




高孝忠 编著

数学分析教程

(上册)

清华大学出版社



高孝忠 编著

数学分析教程

(上册)

清华大学出版社
北京

内 容 简 介

本书以极限为工具,研讨了函数的分析性质——连续性、可微性、可积性与可展性,内容分为5大部分:极限、连续、微分、积分和级数,从一元函数入手,拓展到多元函数,全书分上下两册,共20章(上册10章,下册10章)。本书注重学生对数学分析的基本概念、基本理论、基本方法的理解和掌握,以及数学思维能力、逻辑思维能力的培养和训练。教材条理清晰,简明易学。

可作为综合性大学、师范院校数学系各专业的教材,还可作为高等学校数学系教师以及数学工作者的参考用书。

版权所有,侵权必究。侵权举报电话:010-62782989 13701121933

图书在版编目(CIP)数据

数学分析教程.上册/高孝忠编著. —北京:清华大学出版社,2012.8

ISBN 978-7-302-29303-3

I. ①数… II. ①高… III. ①数学分析—高等学校—教材 IV. ①O17

中国版本图书馆CIP数据核字(2012)第152833号

责任编辑:刘颖

封面设计:常雪影

责任校对:王淑云

责任印制:张雪娇

出版发行:清华大学出版社

网 址: <http://www.tup.com.cn>, <http://www.wqbook.com>

地 址:北京清华大学学研大厦A座 邮 编:100084

社 总 机:010-62770175 邮 购:010-62786544

投稿与读者服务:010-62776969, c-service@tup.tsinghua.edu.cn

质 量 反 馈:010-62772015, zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn

印 装 者:清华大学印刷厂

经 销:全国新华书店

开 本:185mm×230mm

印 张:17

字 数:372千字

版 次:2012年8月第1版

印 次:2012年8月第1次印刷

印 数:1~3000

定 价:38.00元

产品编号:047684-01



数学分析是大学数学专业的一门基础主干课,其思想、内容和方法是学习后续课程的基础.掌握数学分析的思想、内容和方法是开设数学分析课程的基本目标,它教给学生如何用数学的思维方法去处理在社会实践中面临的课题.为此,根据教育部关于高校精品课程教材建设的要求,结合多年来积累的教学经验和对教学改革的积极思考与探索,作者编写了这本《数学分析教程》.

本书有如下特点:

(1) 风格:采用通俗易懂的语言.

林群院士说:“深奥的东西,能说你懂了,以什么为标准呢?那就是看你能否用粗浅的语言去描述.”本书的编写风格恰以此为宗旨,语言通俗易懂,学生喜闻乐见,容易接受.

(2) 题材:采用抽象与应用相结合.

应用体现在理论与实际的联系.知道了抽象的过程,就懂得了应用的方法.书中对每一个抽象的概念,都给出其引入的情境,告知抽象的过程和应用的方法.

(3) 内容:采用严密要求下的解释.

严密的逻辑推理,是数学的基本要求之一.本书注重引导学生从简单的解释达到严密的论证,掌握数学思维方法,培养逻辑推理能力.

(4) 拓展:采用推理中的必然性力量.

梳理出知识中的逻辑线,是学生掌握知识的最佳方案,使学生变机械记忆为理解记忆,从而真正理解和掌握数学分析的基本概念、基本理论和方法.

(5) 形式:采用立体彩图,图文并茂.

本书较之该学科教材一贯采用黑白的立体图有了突破,书中图形皆采用双色印刷,直观且空间感强,立体效果更好.而且图形配合恰当,易于理解,更有利于教与学.

(6) 方法:配备多媒体教学课件.

本书的每一章节都配有多媒体课件(教学光盘).课件中的教学情境设置得当,动图效果生动,在教学实践中已得到同行教师与学生的好评.

本书在内容上有如下亮点(在现行教科书中尚未出现):

(1) 在数的发展论述中来介绍实数.

(2) 给出毕达哥拉斯可公度原理的粗浅解释,说明“无理数”的来由.

(3) 在数集的确界中给出较小的正数 ϵ ,对函数的单调性定义给出认识过程,为极限的介绍作准备.

(4) 极限定义由浅入深,给出芝诺悖论的新解释,指出芝诺悖论与魏尔斯特拉斯 ϵ - N 语言的联系,在教学中学生容易接受.

(5) 引入记号 $o(g(x))$ 表示 $g(x)$ 的所有高阶无穷小构成的集合.

(6) 以实数的连续性为背景,给出函数连续的两个定义.

(7) 在导数的引入中给出数学推导,再寻找实际背景.

