脉冲系统的分析与控制

● 孙继涛　张　瑜　赵寿为　著

科学出版社

脉冲系统的分析与控制

孙继涛　张　瑜　赵寿为　著

科　学　出　版　社

北　京

内 容 简 介

本书介绍了作者所在团队的部分成果. 全书共分 7 章, 内容包括: 脉冲系统的有限时间稳定性、时滞脉冲系统的稳定性、一般时间尺度上(时滞)脉冲系统的稳定性、离散脉冲系统的稳定性、具有 Markov 跳的随机脉冲系统的稳定性、脉冲系统的边值问题与周期解、脉冲系统与切换脉冲系统的可控性和可观性、复域上脉冲系统的可达性与可观性、随机脉冲系统的镇定问题、随机脉冲系统与离散脉冲系统的 H_∞滤波器设计问题等. 阅读本书可使读者到达一些问题的研究前沿.

本书可作为大学数学、应用数学、控制与系统科学和其他有关专业的高年级本科生、研究生、教师与有关科研人员的参考书.

图书在版编目(CIP)数据

脉冲系统的分析与控制/孙继涛, 张瑜, 赵寿为著. —北京: 科学出版社, 2013. 1

ISBN 978-7-03-036329-9

Ⅰ. ①脉… Ⅱ. ①孙… ②张… ③赵… Ⅲ. ①脉冲系统-控制方法-高等学校-教学参考资料 Ⅳ. ①O231

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2013) 第 001292 号

责任编辑: 陈玉琢 / 责任校对: 钟 洋
责任印制: 钱玉芬 / 封面设计: 王 浩

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码: 100717
http://www.sciencep.com

骏杰印刷厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2013 年 1 月第 一 版 开本: B5 (720×1000)
2013 年 1 月第一次印刷 印张: 18 1/2
字数: 363 000

定价: 78.00 元

(如有印装质量问题, 我社负责调换)

前　言

脉冲现象作为一种瞬时突变现象, 大量存在于现代科技、社会科学各领域的实际问题中, 其数学模型往往是脉冲微分系统. 从控制论的角度去看, 又可以利用脉冲以达到控制系统的目的, 因此, 近几十年来关于脉冲系统的分析与脉冲控制问题取得了大量的研究成果, 但亟待解决的问题也还有很多.

脉冲微分方程的理论研究始于 20 世纪 60 年代 Mil'man 和 Myshkis 的工作, Lakshmikantham 等在 1989 年出版了第一本脉冲微分系统的专著 *Theory of Impulsive Differential Equations*, Yang 在 2001 年出版了两本脉冲控制的专著 *Impulsive Systems and Control: Theory and Application* 和 *Impulsive Control Theory*.

本书介绍近年来同济大学脉冲系统与脉冲控制团队的部分创新性成果, 内容包括脉冲系统的有限时间稳定性、时滞脉冲系统的稳定性、一般时间尺度上 (时滞) 脉冲系统的稳定性、离散脉冲系统的稳定性、具有 Markov 跳的随机脉冲系统的稳定性、脉冲系统的边值问题与周期解、脉冲系统与切换脉冲系统的可控性和可观性、复域上脉冲系统的可达性与可观性、随机脉冲系统的镇定问题、随机脉冲系统与离散脉冲系统的 H_∞ 滤波器设计问题等.

本书的部分内容获 2010 年高等学校科学研究优秀成果奖自然科学奖. 研究工作获国家自然科学基金 (60474008, 60874027, 60904027, 10926114, 61203128)、上海市自然科学基金、上海市 "晨光计划"(10CG18, 12CG65) 等的资助, 其出版得到了同济大学教材、学术著作出版基金委员会的资助, 在此一并表示感谢.

由于著者学识与研究水平有限, 书中难免有疏漏和不妥之处, 敬请读者批评指正.

孙继涛　张　瑜　赵寿为

2013 年 1 月于同济大学致远楼

目　录

第1章　绪　　论

1.1　研究背景

在自然界、人类社会的生产生活和科学技术领域 (如生物学、物理学、医学、经济学、金融学、控制理论等) 中, 许多动态系统具有下列特点: 在某些时刻系统的运动状态可能会发生突然改变, 并且这些突然改变所经历的时间相对于整个系统过程的运动时间而言是非常短暂的、可忽略不计的. 因而, 这种系统的运动状态发生的突然改变可以看成瞬时发生的, 也就是以脉冲的形式出现. 这种现象就称为所谓的"脉冲"现象, 其发生突变的瞬间称为脉冲时刻, 具有脉冲变化现象的系统称为脉冲系统. 常见的脉冲系统中, 一些具体的脉冲变化形式有:"鱼群生态系统的定时捕捞或补给"影响各种鱼群的数量的突然改变、"电路系统中开关的断开或闭合"会引起系统中电流的突然改变、"药剂的注射"导致生物体内病菌数量的突然变化、"国家调控政策的实施或国内外市场环境的改变"使得股票价格表现出的突变式的涨或跌等. 对于这类系统的研究, 如果仍然采用通常的无脉冲的微分方程来描述系统模型就不够合理, 因而利用具有脉冲作用的微分方程 (或差分方程) 来刻画其系统模型是比较理想的选择, 它能更真实地刻画和反映这些运动过程.

