21 世纪高等院校经典教材同步辅导
ERSHIYISHIJIGAODENGYUANXIAOJINGDIANJIAOCAITONGBUFUDAO

# 理论力学（第七版）
# 全程导学及习题全解（II）

主　编／傅晋
副主编／鞠胜军　马晓燕　彭慧莲
主　审／苗明川

中国时代经济出版社
China Modern Economic Publishing House

21 世纪高 同步辅导
ERSHIYISHIJIGAODE TONGBUFUDAO

# 理论力学（第七版）全程导学及习题全解（II）

主　编／傅晋
副主编／鞠胜军　马晓燕　彭慧莲
主　审／苗明川

中国时代经济出版社
China Modern Economic Publishing House

图书在版编目(CIP)数据

理论力学(第七版)全程导学及习题全解. Ⅱ/傅晋主编. —北京：中国时代经济出版社，2012.1
(21 世纪高等院校经典教材同步辅导)
ISBN 978-7-5119-1015-8

Ⅰ.①理… Ⅱ.①傅… Ⅲ.①理论力学—高等学校—教学参考资料
Ⅳ.①031

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2011）第 274940 号

书　　名：理论力学(第七版)全程导学及习题全解(Ⅱ)
作　　者：傅　晋
出版发行：中国时代经济出版社
社　　址：北京市丰台区玉林里 25 号楼
邮政编码：100069
发行热线：(010)68320825　83910219
传　　真：(010)68320634　68320584
网　　址：www.cmepub.com.cn
电子邮箱：zgsdjj@hotmail.com
经　　销：各地新华书店
印　　刷：北京市昌平百善印刷厂
开　　本：787×1092　1/16
字　　数：160 千字
印　　张：9.75
版　　次：2012 年 9 月第 1 版
印　　次：2012 年 9 月第 1 次印刷
书　　号：ISBN 978-7-5119-1015-8
定　　价：17.00 元

本书如有破损、缺页、装订错误，请与本社发行部联系更换
版权所有　侵权必究

# 内容简介

本书是结合高等教育出版社出版、哈尔滨工业大学理论力学教研室编写《理论力学Ⅱ》(第七版)的学习辅导教材与习题全解参考书。全书紧扣教材内容,对各章的知识点进行了归纳和提炼,帮助读者梳理各章脉络,统揽全局,全面掌握基本知识。编写的重点在于对原教材全部习题(包括思考题)给出了精解详答,可以作为读者自我考核的标准与参考。在《理论力学Ⅱ》教材给出的习题的基础上,根据每章的知识重点,精选了有代表的例题,方便读者迅速掌握各章的重点和难点。

本书可作为工科各专业本科学生《理论力学Ⅱ》课程教学辅导材料和复习参考用书及工科考研强化复习的指导书,也可以作为《理论力学Ⅱ》课程教师的教学参考书。

# 前　言

《理论力学》是理工科学生必须学习和掌握的一门重要的基础学科，它是学好其他各专业基础课乃至专业课的基石，很多高等院校都将理论力学列为核心课程之一。在学习中，应注重理解和掌握理论力学的基本概念和规律，对所研究的问题建立起清晰的力学模型，有助于同学们分析和解决问题。为了帮助广大学生更好的学习和掌握《理论力学》课程的理论精髓和解题方法，我们根据哈尔滨工业大学理论力学教研室编写的《理论力学Ⅱ》(第七版)教材，编写了这本配套辅导教材。

本辅导教材根据《理论力学Ⅱ》教材中每章的内容，着重编写了以下几方面的内容：

主要内容和方法要点：对教材中的相应内容进行了系统、全面的归纳和总结，囊括了基本概念、主要定理和重要公式，有助于读者全面掌握基本知识，清晰把握各章知识的脉络。

典型例题讲解：精选具有代表性的重点例题进行讲解，分析问题的突破点，指引解决问题的思路，旨在帮助读者学会独立思考的方式和分析问题的办法。

习题及思考题全解：依据教材各章节的全部习题和思考题，进行详尽的解答。从学习者的角度，给出了解题的每一个步骤，以免忽略掉那些看似简单但对解题思路关键的细节问题。我们将原有习题做为补充题给予保留，放在每章题解之后。

本教材由傅晋、鞠胜军、马晓燕、彭慧莲等同志编写，全书由苗明川老师主审。本书编写过程中得到胡涛、王天磊等同志的大力协助，并得到中国时代经济出版社的领导和有关编辑的大力支持，为此表示忠心的感谢！

对《理论力学Ⅱ》教材作者哈尔滨工业大学理论力学教研室的老师们表示衷心的感谢！

由于编者水平有限，加之时间仓促，本书难免有缺点和疏漏，这些不妥之处，敬请各位专家及广大读者批评指正。

编　者

2012 年 8 月

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

# 目　录


**第一章　分析力学基础** ………… (1)

主要内容和方法要点 ………… (1)

典型例题讲解 ………… (2)

思考题解答 ………… (4)

习题全解 ………… (9)

