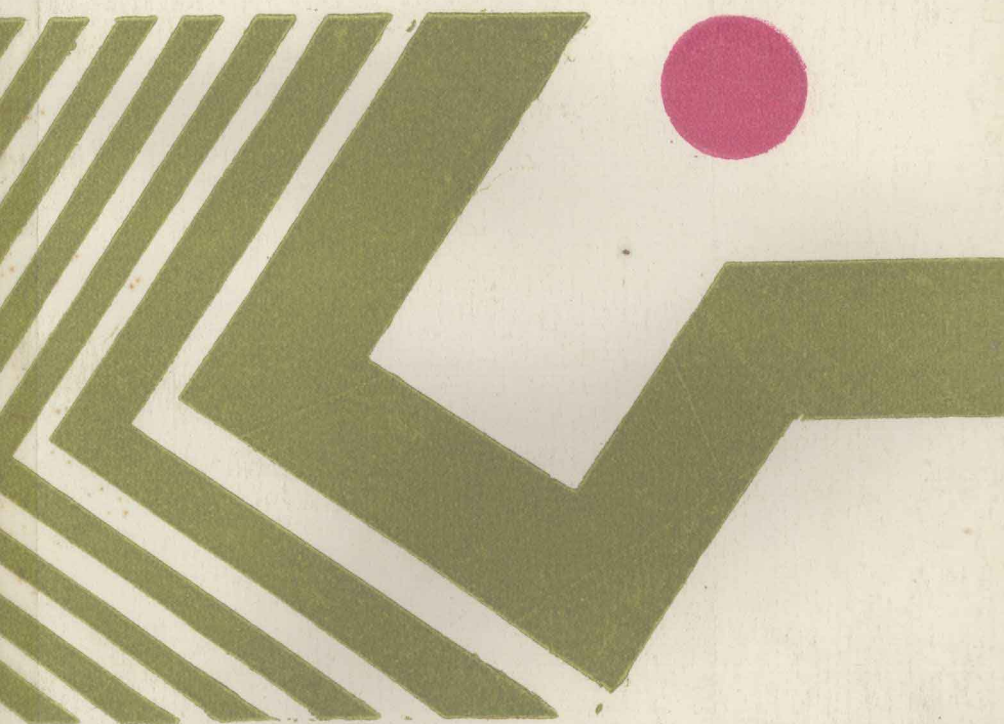


高等学校工科数学系列教材

概率论与数理统计

华东六省工科数学系列教材编委会 主编



辽宁科学技术出版社

高等学校工科数学系列教材

概率论与数理统计

华东六省工科数学系列教材编委会主编

辽宁科学技术出版社

(辽)新登字 4 号

高等学校工科数学系列教材

概率论与数理统计

Gailulun Yu Shulitongji

华东六省工科数学系列教材编委会 主编

辽宁科学技术出版社出版发行
(沈阳市和平区北一马路 108 号 邮政编码 110001)

南京佳美电脑印刷厂印刷

开本: 787×1092 1/32 印张: 11.675 字数: 262 千

1992 年 9 月第 1 版 1992 年 9 月第 1 次印刷

责任编辑: 吴鹏飞 宋纯智 版式设计: 于浪

封面设计: 曹太文

印数: 1—6,000

ISBN 7-5381-1578-1/O·75 定价: 6.90 元

华东六省工科数学系列教材编委会

编写院校 山东工业大学
山东纺织学院
无锡轻工业学院纺织分院
南京建筑工程学校
安徽机电学校

主任委员 陶永德 卢树铭
委 员 (以姓氏笔画为序)

王文蔚	王启泰	卢树铭	叶维平	朱功勤
许有信	刘冠军	刘镇国	李火林	季在平
张 彬	欧阳惠	程乃栋	蔡又中	

前 言

概率论与数理统计是研究随机现象统计规律的数学学科，在高等工业学校数学计划中是一门基础理论课。通过本课程学习，使学生掌握概率论与数理统计的基本理论，了解它的基本理论与方法，从而使学生初步掌握处理随机现象的基本思想与方法，培养学生运用概率统计方法分析和解决实际问题的能力。