脉冲能引起系统状态的突然变化. 正因为如此, 在生态学、医学、经济、金融、化工、通信等各个领域的系统研究中, 脉冲有着广泛的应用. 人们根据自身的需求, 设计出脉冲控制使系统具有所期望的稳定性, 即制造合适的脉冲使之对于系统起到积极作用. 例如通过定时捕捞或补给可以控制鱼群的生态平衡, 通过某些开关的断开或闭合可以控制电路中电流的大小, 通过国家调控政策的实施使得资本市场保持积极稳定的状态等. 脉冲控制是基于脉冲微分方程的控制方法.

一般来说, 研究脉冲微分方程是以无脉冲微分方程的方法为依据, 并克服由于脉冲所引起的困难. 因此, 对于脉冲微分方程的研究无疑要比研究相应的无脉冲微分方程复杂得很多. 脉冲的作用表现在数学模型上, 就是适当的脉冲能使不稳定的系统变得稳定, 使无界的解变得有界等"积极"作用. 当然, 不恰当的脉冲能使稳定的系统变得不稳定, 起到相反的作用, 它符合任何事物都存在两面性的自然规律, 这也正是脉冲控制的意义和目的所在.

时滞是自然界中广泛存在的一种现象. 例如, 带式运输机中物料传输的延迟, 卫星通讯中信号传递的延迟, 网络系统中数据传送的延迟等都是典型的时滞现象. 时

滞是引起系统不稳定, 导致系统产生不良性能的主要因素之一, 因此研究具有时滞的脉冲系统是十分有必要的.

在控制系统中, 状态变化的规律性的直观表现在于系统的周期解的存在性、唯一性及其稳定性等特性. 在现实生活中, 有不少非线性系统可以由周期的脉冲系统来描述. 例如, 满足一定环境条件下生物种群的捕获系统, 往复运动的机械系统等.

一般的, 系统的研究对象分为确定性现象和不确定现象 (随机现象). 确定性现象是指对所关注的对象的结果能够预先确定的现象, 随机现象则是指对所关注的对象的结果不能预先确定的现象. 它们都大量存在于自然界和人类社会当中, 因而研究随机脉冲系统是十分必要的.

Stefan Hilger 在 1988 年的一篇博士论文中开始了对一般时间尺度的理论研究, 随后该理论发展迅速. 2001 年专著*Dynamic Equations on Time Scales: An Introduction with Applications*的发表标志着一般时间尺度理论达到了一个高峰. 这个理论的初衷就是要统一连续和离散的情况, 以往对于这两种情况不得不分开分析. 由于一般时间尺度的统一性, 一般时间尺度上脉冲系统的稳定性研究无疑对整个学科的发展具有重要的理论价值和应用前景.

由于计算机容量的快速增长和微电子技术的不断进步, 吸引系统分析与建模工作者、控制系统设计者尽可能采用数字计算机或微处理装置解决他们希望解决的问题. 而利用计算机或微处理装置对系统进行实时控制或对系统进行模拟、分析或控制系统设计时, 必须将时间变量考虑为离散变量. 因此要将所研究的系统考虑为离散系统. 由于上述原因, 自 20 世纪 50 年代以来, 离散控制系统的理论研究与实际应用工作逐渐受到控制理论界的广泛重视, 取得了很大成就, 使离散控制系统的分析设计成为控制理论的一个重要组成部分.

随着科学技术的迅猛发展, 人们着眼的系统规模也越来越大, 随机现象越来越复杂. 以往的理论体系已难以适用于这些新的问题, 导致脉冲系统研究同时包含离散事件过程和连续变量过程的混杂动态系统的需要. 目前, 混杂系统研究给控制理论及系统工程的研究带来了新的机遇和挑战. 其中切换系统和脉冲系统是两类典型的混杂系统, 吸引着大量来自于应用数学、计算机科学、系统工程等领域的科学家的兴趣.

本书的内容安排如下:

在本书的第 1 章简要介绍一下脉冲系统研究的背景意义及一些本书中常用的记号、定义和引理.

第 2 章研究脉冲系统的稳定性.

第 2.1 节给出一般时间尺度上脉冲系统稳定性、渐近稳定性、一致 Lipschitz 稳定性的判据.

第 2.2 节介绍线性脉冲系统和线性时变奇异脉冲系统的有限时间稳定性.

第 3 章研究时滞脉冲系统的稳定性.

第 3.1 节给出时滞脉冲线性系统的一致稳定性判据, 在脉冲点状态变量与时滞有关的时滞脉冲线性系统一致稳定的判据.

第 3.2 节研究脉冲泛函微分方程的稳定性. 给出脉冲泛函微分方程严格稳定的判据, 并给出在脉冲点状态变量与时滞有关的这类方程一致稳定、渐近稳定和实用稳定的判据.

第 3.3 节研究一般时间尺度上时滞脉冲系统的稳定性. 给出一般时间尺度上时滞脉冲系统一致稳定、渐近稳定以及不稳定的判据; 并给出双测度下一般时间尺度上时滞脉冲系统一致稳定和渐近稳定的判据.