**第二章　非惯性系中的质点动力学** ………… (40)

主要内容和方法要点 ………… (40)

典型例题讲解 ………… (40)

思考题解答 ………… (41)

习题全解 ………… (43)

**第三章　碰撞** ………… (57)

主要内容和方法要点 ………… (57)

典型例题讲解 ………… (57)

思考题解答 ………… (58)

习题全解 ………… (60)

**第四章　机械振动基础** ………… (73)

主要内容和方法要点 ………… (73)

典型例题讲解 ………… (74)

思考题解答 ………… (79)

习题全解 ………… (86)

**第五章　刚体定点运动、自由刚体运动、刚体运动的合成・陀螺仪近似理论** ………… (115)

主要内容和方法要点 ………… (115)

典型例题讲解 ………… (116)

思考题解答 ………… (118)

习题全解 ………… (120)

**第六章　变质量动力学** ………… (139)

主要内容和方法要点 ………… (139)

典型例题讲解 ………… (139)

思考题解答 ………… (140)

习题全解 ………… (142)

# 第一章　分析力学基础

## 主要内容和方法要点

### 1. 基本定义

(1) 广义坐标:确定质点系位置的独立参数称为广义坐标,在完整约束条件下,广义坐标的数目等于系统的自由度数.

(2) 广义力:与广义坐标 $q_k$ 对应的广义力为

$$Q_k = \sum_{i=1}^{n}\left(F_{x_i}\frac{\partial x_i}{\partial q_k}+F_{y_i}\frac{\partial y_i}{\partial q_k}+F_{z_i}\frac{\partial z_i}{\partial q_k}\right)$$

如果作用于质点系的力都是具有势力,势能为 $V$,则系统的广义力可写为

$$Q_k = -\frac{\partial V}{\partial q_k}\quad (k=1,2,\cdots N)$$

### 2. 一些条件

(1) 定常约束和非定常约束

若约束方程中不显含时间变量 $t$,则它称为定常约束,反之称为非定常约束.

(2) 理想约束

如果质点系所受的约束力在任何虚位移上作功的总和等于零,则此种约束称为理想约束. 即可写成

$$\sum_i \boldsymbol{N}_i\cdot\delta\boldsymbol{r}_i = 0$$

其中 $\boldsymbol{N}_i$ 是作用在第 $i$ 个质点上的约束力. $\delta\boldsymbol{r}_i$ 是第 $i$ 个质点的虚位移.

(3) 完整约束和非完整约束:

几何约束以及可积分成为几何约束的速度约束叫做完整约束. 不能积分成为几何约束的速度约束叫做非完整约束.

### 3. 基本结论

(1) 虚位移原理

具有定常理想的约束的质点系,其平衡的充要条件是所有的广义力等于零. 即

$$Q_1 = Q_2 = \cdots = Q_N = 0$$

对于主动力有势的情形,质点系平衡的充要条件可写为

$$\frac{\partial V}{\partial q_k} = 0\quad (k=1,2,\cdots N)$$

(2) 动力学普遍方程

设非自由质点系有几个质点,所有约束都是理想的,则有

$$\sum_{i=1}^{n}(\boldsymbol{F}_i - m\ddot{\boldsymbol{r}}_i)\cdot\delta\boldsymbol{r}_i = 0$$

**4. 常用工具**

(1) 第一类拉格朗日方程

第一类拉格朗日方程采用拉格朗日乘子法,将动力学普遍方程化成无约束方程组来求解,其方程具有如下形式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_j}\right)-\frac{\partial T}{\partial x_j}=Q_j+\sum_{i=1}^{s}\lambda_i\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\quad (j=1,2,\cdots,3n)$$

方程中共有 $3n+s$ 个未知量,须与 $s$ 个约束方程联立求解. 采用拉格朗日乘子法也可以求解具有非完整约束系统的动力学问题,因而具有更为普遍的应用性.

(2) 第二类拉格朗日方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_k}=Q_k\quad (k=1,2,\cdots,N)$$

第二类拉格朗日方程要求系统具有完整约束,它是一组标量形式的方程.

对于保守系统,广义力可以势能表示,记 $L=T-V$,则拉格朗日方程具有如下形式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_k}=0\quad (k=1,2,\cdots,N)$$

(3) 广义能量守恒

如果拉格朗日函数 $L$ 不显含 $t$,即

$$\frac{\partial L}{\partial t}=0$$

那么存在广义能量积分

$$\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\dot{q}_i-L=\text{常量}$$

特别地,对于定常系统,广义能量积分即为

$$T+V=\text{常量}$$

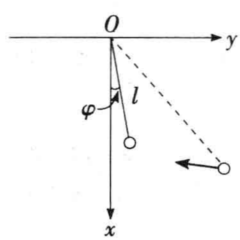
(4) 广义动量守恒

如果拉格朗日函数 $L$ 不显含某广义坐标 $q_k$,那么存在循环积分

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}=\text{常数}$$

## 典型例题讲解

**例 1—1** 单摆在一竖直平面内运动,摆长 $l$ 接已知规律 $l=l(t)$ 变化,用直角坐标和极生标两种方法写出运动微分方程.




**例 1—1 图**

**【解】** 取直角坐标 $oxy$ 如图,约束方程为:

$$f(x,y,t)=x^2+y^2-l^2(t)=0$$

求偏导可得:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=2x$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=2y$$

