\cdots j_{k-1}j_{k+1}\cdots j_{t-1}j_t j_k j_{t+1}\cdots j_n \tag{3'}$$

然后再将(3′)的元素 j_t 向前作 s 次相邻元素对换的结果。由于从(1)变到(3′)再从(3′)变成(3)总共作了 $2s+1$ 次(奇数次)相邻元素对换,而每作一次相邻元素的对换,排列奇偶性改变一次,因此作奇数次相邻元素的对换把(1)变成(3),就等同于将排列(1)作了奇数次($2s+1$ 次)奇偶性改变,最终变成(3),故从(1)变成(3)奇偶性必然改变。这就证明了排列每作一次对换(无论是相邻元素对换,还是不相邻元素对换),奇偶性都会改变。

推论 1.1 在全部 n 阶排列中($n\geqslant 2$),奇偶排列各占一半。

证明 全部 n 阶排列共 $n!$ 个,设其中有 s 个奇排列,t 个偶排列,由于 $s+t=n!$,只需证 $s=t$。

把每个排列都作一次前两个元素的相邻对换,则 s 个奇排列变为 s 个不同的偶排列,t 个偶排列变为 t 个不同的奇排列,即全部 $n!$ 个 n 阶排列中,不同的偶排列个数至少是 s,而不同的奇排列个数至少是 t,从而 $s\leqslant t$,且 $t\leqslant s$,故必有 $t=s$。

定理 1.2 任意一个 n 阶排列 $j_1 j_2\cdots j_n$ 与自然排列 $12\cdots n$ 都可以通过一系列对换互变,并且所作对换的次数与排列 $j_1 j_2\cdots j_n$ 具有相同的奇偶性。

证明 定理 1.2 的第一个结论是显然的,因为通过若干次两个元素之间的对换,总可以依次将排列 $j_1 j_2\cdots j_n$ 中的数 $1,2,\cdots,n$ 对换到新排列的第 1 位,第 2 位,…,第 n 位上去,最终对换成自然排列 $12\cdots n$,所作对换次数不超过 $n-1$ 次。又由于对一个排列中任两个位置上的元素作两次对换就还原,故排列 $12\cdots n$ 也可以反过来经过同样多次对换还原成排列 $j_1 j_2\cdots j_n$。

定理 1.2 的第二个结论实际上是定理 1.1 的直接推论。因为排列 $12\cdots n$ 的逆序数是零,即它是个偶排列。根据定理 1.1,若排列 $j_1 j_2\cdots j_n$ 是奇排列,只有作奇数次对换才能变成偶排列 $12\cdots n$;若 $j_1 j_2\cdots j_n$ 是偶排列,只有通过偶数次对换才能变成偶排列 $12\cdots n$。即把排列 $j_1 j_2\cdots j_n$ 对换成自然排列所作对换次数的奇偶性与排列 $j_1 j_2\cdots j_n$ 的奇偶性相同。而 $12\cdots n$ 可以用同样多次对换变成 $j_1 j_2\cdots j_n$,故偶排列 $12\cdots n$ 对换成排列 $j_1 j_2\cdots j_n$ 所作对换次数的奇偶性与 $j_1 j_2\cdots j_n$ 的奇偶性亦相同,从而定理 1.2 的第二个结论得证。

有了排列的概念和性质,就可以给出 n 阶行列式的一般定义。

1.1.3 n 阶行列式

从二、三阶行列式的定义可以看出：

(1) 行列式是若干项的代数和，其项数由行列式的阶数确定，二阶行列式含2！项，三阶行列式含3！项。

(2) 代数和中的每一项都是取自不同行、不同列元素的乘积。二阶行列式的2！项中，每一项都是取自两个不同行、不同列的2个元素的乘积；三阶行列式的3！项中，每一项都是取自三个不同行、不同列的3个元素的乘积。

(3) 代数和中每一项符号（正或负）的确定与该项中所有相乘元素所取行号（叫行标）及列号（叫列标）的排列有关。

在二阶行列式的定义式(1-3)右端的两项中，当各项的行标排列为自然顺序时，对应的列标排列，前一项为12，后一项为21，逆序数分别为$\tau(12)=0$，$\tau(21)=1$，前者是偶排列，后者是奇排列。因为式(1-3)的前一项符号为正，后一项符号为负，故它们分别可以表示成$(-1)^{\tau(12)}=(-1)^0=1$，$(-1)^{\tau(21)}=(-1)^1=-1$，这样二阶行列式的定义式(1-3)可表示成