第 4 章研究脉冲系统的可控性、可观性.

第 4.1 节给出分片线性时变脉冲系统的可控性、可观性分析.

第 4.2 节介绍复数域上脉冲系统的可达性、可观性分析.

第 4.3 节研究线性和线性时变切换脉冲系统的可控性、可观性.

第 5 章研究脉冲系统的边值问题和周期解.

第 5.1 节研究一阶脉冲微分方程的非线性边值问题.

第 5.2 节研究一阶脉冲泛函微分方程的非线性边值问题.

第 5.3 节介绍脉冲控制系统的平稳振荡.

第 5.4 节给出一类变时刻单种群捕获系统的周期解.

第 6 章研究随机脉冲系统的稳定与控制问题.

第 6.1 节介绍随机脉冲开关系统的 p 阶稳定性及一类线性随机脉冲滞后系统的稳定性.

第 6.2 节研究随机脉冲系统的 H_∞ 滤波. 研究一类带脉冲效应的随机 Markovian 切换系统 H_∞ 滤波问题以及一类不确定随机脉冲系统的鲁棒 H_∞ 滤波.

第 6.3 节研究随机脉冲系统的镇定与控制问题. 具体地, (1) 讨论一类带脉冲效应和 Markovian 切换的不确定随机系统的鲁棒稳定性, 设计了线性输出反馈控制器使系统鲁棒随机稳定, 并提出了计算线性输出反馈控制器的增益的方法; (2) 研究一类带 Markovian 切换的不确定随机脉冲系统的保成本控制问题; (3) 探讨一类带脉冲效应的随机非线性系统的 H_∞ 镇定问题, 给出系统的线性状态反馈镇定控制器的设计方法; (4) 讨论一类随机非线性 Markovian 切换系统的混杂控制问题, 首先给出了系统在脉冲控制下的镇定条件, 并在脉冲控制下, 设计系统的线性输出反馈控制器.

第 7 章研究离散脉冲系统的控制问题.

第 7.1 节讨论离散脉冲线性系统的 H_∞ 滤波和 H_∞ 输出反馈镇定. 分别研究了离散线性脉冲系统的 H_∞ 输出反馈镇定. 一类离散脉冲不确定系统的 H_∞ 滤波器设计以及分片离散脉冲系统的滤波器设计问题.

第 7.2 节给出离散脉冲时滞线性系统的镇定问题.

1.2 记　号

在本书中, 如无特别说明, 我们采用下面的记号:

(1) $\mathbf{R}^+ = [0, \infty)$.

(2) $\mathbf{Z}^+$ 表示正整数集合, $\mathbf{N}$ 表示自然数集合.

(3) $\mathbf{C}$ 表示复数域.

(4) I 表示单位矩阵.

(5) Q^{T} 矩阵 Q 的转置.

(6) $\lambda_{\max}(A)$, $\lambda_{\min}(A)$ 分别表示方阵 A 的最大特征值和最小特征值.

(7) 对于对称矩阵 X 与 Y; $X \geqslant Y$ (类似的, $X > Y$) 表示矩阵 $X - Y$ 是半正定的 (类似的, 正定的).

(8) $x(t^+) = \lim\limits_{h \to 0^+} x(t+h)$ 为状态右极限, $x(t^-) = \lim\limits_{h \to 0^+} x(t-h) = x(t)$ 为状态左极限.

(9) $E\{\cdot\}$ 表示随机变量 P 的期望算子.

(10) $\|\cdot\|$ 表示 Euclidean 向量范数.

(11) $L_2[0, +\infty)$ 表示二次可积向量函数空间, 类似的 $l_2[0, +\infty)$ 表示二次可和向量序列空间.

(12) $\|\cdot\|_{L_2}$ 表示 $L_2[0, +\infty)$ 空间范数; $\|\cdot\|_{l_2}$ 表示 $l_2[0, +\infty)$ 空间范数.

(13) 令 $(\Omega, \mathscr{F}, \mathscr{F}_t, P)$ 为一个完备的概率空间.

(14) 令 $\{r(t), t \geqslant 0\}$(也记为 $\{r_t, t \geqslant 0\}$) 是完备概率空间 $(\Omega, \mathscr{F}, \mathscr{F}_t, P)$ 上的右连续 Markovian 链, 取值于有限离散状态空间 $S = \{1, 2, \cdots, N\}$, 其生成元为 $\Gamma = (\gamma_{ij})_{N \times N}$, 转移概率为

$$P\{r(t+\Delta) = j | r(t) = i\} = \begin{cases} \gamma_{ij}\Delta + o(\Delta), & \text{若} \quad i \neq j, \\ 1 + \gamma_{ii}\Delta + o(\Delta), & \text{若} \quad i = j. \end{cases}$$

这里 $\Delta > 0$ 且有 $\lim\limits_{\Delta \to 0} o(\Delta)/\Delta = 0$. $\gamma_{ij} \geqslant 0$ $(i \neq j)$ 表示从模态 i 到模态 j 的转移速率, 而且 $\gamma_{ii} = -\sum\limits_{j \neq i} \gamma_{ij}$.