系统动能为:

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)$$

势能为：

$$V = - mgx$$

可求得广义力：

$$Q_x = -\frac{\partial v}{\partial x} = mg$$

$$Q_y = -\frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

代入第一类拉格朗日方程可得：

$$m\ddot{x} = mg + 2\lambda x$$

$$m\ddot{y} = 2\lambda y$$

取极坐标$(\rho,\varphi)$，则约束方程为：

$$f(\rho,\varphi,t) = \rho - l(t) = 0$$

动能为：

$$T = \frac{m}{2}[\dot{\rho}^2 + (\rho\dot{\varphi})^2]$$

势能为：

$$V = - mg\rho\cos\varphi$$

由此可求得广义力：

$$Q_\rho = -\frac{\partial v}{\partial \rho} = mg\cos\varphi$$

$$Q_\varphi = -\frac{\partial v}{\partial \varphi} = - mg\rho\sin\varphi$$

又有：

$$\frac{\partial f}{\partial \rho} = 1$$

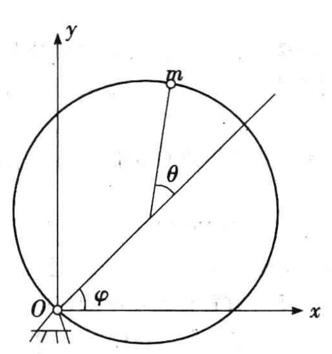
$$\frac{\partial f}{\partial \varphi} = 0$$

代入第一类拉格朗日方程可得：

$$m(\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2) = mg\cos\varphi + \lambda$$

$$m\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\rho^2\dot{\varphi}) = - mg\rho\sin\varphi$$

**例 1—2**　半径为 $a$ 的圆环以匀角速度 $\omega$ 绕 $O$ 轴在水平面内转动，环上有一质量为 $m$ 的质点，求质点运动微分方程的首次积分.




例 1—2 图

**【解】** 取 $xoy$ 坐标系，$\theta$ 角，$\varphi$ 角如图所示，其中

$$\varphi = \omega t$$

质点坐标为：

$$x = a\cos\omega t + a\cos(\omega t + \theta)$$

$$y = a\sin\omega t + a\sin(\omega t + \theta)$$

约束方程为：

$$(x - a\cos\omega t)^2 + (y - a\sin\omega t)^2 = a^2$$

它显含时间 $t$，是非定常系统.

因为 $V=0$,所以拉格朗日函数 $L=T$,

$$L=\frac{m}{2}(\dot{x}^2+\dot{y}^2)=\frac{m}{2}a^2\dot{\theta}^2+ma^2\omega(\dot{\theta}+\omega)(1+\cos\theta)$$

函数 $L(\theta,\dot{\theta},t)$ 中 $\theta$ 不是循环坐标,所以没有广义动量积分,但 $L$ 中不显含 $t$,所以有广义能量积分:

$$T_2-T_0=\text{const}$$

其中:

$$T_2=\frac{1}{2}ma^2\dot{\theta}^2$$

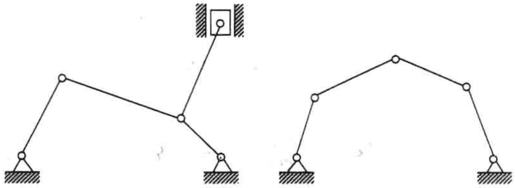
$$T_0=ma^2\omega^2(1+\cos\theta)$$

由此可得:

$$ma^2\left[\frac{1}{2}\dot{\theta}^2-\omega^2(1+\cos\theta)\right]=\text{const}$$

## 思考题解答

**1—1**　试分析图 1—1 所示两个平面机构的自由度数.



(a)　　(b)

**图 1—1**

**【答】**平面上的刚性杆件系统,限制在平面上的一根杆有三个自由度,每一个铰链约束减少 2 个自由度,槽中的滑块只有一个自由度,如果铰上连有几个杆,则减少 $2(n-1)$ 个自由度.

(a) 自由度为:

$$(4\times3)+1-4\times2-2\times(3-1)=1$$

(b) 自由度为:

$$4\times3-5\times2=2$$

**1—2**　广义力都具有力的量纲吗?广义力与广义坐标有什么联系?

**【答】**广义力并不一定具有力的量纲,比如在广义坐标中只让一个 $q_j$ 变动,则应有:

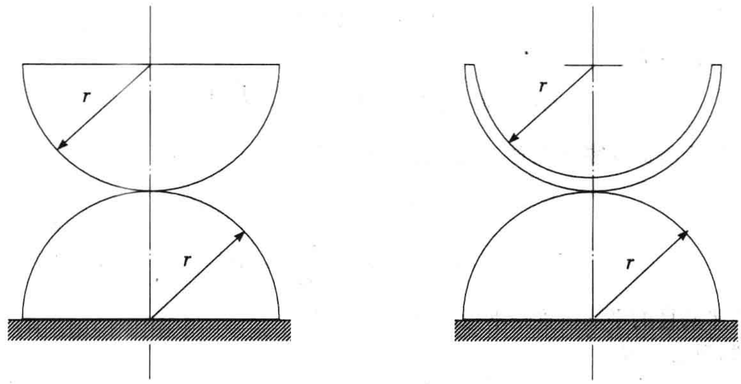
$$\mathrm{d}\omega=Q_j\,\mathrm{d}q_i$$

等号左边是功的量纲[力]×[长度],等号右边如果广义坐标 $q_j$ 取的是角度,那么,$Q_j$ 就应是力矩的量纲.

从上面可以看到,广义力的量纲与相应广义坐标的量纲相乘应该是功的量纲,而且在数值上,如果让相应的广义坐标作单位值改变,且其余坐标不变,则应广义力的数值等于外力做的功.

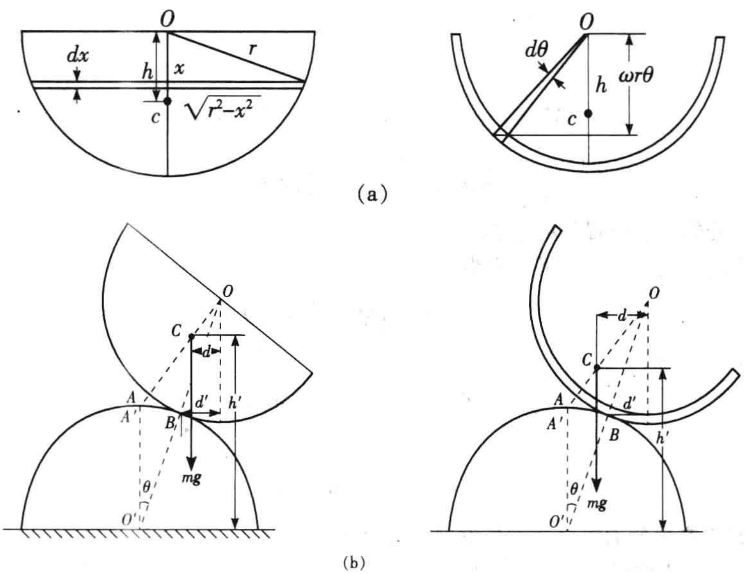
**1—3**　放置在固定半圆柱面上的相同半径的均质半圆柱体和均质半圆柱薄壳,如图 1—3 所示. 试分析哪一个能稳定地保持在图示位置.

**【答】**先求出两种情况下的势能然后利用它对广义坐标的二阶导数来判断稳定性. 如图所示,先求出半圆柱重心的位置,设重心到圆心的距离为 $h$,对均质半圆柱来说:




(a)　　　　(b)

**图 1—3**




**答 1—3 图**

$$h=\frac{\int_0^r\sqrt{r^2-x^2}\,x\mathrm{d}x}{\frac{1}{2}\pi r^2}=\frac{-\int_0^r\sqrt{r^2-x^2}\,\mathrm{d}(r^2-x^2)}{\frac{1}{2}\pi r^2}=\frac{\frac{-2}{3}(r^2-x^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^r}{\frac{1}{2}\pi r^2}=\frac{4r}{3\pi}$$

取两半圆圆心连线与竖直方向夹角 $\theta$ 做广义坐标，如答 1—3 图所示，$A$ 和 $A'$ 是在平衡位置处两半圆相接触的位置，有：

$$\widehat{AB}=\widehat{A'B}$$

从而有：

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

$$\angle AOB = \angle A'OB = \theta$$

上半圆柱的质心高度为：

$$h' = OO'\cos\theta - OC\cos 2\theta = \left(2\cos\theta - \frac{4}{3\pi}\cos 2\theta\right)r$$

取固定半圆柱的下底面为零势能面，上半圆柱的势能为：

$$V = mgh' = mgr\left(2\cos\theta - \frac{4}{3\pi}\cos 2\theta\right)$$

$$\left.\frac{\mathrm{d}^2 V}{\mathrm{d}\theta^2}\right|_{\theta=0} = mgr\left(-2\cos\theta + \frac{16}{3\pi}\cos 2\theta\right)\Big|_{\theta=0} < 0$$

从而可知均质半圆柱的平衡位置是不稳的.

对半圆壳来说，重心位置：

$$h = \frac{2\int_0^{\frac{\pi}{2}} r\cos\theta \cdot r\mathrm{d}\theta}{\pi r} = \frac{2}{\pi}r$$

质心高度：

$$h' = OO'\cos\theta - OC\cos 2\theta = \left(2\cos\theta - \frac{2}{\pi}\cos 2\theta\right)r$$

势能：

$$V = mgh' = mgr\left(2\cos\theta - \frac{2}{\pi}\cos 2\theta\right)$$

$$\left.\frac{\mathrm{d}^2 V}{\mathrm{d}\theta^2}\right|_{\theta=0} = mgr\left(-2\cos\theta + \frac{8}{\pi}\cos 2\theta\right)\Big|_{\theta=0} > 0$$

从而可知半圆壳的平衡位置是稳定的.