(8) 在微分介绍中,先给出数学引入,再给出实际背景.并给出其与拉格朗日中值公式、泰勒公式的联系.

(9) 不定积分定义为 $\int f(x)dx = \{F(x):F'(x) = f(x)\}$. $d\int f(x)dx$ 表示对集合 $\{F(x):F'(x) = f(x)\}$ 中的每一个元素取微分.

(10) 在现行教材中,不定积分 $\int f(x)dx$ 里的 dx 由指示积分变元的概念不明不白地变成了微分,本书已简单解决了这一问题.

(11) 总练习题中选录了一些近年来的硕士研究生统一入学考试的试题,以便学生提高.

由于篇幅有限,不再一一罗列,读者可参照其他教材识别之.可以说,对数学分析教材的改革,要突出思想方法的介绍.只有这样,学生才能真正受益.

本书在编写、修订过程中,得到了贵州师范大学数学与计算机科学学院的大力支持;清华大学出版社编辑刘颖、贵州师范大学的游泰杰教授对本书的编写提出了很多宝贵的意见;贵州大学的郭正林副教授、秦新波副教授对本书作了认真的校对,在此对他们表示诚挚的感谢.

高孝忠

2012年2月



绪论	1
第 1 章 实数集与函数	5
1.1 实数	5
1.1.1 实数及其性质	5
1.1.2 绝对值与不等式	7
习题 1.1	9
1.2 数集与确界	10
1.2.1 数集	10
1.2.2 确界及确界原理	13
习题 1.2	16
1.3 函数及其运算	16
1.3.1 函数的定义	16
1.3.2 函数的表示法	17
1.3.3 函数的运算	19
习题 1.3	20
1.4 函数的某些性质与初等函数	21
1.4.1 初等性质	21
1.4.2 初等函数	23
习题 1.4	26
总练习题 1	27
第 2 章 数列极限	30
2.1 数列极限的概念	30
2.1.1 数列极限的定义	30
2.1.2 数列发散的定義	33
2.1.3 无穷小数列	34
习题 2.1	35

2.2	收敛数列的性质	36
2.2.1	收敛数列的一般性质	36
2.2.2	收敛数列的四则运算	38
2.2.3	数列与其子列的关系	39
	习题 2.2	40
2.3	数列极限存在的条件	41
2.3.1	单调有界定理	41
2.3.2	柯西收敛准则	44
	习题 2.3	45
	总练习题 2	46
第 3 章	函数极限	49
3.1	函数极限的概念	49
3.1.1	函数在无穷远处的极限	49
3.1.2	函数在某一点 x_0 处的极限	51
3.1.3	单侧极限	52
	习题 3.1	54
3.2	函数极限的性质	54
3.2.1	函数极限的一般性质	55
3.2.2	函数极限的四则运算	56
	习题 3.2	57
3.3	函数极限的几个命题	58
3.3.1	函数极限的法则	58
3.3.2	海涅定理与柯西收敛准则	60
	习题 3.3	61
3.4	两个重要的极限	62
3.4.1	$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$	62
3.4.2	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$	64
	习题 3.4	65
3.5	无穷小量与无穷大量	66
3.5.1	无穷小量	66
3.5.2	无穷小量的比较	66
3.5.3	无穷大量	68

3.5.4 曲线的渐近线	69
习题 3.5	71
总练习题 3	72
第 4 章 连续函数	75
4.1 连续函数的概念	75
4.1.1 函数在一点的连续性	76
4.1.2 单侧连续性	77
4.1.3 间断及其分类	78
4.1.4 函数在区间上的连续性	79
习题 4.1	80
4.2 连续函数的性质	81
4.2.1 连续函数的局部性质	81
4.2.2 闭区间上连续函数的基本性质	82
4.2.3 反函数的连续性	84
4.2.4 一致连续性	84
习题 4.2	86
4.3 初等函数的连续性	87
习题 4.3	89
总练习题 4	90
第 5 章 导数与微分	93
5.1 导数的概念	93
5.1.1 导数的引入	93
5.1.2 导数的定义	94
5.1.3 单侧导数	94
5.1.4 导数与连续的关系	95
5.1.5 导函数	95
5.1.6 导数的几何解释	97
5.1.7 极值	98
习题 5.1	98
5.2 求导法则	100
5.2.1 导数的四则运算	100
5.2.2 反函数求导法	101
5.2.3 复合函数求导法	102