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = (-1)^{\tau(12)}a_{11}a_{22} + (-1)^{\tau(21)}a_{12}a_{21}$$

$$\xlongequal{\text{简记}} \sum_{j_1j_2}(-1)^{\tau(j_1j_2)}a_{1j_1}a_{2j_2} \qquad (1-8)$$

同理，在三阶行列式的定义式(1-6)右端的6项中，若每一项的三个相乘元素的行标按自然顺序排列，则全部6项的列标排列正好是自然数1,2,3的全排列，其逆序数依次为

$$\tau(123)=0,\quad \tau(231)=2,\quad \tau(312)=2$$

$$\tau(321)=3,\quad \tau(213)=1,\quad \tau(132)=1$$

前三个是偶排列，对应于前三项的符号+1，后三个是奇排列，对应于后三项的符号-1，从而，前三项的符号可以分别表示成$(-1)^{\tau(123)}$，$(-1)^{\tau(231)}$，$(-1)^{\tau(312)}$，后三项的符号可以分别表示成$(-1)^{\tau(321)}$，$(-1)^{\tau(213)}$，$(-1)^{\tau(132)}$，所以三阶行列式的定义式(1-6)可表示成

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (-1)^{\tau(123)}a_{11}a_{22}a_{33} + (-1)^{\tau(231)}a_{12}a_{23}a_{31} +$$

$$(-1)^{\tau(312)}a_{13}a_{21}a_{32}+(-1)^{\tau(321)}a_{13}a_{22}a_{31}+(-1)^{\tau(213)}a_{12}a_{21}a_{33}+$$

$$(-1)^{\tau(132)}a_{11}a_{23}a_{32}\xlongequal{\text{简记}}\sum_{j_1j_2j_3}(-1)^{\tau(j_1j_2j_3)}a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3} \tag{1-9}$$

其中,符号 $\sum\limits_{j_1j_2j_3}$ 表示对所有3阶排列求和。

类似地,可把二、三阶行列式的定义式(1-8)和式(1-9)从形式上推广到 n 阶行列式,给出 n 阶行列式的定义。

定义 1.3　设 n^2 个元素(数)排成 n 行 n 列的方阵,称式子

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

为 n **阶行列式**,它等于全部取自不同行、不同列的 n 个元素的乘积 $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$(共 $n!$ 个乘积项)的代数和,其中 $j_1\,j_2\cdots j_n$ 是列标的一个 n 阶排列,每一项前面的符号为 $(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}$,$\tau(j_1\,j_2\cdots j_n)$ 是列标排列 $j_1\,j_2\cdots j_n$ 的逆序数,当 $j_1\,j_2\cdots j_n$ 是偶排列时,该项带正号,当 $j_1\,j_2\cdots j_n$ 是奇排列时,该项带负号。

这个定义可简记为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \xlongequal{\triangle} \sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n} \tag{1-10}$$

其中,符号 $\sum\limits_{j_1j_2\cdots j_n}$ 表示对所有 n 阶排列求和(共 $n!$ 项),式(1-10)左端的 n 阶行列式有时简记为 $|a_{ij}|_n$。特别地,一阶行列式规定为 $|a_{11}|=a_{11}$(注意:行列式不同于绝对值)。

某些特殊的行列式可以用行列式定义直接计算,看下面几个简单而重要的例子。

【例 1-2】　计算上三角形行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

解 行列式的左下角元素全为零(故称为**上三角形行列式**),即当 $j<i$ 时,$a_{ij}=0$。因为行列式的每一项都是取自不同行、不同列元素的乘积,故可能不为零的项只能取相应于 $j_n=n, j_{n-1}=n-1, \cdots, j_2=2, j_1=1$ 的项,从而 D 的可能不为零的项只有一项,即为 $a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$ 对应的项,因列标排列的逆序数 $\tau(12\cdots n)=0$,故

$$D=(-1)^{\tau(12\cdots n)}a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn} \tag{1-11}$$

也就是说,上三角形行列式的值等于其主对角线上全部元素的乘积。

特殊地,有公式

$$\begin{vmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{vmatrix}=a_1a_2\cdots a_n \tag{1-12}$$

这个行列式称为**对角行列式**。

【例 1-3】 证明

$$D=\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & 0 & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{n-1,2} & \cdots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n-1,2}a_{n1}$$

(1-13)

证明 这个行列式的左上角元素全为0,由 n 阶行列式的定义可知,展开式中可能不为零的项只能是对应于 $j_1=n, j_2=n-1, \cdots, j_n=1$ 的项,即全部 $n!$ 项中可能不为零的项只有 $a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}$。相应列标排列的逆序数

$$\tau(n\,n-1\cdots 21)=(n-1)+(n-2)+\cdots+1=\frac{n(n-1)}{2}$$

故

$$D = (-1)^{\tau(nn-1\cdots 21)} a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}$$