事实上均质半圆柱的质心的水平位置为：

$$d = OC\sin 2\theta = \frac{4r}{3\pi}\sin 2\theta$$

而 $B$ 点的水平位置为：

$$d' = OB\sin\theta = r\sin\theta$$

当 $\theta$ 很小时：

$$d \approx \frac{4r}{3\pi}2\theta < r\theta \approx d'$$

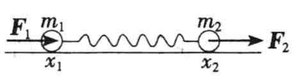
所以重力对 $B$ 点产生的力矩是使圆柱继续向下滑的.

而半圆壳质心的水平位置为：

$$d = OC\sin 2\theta = \frac{2}{\pi}r\sin 2\theta \approx \frac{4}{\pi}r\theta > r\theta \approx d'$$

重力产生的力矩是使圆壳向反方向运动的，所以半圆壳是稳定的但半圆柱不稳定.

**1—4**　动力学普遍方程中应包括内力的虚功吗？




**答 1—4 图**

**【答】**要包括，内力在方程中也是主动力的一部分，如果内力所做的虚功和为零，那么去掉内力当然没问题，但事实上内力虚功和往往不为零，看下面这个例子.

如答 1—4 图所示，两个小球用弹簧连接，质量分别为 $m_1, m_2$，其上作用有水平方向的力 $\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_2$，弹簧弹性系数为 $k$，取两个小球的位置 $x_1$，$x_2$ 作为广义坐标，则动力学普遍方程为：

$$[F_1 + k(x_2 - x_1 - l) - m\ddot{x}_1]\delta x_1 + [F_2 - k(x_2 - x_1 - l) - m\ddot{x}_2]\delta x_2 = 0$$

其中 $l$ 为弹簧松弛时的长度，弹性力 $k(x_2-x_1-l)$ 是系统的内力.

由于 $\delta x_1$ 与 $\delta x_2$ 独立，所以两个括号都应为零，即

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 = F_1 + k(x_2-x_1-l) \\ m\ddot{x}_2 = F_2 + k(x_2-x_1-l) \end{cases}$$

这与牛顿定律建立的方程完全一致，从而印证了内力是必须要写进动力学普遍方程的，否则就会得到：

$$(F_1 - m\ddot{x}_1)\delta x_1 + (F_2 - m\ddot{x}_2)\delta x_2 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m_1\ddot{x}_1 = F_1 \\ m_2\ddot{x}_2 = F_2 \end{cases}$$

这个结果完全无视弹簧的存在，显然是荒谬的，

**1—5**　如研究系统中有摩擦力，如何应用动力学普遍方程或拉格朗日方程？

**【答】**如果系统有摩擦力，则可以把它加入到主动力中，

$$\boldsymbol{F}_i + \boldsymbol{F}_{Ni} + \boldsymbol{F}_{Ii} + \boldsymbol{f}_i = 0$$
$$-\boldsymbol{F}_{Ni} = \boldsymbol{F}_i + \boldsymbol{F}_{Ii} + \boldsymbol{f}_i$$

由于约束理想：

$$\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{F}_{Ni}\delta\boldsymbol{r}_i = 0$$

从而

$$\sum_{i=1}^{n} (\boldsymbol{F}_i + \boldsymbol{f}_i + \boldsymbol{F}_{Ii})\delta\boldsymbol{r}_i = 0$$

即

$$\sum_{i=1}^{n} (\boldsymbol{F}_i + \boldsymbol{f}_i - m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i)\delta\boldsymbol{r}_i = 0$$

这便是动力学普遍方程.

在拉格朗日方程中，由于摩擦力无势，所以广义力不可能再表示为势函数偏导数的形式.

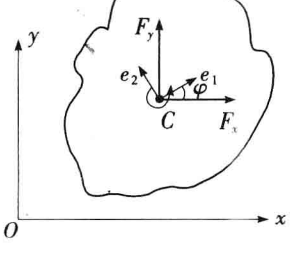
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j \qquad (j = 1,\cdots s)$$

其中

$$Q_j = \sum_{i=1}^{n} (\boldsymbol{F}_i + \boldsymbol{f}_i)\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \qquad (j = 1,\cdots s)$$

$s$ 是系统的自由度.

**1—6**　试用拉格朗日方程推导刚体平面运动的运动微分方程.




**答 1—6 图**

**【答】**如答 1—6 图所示，平面运动的刚体有 3 个自由度，取质心的坐标 $x,y$ 和在质心平动参考系中刚体的转角 $\varphi$ 作为广义坐标（$e_1ce_2$ 是固连在刚体上的标架），作用在刚体上的合力和合力矩分别为：

合力：

$$\boldsymbol{F} = F_x\boldsymbol{i} + F_y\boldsymbol{j}$$

它过质心，合力矩 $\boldsymbol{L}$，它是对过质心垂直于平面的轴的力矩. 下面求广义力，固定 $y,\varphi$，让 $x$ 变化 $\delta_x = 1$，元功为：

$$\delta\omega = F_x\delta_x = F_x$$

所以与 $x$ 对应的广义力为 $F_x$，同理与 $y$ 对应的广义力为 $F_y$，

固定 $x,y$，让 $\varphi$ 变化 $\delta\varphi = 1$，元功为：

$$\delta\omega = L\delta\varphi = L$$

所以与 $\varphi$ 对应的广义力为 $L$.