5.2.4	基本求导法则与求导公式	103
	习题 5.2	104
5.3	隐函数求导与参变量函数的求导	106
5.3.1	隐函数的概念	106
5.3.2	隐函数求导法	107
5.3.3	对数求导法	107
5.3.4	参变量函数的求导	108
	习题 5.3	109
5.4	微分	110
5.4.1	微分的概念	110
5.4.2	微分与导数的关系	111
5.4.3	微分的几何解释	111
5.4.4	微分的计算	112
5.4.5	拓广	112
5.4.6	近似计算中的应用	112
	习题 5.4	114
5.5	高阶导数与高阶微分	114
5.5.1	高阶导数	114
5.5.2	高阶微分	117
	习题 5.5	117
5.6	曲率	118
5.6.1	弧微分	118
5.6.2	曲率	119
5.6.3	曲率圆与曲率半径、曲率中心	121
	习题 5.6	122
	总练习题 5	123
第 6 章	微分中值定理及其应用	126
6.1	拉格朗日中值定理和函数的单调性	126
6.1.1	罗尔定理	126
6.1.2	拉格朗日中值定理	127
6.1.3	单调函数	128
6.1.4	应用	129
	习题 6.1	130

6.2	柯西中值定理与不定式	131
6.2.1	柯西中值定理	131
6.2.2	不定式的极限	132
	习题 6.2	136
6.3	泰勒公式及其应用	137
6.3.1	泰勒公式	137
6.3.2	几个初等函数的麦克劳林公式	138
6.3.3	应用	139
	习题 6.3	142
6.4	函数的极值与最值	142
6.4.1	极值	142
6.4.2	最值	144
	习题 6.4	145
6.5	函数的凹性及拐点	146
6.5.1	凹性概念	146
6.5.2	拐点	149
6.5.3	应用	149
	习题 6.5	150
6.6	函数的作图	151
	习题 6.6	153
	总练习题 6	154
第 7 章	实数的完备性	157
7.1	实数完备性的基本定理	157
	习题 7.1	161
7.2	闭区间上连续函数性质的证明	162
	习题 7.2	165
	总练习题 7	165
第 8 章	不定积分	167
8.1	不定积分的概念与基本积分公式	167
8.1.1	原函数与不定积分	167
8.1.2	不定积分与微分的关系	168
8.1.3	不定积分的线性性质	170
	习题 8.1	171

8.2	换元积分法与分部积分法	171
8.2.1	换元法	171
8.2.2	分部积分法	175
	习题 8.2	177
8.3	有理函数的不定积分	179
8.3.1	部分分式	179
8.3.2	部分分式的不定积分	180
	习题 8.3	183
8.4	三角有理式的不定积分	183
8.4.1	万能替换	183
8.4.2	特殊替换	184
	习题 8.4	186
8.5	简单无理根式的不定积分	186
8.5.1	$\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dx (ad-bc \neq 0)$ 型	187
8.5.2	$\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c}) dx$ 型	187
	习题 8.5	189
	总练习题 8	190
第 9 章 定积分		193
9.1	定积分的概念	193
9.1.1	问题的提出	193
9.1.2	定积分的定义	194
9.1.3	定积分的几何意义	195
	习题 9.1	196
9.2	可积条件	197
9.2.1	可积的必要条件	197
9.2.2	可积的充分必要条件	198
9.2.3	可积函数类	199
	习题 9.2	201
9.3	定积分的性质	202
9.3.1	基本性质	202
9.3.2	积分中值定理	205
	习题 9.3	206

9.4	微积分学基本定理	207
9.4.1	上限函数	207
9.4.2	微积分基本定理	208
9.4.3	牛顿-莱布尼茨公式的另一种证明	209
9.4.4	实例	212
9.4.5	积分第二中值定理	212
	习题 9.4	215
9.5	分部积分法与换元积分法	216
9.5.1	分部积分法	216
9.5.2	换元积分法	217
9.5.3	积分型余项	219
	习题 9.5	220
9.6	可积理论补叙	222
9.6.1	大和与小和的性质	222
9.6.2	可积的充分必要条件	223
	习题 9.6	224
	总练习题 9	225
第 10 章	定积分的应用	229
10.1	平面图形的面积	229
10.1.1	微元法	229
10.1.2	在直角坐标系下平面图形的面积	229
10.1.3	参数函数的面积公式	231
10.1.4	极坐标系下的面积公式	231
	习题 10.1	232
10.2	求体积	233
10.2.1	已知截面面积求体积	233
10.2.2	旋转体的体积	234
	习题 10.2	236
10.3	平面曲线的弧长	237
10.3.1	曲线由直角坐标系给出	237
10.3.2	曲线由参数式给出	238
10.3.3	曲线由极坐标给出	240
	习题 10.3	240