(15) 脉冲时刻记作 τ_k(或 t_k)$(k \in \mathbf{Z}^+)$, 满足 $0 < \tau_1 < \tau_2 < \cdots < \tau_k < \tau_{k+1} < \cdots$, $\lim\limits_{k \to +\infty} \tau_k = +\infty$.

(16) $PC(D, F)$ 表示函数 $\psi : D \to F$ 的集合, 且该类函数具有性质: 对于 $t \in D$, 当 $t \neq \tau_k$ 是连续的, 在不连续点 τ_k 是第一类的并且是左连续的.

(17) $S(\rho)=\{x\in\mathbf{R}^n|\|x\|<\rho\}$.

本书中, 基本定义与记号来源于相关参考文献, 将不逐一标记出处. 如无特别说明, 本书中采用下面的定义.

定义1.2.1 函数 $\varphi\in C[[0,r],\mathbf{R}^+]$ 是严格单调上升函数, 且有 $\varphi(0)=0$, 则称 φ 是属于 K 类函数也称楔类函数, 记为 $\varphi\in K$. 若 $\varphi\in C[\mathbf{R}^+,\mathbf{R}^+]$, 且 $\varphi\in K$, $\lim\limits_{r\to+\infty}\varphi(r)=+\infty$, 则称 φ 是属于 $K\mathbf{R}$ 类函数, 记为 $\varphi\in K\mathbf{R}$.

定义1.2.2 函数 $V:[t_0,+\infty)\times\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^+$ 属于 v_0 类, 如果满足下列条件:

(1) 函数 V 在每一个集合 $[\tau_{k-1},\tau_k)\times\mathbf{R}^n$ 上是连续的并且对于所有的 $t\geqslant t_0,V(t,0)=0$;

(2) $V(t,x)$ 在 $x\in\mathbf{R}^n$ 上是局部 Lipschitzian 的;

(3) 对于每一个 $k=1,2,\cdots$, 这里存在有限极限

$$\lim_{(t,y)\to(\tau_k^-,x)}V(t,y)=V(\tau_k^-,x),$$
$$\lim_{(t,y)\to(\tau_k^+,x)}V(t,y)=V(\tau_k^+,x),$$

并且满足 $V(\tau_k^+,x)=V(\tau_k,x)$.

定义1.2.3 令 $V\in v_0$, 对于 $t\in(\tau_{k-1},\tau_k)$, $V'(t,x(t))(D^+V(t,x(t)))$ 由下面的式子定义

$$V'(t,x(t))=D^+V(t,x(t))=\lim_{\delta\to0^+}\sup\frac{1}{\delta}\{V(t+\delta,x(t+\delta))-V(t,x(t))\}.$$

本书中常用的引理如下:

引理 1.2.1 线性矩阵不等式 $\begin{bmatrix}X & Y^{\mathrm{T}}\\ Y & Z\end{bmatrix}>0$ 或 $\begin{bmatrix}Z & Y\\ Y^{\mathrm{T}} & X\end{bmatrix}>0$ 等价于

$$Z>0,\quad X-Y^{\mathrm{T}}Z^{-1}Y>0,$$

其中 X,Z 是对称矩阵, 并且矩阵 X,Y 和 Z 具有适当的维数.

上述等价关系称为 Schur 补.

引理 1.2.2 [126] 若 P 为 n 阶正定矩阵, Q 为 n 阶对称矩阵, 则对任意的 $x\in\mathbf{R}^n$ 有

$$\lambda_{\min}(P^{-1}Q)x^{\mathrm{T}}Px\leqslant x^{\mathrm{T}}Qx\leqslant\lambda_{\max}(P^{-1}Q)x^{\mathrm{T}}Px.$$

引理 1.2.3[66] 设 X,Y 是具有适当维数的实矩阵, ε 是正常数, 则有

$$\pm2X^{\mathrm{T}}Y\leqslant\varepsilon X^{\mathrm{T}}X+\varepsilon^{-1}Y^{\mathrm{T}}Y.$$

第 2 章　脉冲系统的稳定性理论

2.1　一般时间尺度上脉冲系统的稳定性理论

首先给出一般时间尺度上脉冲系统的稳定性理论的一些基本概念. 这些概念主要来自文献 [8],[68].

设 T 是一般时间尺度 (一种非空的闭的实数集) 满足有最小元素 $t_0 \geqslant 0$, 没有最大元素.

定义2.1.1　映射 $\sigma, \rho : T \to T$ 分别定义为 $\sigma(t) = \inf\{s \in T : s > t\}$ 和 $\rho(t) = \sup\{s \in T : s < t\}$.

定义2.1.2　如果 $\sigma(t) > t$, 则 t 被称为右断的; 如果 $\rho(t) < t$, 则 t 被称为左断的. 如果 $t < \sup T$ 并且 $\sigma(t) = t$, 则称 t 是右密的; 如果 $t > \inf T$ 并且 $\rho(t) = t$, 则称 t 是左密的.

定义2.1.3　跳跃函数 $\mu : T \to [0, +\infty)$ 定义为

$$\mu(t) = \sigma(t) - t.$$

定义2.1.4　T 上的区间 $[a, b]^*$ 定义为

$$[a, b]^* = \{t \in T : a \leqslant t \leqslant b\}.$$

开区间和半开半闭区间类似定义.