本书是在综合各校教学经验的基础上，参照课委会制订的基本要求编写，在编写过程中力求贯彻“少而精”与理论联系实际的原则，在叙述上力求通俗易懂，便于自学。

全书共含：随机事件与概率、一维随机变量及其分布、二维随机变量及其分布、随机变量的数字特征、中心极限定理、数理统计的基本概念、参数估计、假设检验、方差分析、回归分析等十章。每章均配有适量的习题，书末附有常用概率统计用表和习题答案，讲完全书内容约需 64 学时，其中带 * 号的内容可酌情取舍。

参加本书编写人员为：李莲英（第一章）、刘爱奎（第二章）、山其骞（第三章）、宫佩珊（第四章）、吴瑞明（第五、六章）、李德凤、程相和（第七章）、毛如珍（第八章）、张天俊（第九章）、周胜生（第十章）。

本书由华东六省高等数学教学研究会理事长陶永德教授、工科数学课程教学指导委员会委员《工科数学》主编卢树铭教授主审，并由陶永德教授对全书作了修改和统稿工作。参加审稿的有：刘镇国、朱功勤、季在平、程乃栋、蔡又中等教授，还有金炳陶、刘冠军副教授也参加了部分稿件的审阅工作，对他们的辛勤劳动，表示衷心的感谢。

本书在编写过程中，得到了承担编审任务的各院校领导的大力

支持，得到了所在省的高等学校工科数学教研会的热情帮助，在此一并表示衷心的感谢。

由于时间仓促和水平所限，本书难免存在着不少缺点与错误，敬请广大读者批评指正。

华东六省高等数学教学研究会
工科数学系列教材编审委员会
1991年6月

目 录

第一章 随机事件与概率

第一节 随机事件.....	(2)
一、随机试验	(2)
二、随机事件与样本空间	(2)
三、事件间的关系与运算	(5)
第二节 事件的概率	(10)
一、古典概型与概率的古典定义	(11)
二、几何概率	(14)
三、事件的频率与概率的统计定义	(16)
第三节 条件概率与概率的乘法公式	(20)
一、条件概率	(20)
二、概率的乘法公式	(22)
三、全概率公式	(24)
四、贝叶斯公式	(28)
第四节 事件的独立性	(29)
第五节 贝努利概型与二项公式	(33)
习题一	(36)

第二章 一维随机变量及其分布

第一节 一维随机变量及其分布函数	(42)
一、随机变量的概念	(42)
二、随机变量的分布函数	(44)

第二节 一维离散型随机变量	(46)
一、两点分布	(49)
二、二项分布	(49)
三、泊松分布	(49)
四、超几何分布	(52)
第三节 一维连续型随机变量	(53)
一、均匀分布	(56)
二、正态分布	(58)
三、指数分布	(63)
四、 Γ 分布	(64)
第四节 随机变量的函数的分布	(65)
一、离散型随机变量函数的分布	(65)
二、连续型随机变量函数的分布	(67)
习题二	(72)

第三章 二维随机变量及其分布

第一节 二维随机变量	(76)
一、二维随机变量及其分布函数	(76)
二、二维离散型随机变量及其分布律	(78)
三、二维连续型随机变量及其分布密度	(80)
第二节 边缘分布	(84)
一、二维随机变量的边缘分布函数	(85)
二、二维离散型随机变量的边缘分布布	(85)
三、二维连续型随机变量的边缘分布密度	(87)
第三节 条件分布	(90)
一、二维离散型随机变量的条件分布	(90)
二、二维连续型随机变量的条件分布	(92)
第四节 相互独立的随机变量	(97)
一、两随机变量相互独立的定义和性质	(97)