由冠尼格定理,质点系的动能为质量全部集中于质心时质心的动能加上系统相对质心平动参考系的动能,可知刚体的动能为:

$$T = \frac{1}{2}mv_C^2 + \frac{1}{2}J_C\omega^2 = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2}J_C\dot{\varphi}^2$$

其中 $J_C$ 是刚体相对质心转轴的转动惯量.

代入拉格朗日方程:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} = Q_k \quad (k = 1,2,\cdots N)$$

可得:

$$\begin{cases} m\ddot{x} = F_x \\ m\ddot{y} = F_y \\ J_C\ddot{\varphi} = L \end{cases}$$

这便是平面刚体的运动微分方程.

**1—7**　推导第二类拉格朗日方程的过程中,哪一步用到了完整约束的条件?

**【答】**完整约束是在选择广义坐标时用到的. 几何约束以及可以积分成几何约束的速度约束称为完整约束. 在坐标选择时,如果不加挑选,那我们通过动力学普遍方程可得到:

$$\sum_{j=1}^{3n}\left[Q_j - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_j}\right) + \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_j}\right]\delta x_j = 0$$

由于 $3n$ 个 $\delta x_j$ 相互不独立,所以不能拆成 $3n$ 个 $Q_j - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_j}\right) + \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_j} = 0$,如果要拆的话,必须加入拉格朗日乘子,从而得到:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_j} = Q_j + \sum_{i=1}^{k}\lambda_i\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \quad (j = 1,\cdots 3n)$$

这是第一类拉格朗日方程,也是对广义坐标不加挑选而得到的结果,如果我们对广义坐标加以恰当挑选的话,会使方程变得简单,这便是第二类拉格朗日方程的由来,事实上每个广义坐标 $x_i$ 都对应一个坐标曲面族

$$x_i = \text{常数} \quad \text{或} \quad x_i = \text{时间的函数}$$

比如直角坐标系中的坐标曲面族 $x =$ 常数就是一族平行于 $yOz$ 平面的平面,柱坐标系中 $\varphi =$ 常数的坐标曲面族就是一族过 $z$ 轴的竖面平面,$r =$ 常数的坐标曲面族是一族以 $z$ 轴为中心的竖直柱面,一般的广义坐标 $q_i =$ 常数可能对应的曲面族要复杂的多.

每个几何约束 $f_i = 0$ 对应一个 $3n$ 维空间中的曲面,我们可以选择恰当的广义坐标 $q_i$ 使其坐标曲面族正好包含 $f_i = 0$,也就是说,令 $q_i = f_i + c$ 或 $q_i = f_i + c(t)$,那么

$$q_i = c \quad \text{或} \quad q_i = c(t)$$

正好是曲面 $f_i = 0$,从而就有 $f_i$ 与 $q_j$ 无关$(i \neq j)$ 而只是 $q_j$ 的函数:

$$f_i \equiv q_i - c \text{ 或 } f_i \equiv q_i - c(t)$$

从而

$$\frac{\partial f_i}{\partial q_j} = 0 \quad (i \neq j),$$

那么对广义坐标 $q_{k+1}, q_{k+2}, \cdots, q_n$ 有

$$\frac{\partial f_i}{\partial q_j} = 0 \quad (i = 1,\cdots,k, j = k+1,\cdots,3n)$$

从而

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j + \sum_{i=1}^{k}\lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial q_j} = Q_j \quad (j = k+1,\cdots,3n)$$

这便是第二类拉格朗日方程,数目为 $3n-k$ 个,对应 $3n-k$ 个自由度,由此可见第二类拉格朗日方程和第一类拉格朗日方程并没有本质的区别,只是如果坐标选得好,那拉格朗日乘子项就会为零,从而成为第二类拉格朗日方程.