定义2.1.5　假设 $f : T \to \mathbf{R}^n$ 是一个函数并且 $t \in T$. 定义 $f^{\Delta}(t)$ 为满足以下性质的值: 对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 t 的一个邻域 $U(U = (t - \delta, t + \delta) \cap T$, 这里 $\delta > 0$ 为固定的常数) 和所有的 $s \in U$, 满足

$$\|[f(\sigma(t)) - f(s)] - f^{\Delta}(t)[\sigma(t) - s]\| \leqslant \varepsilon \mid \sigma(t) - s \mid .$$

称 $f^{\Delta}(t)$ 为 f 在点 t 的 Δ 导数.

定义2.1.6　函数 $f : T \to \mathbf{R}^n$ 称为右密连续, 如果其在 T 的右密点连续并且在左密点极限存在. 这样的函数集合 $f : T \to \mathbf{R}^n$ 记为 C_{rd}.

定义2.1.7　设 $\phi : [-\tau, 0]^* \to \mathbf{R}^n$ 并且 $\phi \in C_{rd}$. 对任意的 $\rho > 0$, 设 $PC(\rho) = \{\phi \in PC : |\phi| < \rho\}$, 这里 $PC = PC([-\tau, 0]^*, \mathbf{R}^n)$.

定义2.1.8 对函数 $V \in C_{rd}[T \times \mathbf{R}^n, \mathbf{R}^+]$, 定义 $V^{\Delta}(t, x(t))$ 为对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 t 的一个邻域 $U(U = (t-\delta, t+\delta) \cap T$, 这里 $\delta > 0$ 为固定的常数) 和所有的 $s \in U$, 满足

$$|[V(\sigma(t), x(\sigma(t))) - V(s, x(\sigma(t)))] - \mu(t,s) f(t, x(t)) - \mu(t,s) V^{\Delta}(t, x(t))| \leqslant \varepsilon |\mu(t,s)|.$$

定义 $D^+V^{\Delta}(t, x(t))$ 为对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $U_\varepsilon \subset U$ 对所有的 $s \in U_\varepsilon, s > t$, 满足

$$\frac{1}{\mu(t,s)}[V(\sigma(t), x(\sigma(t))) - V(s, x(\sigma(t)) - \mu(t,s) f(t, x(t)))] < D^+V^{\Delta}(t, x(t)) + \varepsilon.$$

定义2.1.9 $V(t,x) : T \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^+$ 称为属于集合 V_0, 如果条件

(i) V 在 $(t_{k-1}, t_k]^* \times \mathbf{R}^n$ 上连续并且对每个 $x \in \mathbf{R}^n$, $k = 1, 2, \cdots$, 有极限 $\lim\limits_{(t,y) \to (t_k^+, x)} V(t,y) = V(t_k^+, x)$ 存在;

(ii) V 在 $x \in \mathbf{R}^n$ 上满足局部 Lipschitzian 条件并且 $V(t, 0) = 0$ 成立. 如果 $V \in V_0$ 并且在 $(t_{k-1}, t_k]^* \times \mathbf{R}^n$ 上是连续 Δ 可导的, 那么 V 称为属于集合 V_1.

定义2.1.10 泛函 $V(t, \phi) : T \times PC(\rho) \longrightarrow \mathbf{R}^+$ 称为属于集合 $\nu_0(\cdot)$, 如果条件

(i) V 在 $(t_{k-1}, t_k]^* \times PC(\rho)$ 上连续并且对所有的 $\varphi \in PC(\rho)$, 极限 $\lim\limits_{(t,\phi) \to (t_k^+, \varphi)} V(t, \phi) = V(t_k^+, \varphi)$ 存在, 这里 $k = 1, 2, \cdots$;

(ii) V 在 $PC(\rho)$ 上的每个完备集关于 ϕ 满足局部 Lipschitzian 条件并且 $V(t, 0) = 0$.
成立.

定义2.1.11 泛函 $V(t, \phi) : T \times PC(\rho) \longrightarrow \mathbf{R}^+$ 称为属于集合 $\nu_0^*(\cdot)$, 如果 $V(t, \phi) \in \nu_0(\cdot)$, 并且对任意的 $x \in PC((t_0 - \tau, \infty)^*, \mathbf{R}^n)$, $x \in C_{rd}$, $V(t, x_t)$ 连续, 这里 $t \geqslant t_0$, $t \in T$.

定义2.1.12 定义以下集合:

$$\Omega = \{\psi \in C(\mathbf{R}^+, \mathbf{R}^+) : \psi(0) = 0, \psi(s) > 0 \ \ (s > 0)\}.$$

$$\Omega^* = \{\psi \in C(\mathbf{R}^+, \mathbf{R}^+) : \text{非减}, \psi(0) = 0, \psi(s) > 0 \ \ (s > 0)\}.$$

定义2.1.13 函数 $p : T \to \mathbf{R}$ 称为回归的, 如果对 $t \in T$, 有 $1 + \mu(t)p(t) \neq 0$. 如果 p 是一个回归函数, 则指数函数 e_p 定义为

$$e_p(t,s) = \exp\left\{\int_s^t \xi_{\mu(\tau)}(p(\tau))\Delta\tau\right\}, \ s, t \in T,$$

这里

$$\xi_h(z) = \begin{cases} \dfrac{\mathrm{Log}(1 + hz)}{h}, & h \neq 0, \\ z, & h = 0, \end{cases}$$

其中 Log 是主对数函数.