10.4	旋转面的面积	241
10.4.1	曲线由直角坐标系给出	241
10.4.2	曲线由参数式给出	242
10.4.3	曲线由极坐标给出	242
	习题 10.4	243
10.5	定积分在物理学中的某些应用	243
10.5.1	液体静压力	243
10.5.2	引力	244
10.5.3	功与平均功率	245
	习题 10.5	246
10.6	定积分的近似计算	246
10.6.1	矩形法	246
10.6.2	梯形法	247
10.6.3	抛物线法	248
10.6.4	抛物线法的应用	249
	习题 10.6	250
	总练习题 10	250
附录 A	不定积分表	252
附录 B	希腊字母表	260

绪 论

数学分析研究的对象是函数,而使用的工具是极限,也就是说是用极限去研究函数的分析性质,如连续性、可微性、可导性等.本书分为五大部分,即极限、连续、微分、积分和级数,而后四个部分都是建立在极限的基础上.由于所研究的函数的自变量是实数,函数值也是实数,所以,实数理论是学习本课程的基础.微分、积分、级数是特殊的极限运算,是从实际中抽象出来的数学模型,研究这些模型,获得其性质,然后应用到实际中,就构成了数学分析的基本内容.

数学分析是高等院校数学专业的一门基础主干课.学好数学分析,对后继课程以及深入理解中学教材都起着重要作用.

数学分析研究函数的方法不像中学那样仅寻求函数的函数值,而是以极限为工具去讨论函数的分析性质,如连续性、可导性、可积性等.因此,学习数学分析的方法也与中学的方法完全不同.

可以说,要改变已有的学习方法,才能学好数学分析.

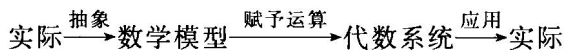
谈到学习方法,必须从数学的3个要点入手.

1. 抽象的思维能力

谈到抽象,有些同学会说:“学习数学最怕的就是抽象”.但是,我们在小学、中学的数学学习中,却离不开“抽象”的过程.例如在小学所学习的“数”,就是一个抽象的数学模型,它是去掉了量的关系而得到的.在我们的实际生活中,“数”都带有“量”的关系.如1kg、3元、5个等.而1、3、5等是没有实际意义的,只有带上量的关系才有实际意义.所以说,学习数学,第一关就是抽象,只不过在以前的学习中没有特别强调而已.

又如到了中学,我们用字母去代替数,这个“代”的过程也是一个抽象的过程.有人说:“ $2+3$ 是多么的明显易懂,为什么要换成 $a+b$ 呢?”我们可以去看一看加法的运算律——交换律,如果我们写成 $2+3=3+2$,你可能会问:“对其他的数是否也成立呢?”但我们写成 $a+b=b+a$,那就不会再有同类的问题了.

至此,我们可以说,数学研究的对象就是“数学模型”.在数学模型中赋予了运算,如在“数”中我们赋予了加、减、乘、除四则运算,研究的对象就称为“代数系统”.在代数系统中,我们的任务是探索其一系列属性,然后应用到实际中去解决实际问题.这一过程可以用下面的图示给出:



应用的实质,就是理论与实际的联系,会抽象就会应用.如我们教一个小孩 2 加 3 等于多少时,他不会怎么办?由于我们知道“数”的抽象过程,所以可回到原始状态下说:“你有两元钱,再给你三元,你有多少钱呢?”可见明白抽象的过程是多么重要了把.

2. 严密的逻辑推理

在我们的生活中,说话办事总要求有理有据.就像一个法官,当他拿到一个案例时,不可能简单地当事人可能要判 3 年的刑,而是以法律为依据得出结论.在数学王国,这种要求更是滴水不漏.行动的指南就是定义、定理、性质等.也可以说,这种有理有据的要求就是我们学习数学的乐趣所在.乐趣源于天衣无缝的逻辑推理中.

(1) 概念中的理

在我们的学习中,概念非常重要,它是我们行动的指南.在这里,我也用大家熟悉的例子来说明,如我们在小学里学习的分数.什么叫分数呢?有人说:“上面有一个数,下面有一个数,在中间加一横的就是分数.”由于有的人对分数是这样理解的,所以他说 $\frac{1}{2}$ 加 $\frac{1}{2}$ 应该等于 $\frac{2}{4}$,因为分子加了分母不加是不公平的.显然这是不对的,正确答案是等于 1.但当我们问他:“为什么等于 1 呢?”有的学生说:“老师教的.”可见,这些学生成了知识的奴隶.在数学王国里,没有绝对的权威,只有公认的道理.我们要推翻“ $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{2}{4}$ ”的说法,应该从分数的定义出发.也就是说,定义是我们解决问题的依据,就像用法律解决纠纷一样.在这里,定义就相当于“法律”.什么叫分数呢?那就是:把单位一分成若干份,取出其中的一份或几份就叫分数.有了这个定义, $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$ 就可以理解为“一半加一半等于一”了.