例 1-3 的特殊情形有

$$\begin{vmatrix} & & & a_1 \\ & & a_2 & \\ & \iddots & & \\ a_n & & & \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_1 a_2 \cdots a_n \qquad (1-14)$$

式(1-11)~式(1-14)可以作为公式使用。

根据定理 1.1 和定理 1.2，n 阶行列式的定义表达式还可写成如下两个等价形式，即

定义 1.3′

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \xlongequal{\triangle} \sum_{i_1 i_2 \cdots i_n} (-1)^{\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)} a_{i_1 1} a_{i_2 2} \cdots a_{i_n n} \qquad (1-15)$$

以及更一般的形式

定义 1.3″

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \xlongequal{\triangle} \sum_{\substack{j_1 j_2 \cdots j_n \\ i_1 i_2 \cdots i_n}} (-1)^{\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)+\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} \cdots a_{i_n j_n} \qquad (1-16)$$

因为式(1-15)右端的任一乘积项 $a_{i_1 1}a_{i_2 2}\cdots a_{i_n n}$ 都可以交换成 $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$，即它的行标排列 $i_1 i_2\cdots i_n$ 可经有限次对换变成自然排列 $12\cdots n$。与此同时，列标排列 $12\cdots n$ 被对换成 $j_1 j_2\cdots j_n$。根据定理 1.2，排列 $i_1 i_2\cdots i_n$ 及 $j_1 j_2\cdots j_n$ 的奇偶性都与所作对换次数的奇偶性一致，故逆序数 $\tau(i_1 i_2\cdots i_n)$ 与 $\tau(j_1 j_2\cdots j_n)$ 奇偶性相同，且都等于对换次数的奇偶性，所以

$$(-1)^{\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)} = (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)}$$

以及

$$\sum_{i_1 i_2 \cdots i_n} (-1)^{\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)} a_{i_1 1} a_{i_2 2} \cdots a_{i_n n} = \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1 j_1} a_{2 j_2} \cdots a_{n j_n}$$

而式(1-16)中的任一乘积 $a_{i_1 j_1}a_{i_2 j_2}\cdots a_{i_n j_n}$ 都可交换成 $a_{1k_1}a_{2k_2}\cdots a_{nk_n}$，即它的行标排列 $i_1 i_2\cdots i_n$ 可经有限次对换变成自然排列 $12\cdots n$，列标排列 $j_1 j_2\cdots j_n$ 将同时被对换成 $k_1 k_2\cdots k_n$。由于行标排列与列标排列每作一次对换都同时改变一次奇偶性，所以对换前与对换后行标排列与列标排列的逆序数之和的奇偶性不变。

因 $\tau(12\cdots n)=0$，于是

$$(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)+\tau(j_1j_2\cdots j_n)}=(-1)^{\tau(12\cdots n)+\tau(k_1k_2\cdots k_n)}=(-1)^{\tau(k_1k_2\cdots k_n)}$$

进而有式(1-16)成立。

1.2 行列式的性质

由行列式的定义及前面的例子不难看出,利用定义只能计算低阶(二、三阶)或某些特殊的高阶行列式,对于一般的 n 阶行列式,用定义来计算非常困难,为此需要研究行列式的基本性质。

1.2.1 行列式的基本性质

设 n 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

把 D 中行与列互换,即第 i 行变成第 i 列($i=1,2,\cdots,n$),所得 n 阶行列式记作 D^{T}:

$$D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

D^{T} 称为 D 的**转置行列式**。

性质 1.1 行列互换,行列式的值不变,即 $D^{\mathrm{T}}=D$。

证明 记 $D^{\mathrm{T}}=|b_{ij}|_n$,其中 $b_{ij}=a_{ji}$($i,j=1,2,\cdots,n$),由式(1-15)及式(1-10)可得

$$\begin{aligned} D^{\mathrm{T}}=|b_{ij}|_n &= \sum_{i_1i_2\cdots i_n}(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)}b_{i_11}b_{i_22}\cdots b_{i_nn} \\ &= \sum_{i_1i_2\cdots i_n}(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)}a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots a_{ni_n}=D \end{aligned}$$

性质 1.1 表明,行列式的行和列的地位是对称的,因此凡属对行成立的结论,对列同样成立。

由性质 1.1 及关于上三角形行列式的公式(1-11)可得结论:下三角形行列式等于主对角线上元素的乘积。