2.1.1 一般时间尺度上脉冲系统稳定性研究

本小节我们将讨论如下两种一般时间尺度上脉冲系统的稳定性.

第一种是带固定时刻脉冲的:

$$\begin{cases} x^{\Delta} = f(t, x), & t \neq t_k, \\ x(t_k^+) = x(t_k) + I_k(x(t_k)), & t = t_k, \\ x(t_0^+) = x_0. \end{cases} \tag{2.1.1}$$

第二种是带变脉冲的:

$$\begin{cases} x^{\Delta} = f(t, x), & t \neq \tau_k(x), \\ x(t_k^+) = x(t_k) + I_k(x(t_k)), & t = \tau_k(x), \\ x(t_0^+) = x_0. \end{cases} \tag{2.1.2}$$

为了给出主要结论, 还需要给出一些定义.

定义2.1.14 如果函数 $\tau_k(x) : S(\rho) \to R^+, k \in Z^+$ 连续, 并且 $0 = \tau_0(x) < \tau_1(x) < \tau_2(x) < \cdots, \lim\limits_{k\to+\infty} \tau_k(x) = +\infty$, 定义 $G_k = \{(t, x) \in T \times \mathbf{R}^n : \tau_{k-1}(x) < t < \tau_k(x)\}$, 并且 $G = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} G_k$.

定义2.1.15 对 $t \in T, \alpha \in \mathbf{R}^+, V \in V_0, a \in K$, 定义集合

$$V_{t,\alpha}^{-1} = \{x \in S(\rho) : V(t^+, x) < a(\alpha)\}.$$

为了便于研究式 (2.1.1), 我们还需要一个引理. 考虑如下比较系统:

$$\begin{cases} u^{\Delta} = g(t, u), & t \neq t_k, \\ u(t_k^+) = \psi_k(u(t_k)), & t = t_k, \\ u(t_0^+) = u_0 \geqslant 0. \end{cases} \tag{2.1.3}$$

引理 2.1.1[8] 假设以下条件成立:

(i) $V \in C_{rd}[T \times \mathbf{R}^n, \mathbf{R}^+]$ 并且 $V(t, x)$ 关于 x 满足局部 Lipschitzian 条件, 这里 t 是右密的. 当 $t \in (t_k, t_{k+1}]^*, k = 1, 2, \cdots$ 时, 有 $D^+V^{\Delta}(t, x) \leqslant g(t, V(t, x))$;

(ii) 存在 $\psi_k \in C[\mathbf{R}^+, \mathbf{R}], \psi_k(r)$ 关于 r 非减并且满足 $V(t_k^+, x_k + I_k(x)) \leqslant \psi_k(V(t_k, x))$, 这里 $k = 1, 2 \cdots$;

(iii) $g(t, u)\mu(t) + u$ 关于 u 非减, 这里 $g \in C_{rd}[T \times \mathbf{R}^+, \mathbf{R}]$;

(iv) 系统 (2.1.3) 的最大解 $r(t) = r(t, t_0, u_0)$ 在 $t \geqslant t_0, t \in T$ 上存在.

则对系统 (2.1.1) 的任一个解 $x(t, t_0, x_0)$, 如果 $V(t_0, x_0) \leqslant u_0$, 就有

$$V(t, x(t)) \leqslant r(t), \quad t \geqslant t_0, \quad t \in T.$$

为了便于研究系统 (2.1.2), 需要假设以下一些条件成立, 以保证其解的存在和唯一性.

(H1) 函数 $f: T \times S(\rho) \to \mathbf{R}^n$ 在 T 上连续并且 $f(t,0)=0$; 存在常数 $L>0$, 满足对 $t\in T, x\in S(\rho), y\in S(\rho)$, 有 $\|f(t,x)-f(t,y)\| \leqslant L\|x-y\|$;

(H2) 函数 $I_k: S(\rho)\to \mathbf{R}^n, (k\in \mathbf{Z}^+)$ 都连续并且 $I_k(0)=0$;

(H3) 存在常数 $\rho_0\in(0,\rho)$, 满足如果 $x\in S(\rho_0)$, 则 $x+I_k(x)\in S(\rho), k\in\mathbf{Z}^+$;

(H4) 函数 $\tau_k(x): S(\rho)\to\mathbf{R}^+, k\in\mathbf{Z}^+$ 都连续并且 $0=\tau_0(x)<\tau_1(x)<\tau_2(x)<\cdots, \lim\limits_{k\to+\infty}\tau_k(x)=+\infty, \tau_k(x)\in T, k=1,2,\cdots$.

我们有以下主要结果.