对于数学中的概念,有一个规定就是:在数学王国里,不允许循环的解释.关于循环的解释,可看下面的例子:

多者,不少也;少者,不多也.

这里用“少”解释“多”,又用“多”解释“少”,从而构成了循环的解释.由于不允许循环的解释,所以必然存在最基本的概念,这些概念只能用描述性语言给出.如:

形中的基本概念——点.

点——不计大小的空间位置.

数中的基本概念——集合.

集合——具有某种属性的对象构成的整体.

描述性语言就是我们的生活用语.对于生活用语,我们就可以不再追根问底了.例如点是不计大小的空间位置,我们就不能再问什么是空间位置了.又如集合是整体,对于整体的解释就只能按生活用语去理解.

由于不允许循环的论证,所以必然存在最基本的理,这就是公理.例如在实数理论中,描述实数连续性的定理就有7个,它们是等价的,必须以其中一个作为最基本的理,本书就是以确界定理作为出发点,所以称其为公理.当然也可用其他的定理作为公理,如华东师范大学编写的《数学分析》第三版对实数的介绍是用“不足近似”与“过剩近似”给出的,其实质是以区间套定理作为公理.

(2) 寻理与用理

在数学书的字里行间中找出依据称为寻理,在应用中按章办事称为用理.会寻理就会用理,所以寻理是学习的关键.怎样寻理呢?请看中文里的一段诗句:

满园春色关不住,
一枝红杏出墙来.

现在站在数学的角度上来对其给出解释:

① 因果句——关不住的原因是红杏出墙来.

② 例证句——用出墙红杏说明“关不住”.

③ 正与逆——“满”对“一”,要“关住春色”必须满园检查,而“关不住”只需一个反例.如果换为“满园春色关不住,很多红杏出墙来”,诗的味就不同了,可见诗人是有点数学思想的.

对于例证,还有一个要求,即明显性.如果换为:“满园春色关不住,一枝树根出墙来”,而树根是否出墙就不那么明显了.

3. 精炼的数学语言

对数学语言的要求,可以说是简明、准确.要做到少一个字,就觉得说不清楚,多一个字就会觉得啰唆.简捷明了,趣味无穷,我们的诗词歌赋不就做到了这一点吗?特别是数学符号的使用,让数学的语言更上一层楼.因此,数学语言的符号化是现代数学发展的一个趋势.

下面,介绍本书中使用的一些数学符号:

\forall ——对于任意指定的(泛指);

\exists ——存在,可以找到(特指);

$\exists!$ ——唯一存在;

\ni “……”——使得“……”成立,或满足“……”条件;

\Rightarrow ——蕴涵,可以推出;

\Leftrightarrow ——等价,充分必要;

ie: ——换句话说,即.

下面给出前面两个符号的解释.

\forall ——对于任意指定的(泛指).这是一个量词符号.我们说“集合A有上界是指集合A中的每一个元素都不超过某一定数”.这句话可表达为

$$\exists M, \ni \forall x \in A, x \leq M.$$

例如:班上同学的身高不超过门的高度,就是指每个同学走出来时都不会碰到门的

上框.

\exists ——存在,可以找到(特指).这也是一个量词.符号给出存在性,但没有给出寻找的方法.

例如:

中国人至少有两个人的头发根数一样多.

我们可以给出其存在性证明.假设任意两个人的头发根数不一样多,则由 0 根,1 根,2 根, \dots ,至少要排 13 亿根.而据生物学知,一个人不可能生长出 1 亿根头发,从而人数大于头发根数,所以结论成立.但有人说:“请把头发根数一样多的人找出来,”这显然是不行的,但不能因找不出来,就说明它不存在.又如,对一个特定的杏园有

满园春色关不住 $\Leftrightarrow \exists$ 一枝红杏, \ni “这枝红杏出墙来”.

总地说来,由于我们没有进入数学分析的学习,所以所举的例子都不是严密分析中的例子,这里只要求大家理解所用的思维方法.

数学分析这门课,是数学系的学生极为重要的课程.在数学类专业的研究生入学考试中,也是必考的课程之一.该课程具有课时长、内容多、难度大、综合性强及与其他学科联系广等特点.所以,学好数学分析,是衡量数学系学生数学水平的重要标志.

通过学习,我们要达到的基本目的是:

具有一定的自学能力,迎接社会的挑战.

祝大家在学习中取得好的成绩!