高孝忠 编著

数学分析教程

（上册）

清华大学出版社

高孝忠 编著

数学分析教程

（上册）

清华大学出版社
北 京

内容简介

本书以极限为工具，研讨了函数的分析性质——连续性、可微性、可积性与可展性，内容分为5大部分：极限、连续、微分、积分和级数，从一元函数入手，拓展到多元函数. 全书分上下两册，共20章(上册10章，下册10章). 本书注重学生对数学分析的基本概念、基本理论、基本方法的理解和掌握，以及数学思维能力、逻辑思维能力的培养和训练. 教材条理清晰，简明易学.

可作为综合性大学、师范院校数学系各专业的教材，还可作为高等学校数学系教师以及数学工作者的参考用书.

图书在版编目(CIP)数据

数学分析教程. 上册/高孝忠编著. --北京：清华大学出版社，2012.8

ISBN 978-7-302-29303-3

Ⅰ. ①数…　Ⅱ. ①高…　Ⅲ. ①数学分析—高等学校—教材　Ⅳ. ①O17

中国版本图书馆CIP数据核字(2012)第152833号

责任编辑：刘　颖

封面设计：常雪影

责任校对：王淑云

责任印制：张雪娇

出版发行：清华大学出版社

网　　址：http://www.tup.com.cn，http://www.wqbook.com

地　　址：北京清华大学学研大厦A座　　**邮　　编**：100084

社 总 机：010-62770175　　**邮　　购**：010-62786544

投稿与读者服务：010-62776969，c-service@tup.tsinghua.edu.cn

质 量 反 馈：010-62772015，zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn

印 装 者：清华大学印刷厂

经　　销：全国新华书店

开　　本：185mm×230mm　　**印　张**：17　　**字　　数**：372千字

版　　次：2012年8月第1版　　**印　　次**：2012年8月第1次印刷

印　　数：1～3000

定　　价：38.00元

产品编号：047684-01

前 言

FOREWORD

数学分析是大学数学专业的一门基础主干课，其思想、内容和方法是学习后续课程的基础.掌握数学分析的思想、内容和方法是开设数学分析课程的基本目标，它教给学生如何用数学的思维方法去处理在社会实践中面临的课题.为此，根据教育部关于高校精品课程教材建设的要求，结合多年来积累的教学经验和对教学改革的积极思考与探索，作者编写了这本《数学分析教程》.

本书有如下特点：

(1) 风格：采用通俗易懂的语言.

林群院士说："深奥的东西，能说你懂了，以什么为标准呢？那就是看你能否用粗浅的语言去描述."本书的编写风格恰以此为宗旨，语言通俗易懂，学生喜闻乐见，容易接受.

(2) 题材：采用抽象与应用相结合.

应用体现在理论与实际的联系.知道了抽象的过程，就懂得了应用的方法.书中对每一个抽象的概念，都给出其引入的情境，告知抽象的过程和应用的方法.

(3) 内容：采用严密要求下的解释.

严密的逻辑推理，是数学的基本要求之一.本书注重引导学生从简单的解释达到严密的论证，掌握数学思维方法，培养逻辑推理能力.

(4) 拓展：采用推理中的必然性力量.

梳理出知识中的逻辑线，是学生掌握知识的最佳方案，使学生变机械记忆为理解记忆，从而真正理解和掌握数学分析的基本概念、基本理论和方法.

(5) 形式：采用立体彩图，图文并茂.

本书较之该学科教材一贯采用黑白的立体图有了突破，书中图形皆采用双色印刷，直观且空间感强，立体效果更好.而且图形配合恰当，易于理解，更有利于教与学.

(6) 方法：配备多媒体教学课件.

本书的每一章节都配有多媒体课件(教学光盘).课件中的教学情境设置得当，动图效果生动，在教学实践中已得到同行教师与学生的好评.

本书在内容上有如下亮点(在现行教科书中尚未出现)：

(1) 在数的发展论述中来介绍实数.

(2) 给出毕达哥拉斯可公度原理的粗浅解释,说明"无理数"的来由.

(3) 在数集的确界中给出较小的正数 ε,对函数的单调性定义给出认识过程,为极限的介绍作准备.

(4) 极限定义由浅入深,给出芝诺悖论的新解释,指出芝诺悖论与魏尔斯特拉斯 ε-N 语言的联系,在教学中学生容易接受.

(5) 引入记号 $o(g(x))$表示 $g(x)$的所有高阶无穷小构成的集合.

(6) 以实数的连续性为背景,给出函数连续的两个定义.

(7) 在导数的引入中给出数学推导,再寻找实际背景.

(8) 在微分介绍中,先给出数学引入,再给出实际背景.并给出其与拉格朗日中值公式、泰勒公式的联系.

(9) 不定积分定义为 $\int f(x)\mathrm{d}x = \{F(x):F'(x) = f(x)\}$. $\mathrm{d}\int f(x)\mathrm{d}x$ 表示对集合 $\{F(x):F'(x) = f(x)\}$ 中的每一个元素取微分.