定理 2.1.1 假设以下条件成立 $(t_k\in T, k=1,2,\cdots)$

(1) $V: T\times\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^+, V\in V_0, D^+V^{\Delta}(t,x)\leqslant g(t,V(t,x)), t\neq t_k$, 这里 $g: T\times\mathbf{R}^+\to\mathbf{R}$, $g(t,0)=0$, g 在 $(t_{k-1},t_k]^*\times\mathbf{R}^+$ 上连续并且对每个 $p\in\mathbf{R}^+$, $k=1,2,\cdots$, 有极限 $\lim\limits_{(t,q)\to(t_k^+,p)} g(t,q)=g(t_k^+,p)$ 存在;

(2) 存在 $\psi_k\in C[\mathbf{R}^+,\mathbf{R}]$ 使 $\psi_k(r)$ 关于 r 非减并且 $V(t_k^+, x_k+I_k(x))\leqslant\psi_k(V(t_k,x))$, $k=1,2,\cdots$;

(3) $g(t,u)\mu(t)+u$ 在 T 上关于 u 非减;

(4) $b(\|x\|)\leqslant V(t,x)\leqslant a(\|x\|)$ 这里 $(t,x)\in T\times\mathbf{R}^n$ 并且 $a,b\in K$,

则系统 (2.1.3) 的解的稳定性性质蕴涵着系统 (2.1.1) 的解的稳定性性质.

证明 假设系统 (2.1.3) 的平凡解稳定. 设 $\varepsilon>0$ 并且 $t_0\in T$, 则对于给定的 $b(\varepsilon)>0$, 存在 $\delta_1(t_0,\varepsilon)>0$, 满足如果 $0\leqslant u_0<\delta_1$, 则有 $u(t)=u(t,t_0,u_0)<b(\varepsilon), t\geqslant t_0$, 这里 $u(t)=u(t,t_0,u_0)$ 是系统 (2.1.3) 的任一个解.

设 $u_0=a(\|x_0\|)$ 并且选择 $\delta_2=\delta_2(\varepsilon)$, 满足 $a(\delta_2)<b(\varepsilon)$. 定义 $\delta=\min(\delta_1,\delta_2)$. 对此 δ, 我们有可以说如果 $\|x_0\|<\delta$, 则对 $t\geqslant t_0$ 有 $\|x(t)\|<\varepsilon$, 这里 $x(t)=x(t,t_0,x_0)$ 是系统 (2.1.1) 的任一个解.

如果不成立, 则存在系统 (2.1.1) 的解 $x(t)=x(t,t_0,x_0)$(这里 $\|x_0\|<\delta$), 满足存在一个 $t^*>t_0, t^*\in T$, 使 $\|x(t^*)\|\geqslant\varepsilon$, 而在 $t_0\leqslant t<t^*$ 上, 有 $\|x(t)\|<\varepsilon$. 对 $t_0\leqslant t\leqslant t^*$ 利用条件 (1), 条件 (2), 条件 (3) 和 $V(t_0)\leqslant u_0$, 由引理 2.1.1 可得

$$V(t,x(t))\leqslant r(t,t_0,a(\|x_0\|)),\quad t_0\leqslant t\leqslant t^*, t\in T,$$

这里 $r(t,t_0,a(\|x_0\|))$ 是系统 (2.1.3) 的最大解. 由条件 (4) 得到下列矛盾

$$b(\varepsilon)\leqslant b(\|x(t^*)\|)\leqslant V(t^*,x(t^*))\leqslant r(t^*,t_0,a(\|x_0\|))<b(\varepsilon),$$

这样就证明了系统 (2.1.1) 的解 $x=0$ 是稳定的.

接下来假设系统 (2.1.3) 的解 $u=0$ 是渐近稳定的, 则首先系统 (2.1.1) 的解 $x=0$ 是稳定的.

设 $\varepsilon>0$ 并且 $t_0\in T$. 由于系统 (2.1.3) 的解 $u=0$ 是吸引的, 则对于 $b(\varepsilon)>0$ 和 $t_0\in T$, 存在 $\delta_0=\delta_0(t_0)>0$ 和一个 $T_0=T_0(t_0,\varepsilon)$, 满足如果 $0\leqslant u_0<\delta_0$, 则有

$$u(t)=u(t,t_0,u_0)<b(\varepsilon),t\geqslant t_0+T_0,t\in T,$$

设 $\|x_0\|<\delta_0$, 由引理 2.1.1 可得

$$V(t,x(t))\leqslant r(t,t_0,a(\|x_0\|)),t\geqslant t_0,t\in T,$$

进而得到

$$b(\|x(t)\|)\leqslant V(t,x(t))\leqslant r(t,t_0,a(\|x_0\|))<b(\varepsilon),t\geqslant t_0+T_0,t\in T,$$

这就证明了系统 (2.1.1) 的解 $x=0$ 是吸引的. 所以系统 (2.1.1) 的解 $x=0$ 是渐近稳定的.

一致稳定和一致渐近稳定有类似的方法可同样得到. 这里不再赘述. ■

定理 2.1.2　假设以下条件成立:

(1) 条件 (H1)~ 条件 (H4) 成立;

(2) 存在 $V\in V_1$ 和 $b\in K$ 满足 $b(\|x\|)\leqslant V(t,x)$, 这里 $(t,x)\in T\times S(\rho)$, $V^{\Delta}(t,x)\leqslant 0$, 这里 $(t,x)\in G$, 当 $t=\tau_k(x)$ 时, $V(t^+,x+I_k(x))\leqslant V(t,x)$,

则系统 (2.1.2) 的平凡解是稳定的.