这里用到了一个条件就是约束 $f_i = 0$ 是几何约束,从而可依此选择 $q_i$ 使其坐标曲面族包含 $f_i = 0$,如果约束不是几何约束,比如是速度约束且无法积分成几何约束,那刚才的过程就走不通了,而这正是非完整约束的情况,在非完整约束下,约束方程不是几何方程. 事实上,假设系统存在一个完整约束:$f(q_1,\cdots,q_m) = 0$. 那么当其中任意 $m-1$ 个自变量已知时,剩下的一个只能够由 $f=0$ 确定的,即它可由另外的 $m-1$ 个坐标决定,从而对于描述系统而言这个坐标就是非必需的可以去掉. 但当系统存在一个非完整约束时,比如 $f(q_1,\cdots,q_m,\dot{q}_1,\cdots\dot{q}_m) = 0$. 已知任意 $m-1$ 个广义坐标,剩下的那一个坐标不能由 $f=0$ 求出,事实上如果假设能够由 $f(q_1,\cdots q_m,\dot{q}_1,\cdots\dot{q}_m) = 0$ 推出一个由 $m-1$ 个坐标表达剩下的那一个坐标的表述. 不防设为:$q_1 = g(q_2,\cdots,q_m)$. 那么这个等式 $q_1 = g(q_2,\cdots,q_m)$ 就是 $f(q_1,\cdots q_m,\dot{q}_1,\cdots\dot{q}_m) = 0$ 的一个积分而且是一个几何约束. 这与 $f(q_1,\cdots,q_m,\dot{q}_1,\cdots\dot{q}_m) = 0$ 不是几何约束矛盾. 这就意味着这 $m$ 个坐标对于描述系统而言都是必需的,因为任一个坐标不能仅从另外的 $m-1$ 个坐标求出,但它们又是不独立的,因为有关系 $f=0$ 存在. 所以此时广义坐标数要多于系统的自由度,当从动力学普遍方程出发时:设这些坐标数目为 $s$.

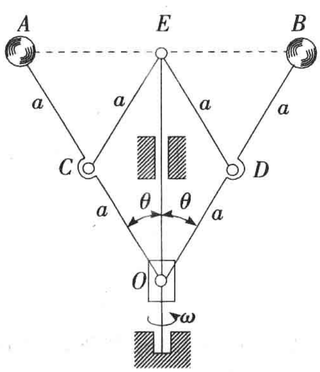
$$\sum_{j=1}^{s}\left[Q_j - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) + \frac{\partial T}{\partial q_j}\right]\delta q_j = 0$$

由于这 $s$ 个 $q_j$ 不独立,从而无法拆成 $Q_j - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial q_j}\right) + \frac{\partial T}{\partial q_j} = 0$,也就得不到第二类拉格朗日方程.

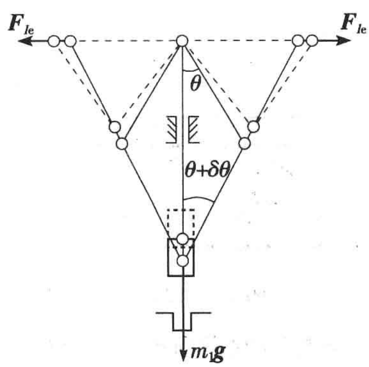
综上可知在推导第二类拉格朗的方程时,在坐标选择时就要用到约束的完整性,只有约束是完整的,才能找到 $3n-k$ 个独立的广义坐标.

## 习题全解

**1—1**　图示离心调速器以角速度 $\omega$ 绕铅直轴转动. 每个球质量为 $m_1$,套管 $O$ 质量为 $m_2$,杆重忽略不计. $OC = EC = AC = OD = ED = BD = a$. 求稳定旋转时,两臂 $OA$ 和 $OB$ 与铅直轴的夹角 $\theta$.




题 1—1 图




解 1—1 图

**【解】**利用虚功原理,设 $\theta$ 发生变化 $\delta\theta$,如解 1—1 图所示,在固连在转轴上的动参考系中,小球受功到惯性力.

$$F_{Ie}=m\omega^2(2a\sin\theta)$$

由虚功原理有:

$$2F_{Ie}[2a\sin(\theta+\delta\theta)-2a\sin\theta]-m_2 g[2a\cos\theta-2a\cos(\theta+\delta\theta)]=0 \quad ①$$

由于 $\delta\theta$ 足够小,所以有:

$$\sin(\theta+\delta\theta)=\sin\theta\cos\delta\theta+\cos\theta\sin\delta\theta\approx\sin\theta+\delta\theta\cos\theta$$

$$\cos(\theta+\delta\theta)=\cos\theta\cos\delta\theta-\sin\theta\sin\delta\theta\approx\cos\theta-\delta\theta\sin\theta$$

代入 ① 式有:

$$2m_1\omega^2(2a\sin\theta)2a\delta\theta\cos\theta-m_2 g2a\delta\theta\sin\theta=0$$

整理可得:

$$\cos\theta=\frac{m_2 g}{4am_1\omega^2}$$

**1－2** 一质量为 $m$ 的均质板置于圆柱体顶面上,两者之间无相对滑动. 试证明:当 $h>2R$ 时,系统的平衡是不稳定的.

**【解】**证明:如解 2－1 图所示,设木板倾斜角度为 $\theta$,则系统以 $\theta$ 为广义坐标的势能方程为:

$$V=\left[\left(R+\frac{h}{2}\right)\cos\theta+R\theta\sin\theta\right]mg$$

求二阶导数

$$\frac{d^2V}{d\theta^2}=\left[-\left(R+\frac{h}{2}\right)\cos\theta+2R\cos\theta-R\theta\sin\theta\right]mg$$

$$=\left(R\cos\theta-\frac{h}{2}\cos\theta-R\theta\sin\theta\right)mg$$

若系统不稳定,则 $\frac{d^2V}{d\theta^2}<0$

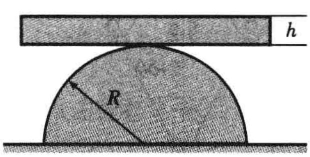
有 $$R\cos\theta-\frac{h}{2}\cos\theta-R\theta\sin\theta<0$$