(10) 在现行教材中,不定积分$\int f(x)\mathrm{d}x$ 里的 $\mathrm{d}x$ 由指示积分变元的概念不明不白地变成了微分,本书已简单解决了这一问题.

(11) 总练习题中选录了一些近年来的硕士研究生统一入学考试的试题,以便学生提高.

由于篇幅有限,不再一一罗列,读者可参照其他教材识别之.可以说,对数学分析教材的改革,要突出思想方法的介绍.只有这样,学生才能真正受益.

本书在编写、修订过程中,得到了贵州师范大学数学与计算机科学学院的大力支持;清华大学出版社编辑刘颖、贵州师范大学的游泰杰教授对本书的编写提出了很多宝贵的意见;贵州大学的郭正林副教授、秦新波副教授对本书作了认真的校对,在此对他们表示诚挚的感谢.

高孝忠

2012 年 2 月

目 录

CONTENTS

绪　论

数学分析研究的对象是函数，而使用的工具是极限，也就是说是用极限去研究函数的分析性质，如连续性、可微性、可导性等. 本书分为五大部分，即极限、连续、微分、积分和级数，而后面四个部分都是建立在极限的基础上. 由于所研究的函数的自变量是实数，函数值也是实数，所以，实数理论是学习本课程的基础. 微分、积分、级数是特殊的极限运算，是从实际中抽象出来的数学模型，研究这些模型，获得其性质，然后应用到实际中，就构成了数学分析的基本内容.

数学分析是高等院校数学专业的一门基础主干课. 学好数学分析，对后继课程以及深入理解中学教材都起着重要作用.

数学分析研究函数的方法不像中学那样仅寻求函数的函数值，而是以极限为工具去讨论函数的分析性质，如连续性、可导性、可积性等. 因此，学习数学分析的方法也与中学的方法完全不同.

可以说，要改变已有的学习方法，才能学好数学分析.

谈到学习方法，必须从数学的 3 个要点入手.

1. 抽象的思维能力

谈到抽象，有些同学会说："学习数学最怕的就是抽象". 但是，我们在小学、中学的数学学习中，却离不开"抽象"的过程. 例如在小学所学习的"数"，就是一个抽象的数学模型，它是去掉了量的关系而得到的. 在我们的实际生活中，"数"都带有"量"的关系. 如 1kg、3 元、5 个等. 而 1、3、5 等是没有实际意义的，只有带上量的关系才有实际意义. 所以说，学习数学，第一关就是抽象，只不过在以前的学习中没有特别强调而已.

又如到了中学，我们用字母去代替数，这个"代"的过程也是一个抽象的过程. 有人说："$2+3$ 是多么的明显易懂，为什么要换成 $a+b$ 呢?"我们可以去看一看加法的运算律——交换律，如果我们写成 $2+3=3+2$，你可能会问："对其他的数是否也成立呢?"但我们写成 $a+b=b+a$，那就不会再有同类的问题了.

至此，我们可以说，数学研究的对象就是"数学模型". 在数学模型中赋予了运算，如在"数"中我们赋予了加、减、乘、除四则运算，研究的对象就称为"代数系统". 在代数系统中，我们的任务是探索其一系列属性，然后应用到实际中去解决实际问题. 这一过程可以用下面的图示给出：

$$实际 \xrightarrow{抽象} 数学模型 \xrightarrow{赋予运算} 代数系统 \xrightarrow{应用} 实际$$

应用的实质，就是理论与实际的联系，会抽象就会应用．如我们教一个小孩 2 加 3 等于多少时，他不会怎么办？由于我们知道“数”的抽象过程，所以可回到原始状态下说：“你有两元钱，再给你三元，你有多少钱呢？”可见明白抽象的过程是多么重要了吧．

2．严密的逻辑推理

在我们的生活中，说话办事总要求有理有据．就像一个法官，当他拿到一个案例时，不可能简单地说当事人可能要判 3 年的刑，而是以法律为依据得出结论．在数学王国，这种要求更是滴水不漏．行动的指南就是定义、定理、性质等．也可以说，这种有理有据的要求就是我们学习数学的乐趣所在．乐趣源于天衣无缝的逻辑推理中．

（1）概念中的理

在我们的学习中，概念非常重要，它是我们行动的指南．在这里，我也用大家熟悉的例子来说明，如我们在小学里学习的分数．什么叫分数呢？有人说：“上面有一个数，下面有一个数，在中间加一横的就是分数．”由于有的人对分数是这样理解的，所以他说$\frac{1}{2}$加$\frac{1}{2}$应该等于$\frac{2}{4}$，因为分子加了分母不加是不公平的．显然这是不对的，正确答案是等于 1．但当我们问他：“为什么等于 1 呢？”有的学生说：“老师教的．”可见，这些学生成了知识的奴隶．在数学王国里，没有绝对的权威，只有公认的道理．我们要推翻“$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=\frac{2}{4}$”的说法，应该从分数的定义出发．也就是说，定义是我们解决问题的依据，就像用法律解决纠纷一样．在这里，定义就相当于“法律”．什么叫分数呢？那就是：把单位一分成若干份，取出其中的一份或几份就叫分数．有了这个定义，$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$ 就可以理解为“一半加一半等于一”了．