证明　设 $t_0\in T$ 和 $\varepsilon>0$ 是给定的. 由函数 V 的性质可知存在 $\delta=\delta(t_0,\varepsilon)$, 满足如果 $\|x\|<\delta$, 则有 $\sup|V(t_0^+,x)|<\min(b(\varepsilon),b(\rho_0))$. 设 $x_0\in S(\rho),\|x_0\|<\delta$, $x(t)=x(t,t_0,x_0)$ 是系统 (2.1.2) 的解. 则由条件 (2) 可得到 $V(t,x(t))$ 在 T 上非增. 可以得到

$$b(\|x(t,t_0,x_0)\|)\leqslant V(t,x(t))\leqslant V(t_0^+,x_0)<\min(b(\varepsilon),b(\rho_0)),$$

$$\|x(t,t_0,x_0)\|<\min(\varepsilon,\rho_0),$$

这里 $t\geqslant t_0,t\in T$. 所以系统 (2.1.2) 的解 $x=0$ 是稳定的. ■

定理 2.1.3　假设以下条件成立:

(1) 条件 (H1)~ 条件 (H4) 成立;

(2) $a(\|x\|)\leqslant V(t,x),b(\|x\|)\leqslant W(t,x)$, 这里 $(t,x)\in T\times S(\rho),a,b\in K$;

(3) $V^{\Delta}(t,x)\leqslant -c(W(t,x))$, 这里 $(t,x)\in G,c\in K$;

(4) 当 $t=\tau_k(x)$ 时, $V(t^+,x(t^+))\leqslant V(t,x)$;

(5) 函数 $W^{\Delta}(t,x)$ 在 $T \times S(\rho)$ 上有上确界 (或有下确界) 并且 $W(t^{+}, x + I_k(x)) \leqslant W(t,x)$ (或者 $W(t^{+}, x + I_k(x)) \geqslant W(t,x)$), 这里 $t = \tau_k(x)$,

则系统 (2.1.2) 的平凡解是渐近稳定的.

证明 设 $0 < \alpha < \rho_0 < \rho$, 则根据条件 (2) 有

$$V_{t,\alpha}^{-1} = \{x \in S(\rho) : V(t_0, x) < a(\alpha)\} \subset S(\alpha) \subset S(\rho),$$

这里 $t \geqslant t_0, t \in T$.

设 $t_0 \in T, x_0 \in V_{t_0,\alpha}^{-1}$ 并且 $x(t) = x(t, t_0, x_0)$, 是系统 (2.1.2) 的一个解. 我们将证明: 对任意的 $x_0 \in V_{t_0,\alpha}^{-1}$, 有

$$\lim_{t \to +\infty} \|x(t)\| = \lim_{t \to +\infty} \|x(t, t_0, x_0)\| = 0. \tag{2.1.4}$$

假设不成立, 则存在 $x_0 \in V_{t_0,\alpha}^{-1}, \beta > 0, r > 0$ 和一个序列 $\{t_k\}_1^{+\infty}$, $t_k \in T$, 满足 $t_k - t_{k-1} \geqslant \beta$, 并且 $\|x(t_k, t_0, x_0)\| \geqslant r$, 这里 $k \in \mathbf{Z}^{+}$. 则由条件 (2) 有

$$|W(t_k, x(t_k))| \geqslant b(r), \quad k \in \mathbf{Z}^{+}. \tag{2.1.5}$$

设

$$\sup_{(t,x) \in G} W^{\Delta}(t,x) < p \quad (p > 0). \tag{2.1.6}$$

选择 $\gamma > 0$, 满足 $\gamma < \min(\beta, b(r)/2p)$.

由式 (2.1.5), 式 (2.1.6) 和条件 (5), 得到对于 $t \in [t_k - \gamma, t_k]^{*}$, 有

$$\begin{aligned} W(t, x(t)) &\geqslant W(t_k, x(t_k)) + \int_{t_k}^{t} W(\tau, x(\tau))^{\Delta} \Delta\tau \\ &= W(t_k, x(t_k)) - \int_{t}^{t_k} W(\tau, x(\tau))^{\Delta} \Delta\tau \\ &\geqslant b(r) - p(t_k - t) \\ &\geqslant b(r) - p\gamma > b(r)/2. \end{aligned} \tag{2.1.7}$$

由式 (2.1.7)、条件 (3) 和条件 (5), 我们有

$$\begin{aligned} 0 &\leqslant V(t_j, x(t_j)) \\ &\leqslant V(t_0^{+}, x_0) + \int_{t_0}^{t_j} V(\tau, x(\tau))^{\Delta} \Delta\tau \\ &\leqslant V(t_0^{+}, x_0) - \int_{t_0}^{t_j} c(W(\tau, x(\tau)))\Delta\tau \\ &\leqslant V(t_0^{+}, x_0) - \sum_{k=1}^{j} \int_{t_k - \gamma}^{t_k} c(W(\tau, x(\tau)))\Delta\tau \end{aligned}$$