又因为 $\theta$ 与 $\sin\theta$ 均为正,因此有 $R\cos\theta-\frac{h}{2}\cos\theta<0$

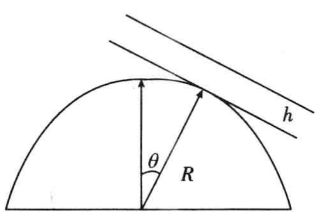
且 $\cos\theta>0$,则 $\cos\theta\left(R-\frac{h}{2}\right)<0$

即 $$R-\frac{h}{2}<0$$

得到 $2R<h$ 证毕

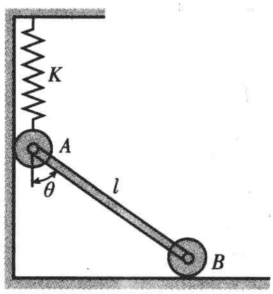



**题 1－2 图**

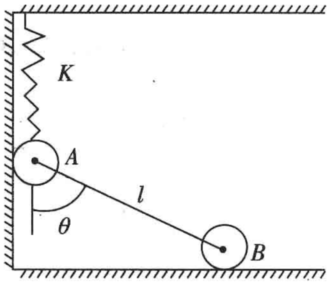



**解 1－2 图**

**1－3** 弹簧连杆机构如图所示,$AB$ 为均质杆,质量 $m=10\text{kg}$,长 $l=0.6\text{m}$,其余构件的质量不计. 不计摩擦,弹簧 K 的刚度系数 $k=200\text{N/m}$,$\theta=0$ 时弹簧为原长. 试求系统的平衡位置,并分析其稳定性.




题 1－3 图




解 1－3 图

【解】以 $\theta$ 为广义坐标，如解 3－1 图所示，则整个系统的势能为：

$$V=\frac{1}{2}kl^2(1-\cos\theta)^2+\frac{1}{2}mgl\cos\theta$$

当 $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}\theta}=0$ 时

有
$$kl^2(1-\cos\theta)(\sin\theta)-\frac{1}{2}mgl\sin\theta=0$$

由 $\sin\theta=0$，解得 $\theta=0$

再由
$$kl(1-\cos\theta)-\frac{1}{2}mg=0$$

代入数据 $k=200\mathrm{N/m}, m=10\mathrm{kg}, l=0.6\mathrm{m}, g=9.8\mathrm{m/s^2}$

有
$$200\times0.6(1-\cos\theta)-\frac{1}{2}\times10\times9.8=0$$

得到
$$\cos\theta=0.592,\quad \theta=53.7^\circ$$

解得 $\theta=0$ 和 $\theta=53.7^\circ$

$$\frac{\mathrm{d}^2V}{\mathrm{d}\theta^2}=kl^2[\cos\theta(1-\cos\theta)+\sin^2\theta]-\frac{1}{2}mgl\cos\theta$$

将 $\theta=0, m=10\mathrm{kg}, l=0.6\mathrm{m}, g=9.8\mathrm{m/s^2}$ 代入得 $\frac{\mathrm{d}^2V}{\mathrm{d}\theta^2}=-\frac{1}{2}mgl=-29.4\mathrm{N}<0$，即此位置为不稳定平衡.

将 $\theta=53.7^\circ$ 及 $m$、$l$、$B$、$g$ 代入得 $\frac{\mathrm{d}^2V}{\mathrm{d}\theta^2}=46.75\mathrm{N}>0$，即此位置为稳定平衡.

**1－4** 图示为车库大门结构原理图. 高为 $h$ 的均质库门 $AB$ 重量为 $P$，其上端 $A$ 可沿库顶水平槽滑动，下端 $B$ 与无重杆 $OB$ 铰接，并与弹簧 $CB$ 拉紧，$OB=r$，弹簧原长为 $r-a$. 不计各处摩擦，问弹簧的刚度系数 $k$ 为多大才可使库门在关闭位置处（$\theta=0$）不因 $B$ 端有微小位移干扰而自动弹动.

【解】以 $\theta$ 为广义坐标，如题 1－4 图，则系统势能为：

$$V=\frac{1}{2}k\Delta l^2+mgh \tag{1}$$

设 $\theta=0$ 为库门的零势能位置，在 $\theta$ 角位置时，门重心的高度为

$$h=EO'-BO'=\frac{1}{2}FB-r\cos\theta=\frac{1}{2}(FD-BD)-r\cos\theta$$

$$=\frac{1}{2}[2r-(r-r\cos\theta)]-r\cos\theta$$

$$=\frac{r}{2}(1-\cos\theta)$$

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com