对于数学中的概念，有一个规定就是：在数学王国里，不允许循环的解释．关于循环的解释，可看下面的例子：

多者，不少也；少者，不多也．

这里用“少”解释“多”，又用“多”解释“少”，从而构成了循环的解释．由于不允许循环的解释，所以必然存在最基本的概念，这些概念只能用描述性语言给出．如：

形中的基本概念——点．

点——不计大小的空间位置．

数中的基本概念——集合．

集合——具有某种属性的对象构成的整体．

描述性语言就是我们的生活用语．对于生活用语，我们就可以不再追根问底了．例如点是不计大小的空间位置，我们就不能再问什么是空间位置了．又如集合是整体，对于整体的解释就只能按生活用语去理解．

由于不允许循环的论证，所以必然存在最基本的理，这就是公理. 例如在实数理论中，描述实数连续性的定理就有 7 个，它们是等价的，必须以其中一个作为最基本的理，本书就是以确界定理作为出发点，所以称其为公理. 当然也可用其他的定理作为公理，如华东师范大学编写的《数学分析》第三版对实数的介绍是用“不足近似”与“过剩近似”给出的，其实质是以区间套定理作为公理.

(2) 寻理与用理

在数学书的字里行间中找出依据称为寻理，在应用中按章办事称为用理. 会寻理就会用理，所以寻理是学习的关键. 怎样寻理呢？请看中文里的一段诗句：

满园春色关不住，
一枝红杏出墙来.

现在站在数学的角度上来对其给出解释：

① 因果句——关不住的原因是红杏出墙来.

② 例证句——用出墙红杏说明“关不住”.

③ 正与逆——“满”对“一”，要“关住春色”必须满园检查，而“关不住”只需一个反例. 如果换为“满园春色关不住，很多红杏出墙来”，诗的味就不同了，可见诗人是有点数学思想的.

对于例证，还有一个要求，即明显性. 如果换为：“满园春色关不住，一枝树根出墙来”，而树根是否出墙就不那么明显了.

3. 精炼的数学语言

对数学语言的要求，可以说是简明、准确. 要做到少一个字，就觉得说不清楚，多一个字就会觉得啰唆. 简捷明了，趣味无穷，我们的诗词歌赋不就做到了这一点吗？特别是数学符号的使用，让数学的语言更上一层楼. 因此，数学语言的符号化是现代数学发展的一个趋势.

下面，介绍本书中使用的一些数学符号：

$\forall$——对于任意指定的(泛指)；

$\exists$——存在，可以找到(特指)；

$\exists!$——唯一存在；

$\ni$“……”——使得“……”成立，或满足“……”条件；

$\Rightarrow$——蕴涵，可以推出；

$\Leftrightarrow$——等价，充分必要；

ie：——换句话说，即.

下面给出前面两个符号的解释.

$\forall$——对于任意指定的(泛指). 这是一个量词符号. 我们说“集合 A 有上界是指集合 A 中的每一个元素都不超过某一定数”. 这句话可表达为

$$\exists M, \ni \text{“} \forall x \in A, x \leqslant M \text{”}.$$

例如：班上同学的身高不超过门的高度，就是指每个同学走出来时都不会碰到门的

上框.

∃——存在,可以找到(特指).这也是一个量词.符号给出存在性,但没有给出寻找的方法.

例如:

中国人至少有两个人的头发根数一样多.

我们可以给出其存在性证明.假设任意两个人的头发根数不一样多,则由 0 根,1 根,2 根,…,至少要排 13 亿根.而据生物学知,一个人不可能生长出 1 亿根头发,从而人数大于头发根数,所以结论成立.但有人说:"请把头发根数一样多的人找出来,"这显然是不行的,但不能因找不出来,就说明它不存在.又如,对一个特定的杏园有

满园春色关不住⇔∃一枝红杏,∋"这枝红杏出墙来".

总地说来,由于我们没有进入数学分析的学习,所以所举的例子都不是严密分析中的例子,这里只要求大家理解所用的思维方法.

数学分析这门课,是数学系的学生极为重要的课程.在数学类专业的研究生入学考试中,也是必考的课程之一.该课程具有课时长、内容多、难度大、综合性强及与其他学科联系广等特点.所以,学好数学分析,是衡量数学系学生数学水平的重要标志.

通过学习,我们要达到的基本目的是:

具有一定的自学能力,迎接社会的挑战.

祝大家在学习中取得好的成绩!