二、二维离散型随机变量相互独立的判别法则	(98)
三、二维连续型随机变量相互独立的判别法则	(100)
第五节 随机向量函数的分布	(104)
一、 $Z=X+Y$ 的分布	(104)
二、 $Z=X^2+Y^2$ 和 $Z=\sqrt{X^2+Y^2}$ 的分布	(109)
三、 $M=\max(X, Y)$ 和 $N=\min(X, Y)$ 的分布 ...	(111)
习题三	(114)
第四章 随机变量的数学特征	
第一节 数学期望	(117)
一、数学期望的概念	(118)
二、几个常用分布的数学期望	(119)
三、随机变量函数的数学期望	(121)
四、数学期望的性质	(124)
第二节 方差	(126)
一、方差的概念	(126)
二、方差的性质	(128)
三、几个常用分布的方差	(130)
第三节 协方差与相关系数	(132)
一、协方差	(132)
二、相关系数	(133)
第四节 原点矩与中心矩	(137)
习题四	(139)
第五章 大数定律和中心极限定理	
第一节 大数定律	(143)
第二节 中心极限定理	(148)
习题五	(153)
第六章 数理统计的基本概念	

第一节 样本与统计量	(156)
一、总体、个体与简单随机样本	(156)
二、样本分布与格列文科定理	(157)
三、频率分布与直方图	(159)
四、统计量与样本的数字特征	(163)
第二节 抽样分布	(165)
一、 χ^2 分布	(165)
二、t 分布	(171)
三、F 分布	(173)
四、抽样分布	(176)
习题六	(179)
第七章 参数估计	
第一节 点估计	(181)
一、寻求估计量的方法	(182)
二、评定估计量的好坏标准	(193)
三、相合性	(197)
第二节 正态总体参数的区间估计	(199)
一、区间估计的意义	(199)
二、正态总体均值与方差的区间估计	(201)
三、二正态总体均值差和方差比的区间估计	(209)
习题七	(218)
第八章 假设检验	
第一节 假设检验的基本思想	(222)
一、假设检验的问题	(222)
二、假设检验的基本思想	(223)
三、假设检验中的两类错误	(225)
第二节 正态总体的均值检验	(226)
一、单正态总体的均值假设检验	(226)

二、两正态总体的均值假设检验	(227)
第三节 正态总体的方差检验	(229)
一、单正态总体的方差假设检验	(229)
二、均值 μ 未知, 要求检验 $H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2$	(230)
第四节 单侧假设检验	(232)
第五节 χ^2 拟合优度检验法	(235)
习题八	(242)
第九章 方差分析与正交设计	
第一节 方差分析的意义	(245)
第二节 单因素试验的方差分析	(248)
一、数学模型	(248)
二、偏差平方和的分解	(250)
三、 S_E 、 S_A 、 S_r 的统计特性	(251)
四、显著性检验	(253)
五、未知参数估计	(255)
六、举例	(256)
第三节 双因素试验的方差分析	(259)
一、双因素无重复试验的方差分析	(261)
二、双因素等重复试验的方差分析	(267)
第四节 正交试验设计及其方差分析	(275)
一、正交试验表	(276)
二、正交试验的方差分析	(281)
习题九	(289)
第十章 回归分析	
第一节 回归分析的意义	(292)
一、相关系数与回归模型	(292)
二、回归分析的主要任务	(294)
第二节 一元线性回归	(294)

一、对 α 、 β 及 σ^2 作参数估计, 建立回归方程	(295)
二、 $\hat{\beta}$ 的分布与 σ^2 的无偏估计	(299)
三、线性回归模型符合性的检验	(301)
四、利用回归方程进行预测和控制	(305)
五、可试性化的非线性回归问题	(309)
第三节 多元线性回归	(314)
一、对 $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_p$ 及 σ^2 作估计	(315)
二、多元线性回归模型适合性的检验	(320)
三、各个自变量作用主次的检验	(322)
四、自变量的选择—逐步回归法	(324)
五、预测与控制	(325)
习题十	(327)
习题答案	(330)

附表:

1、标准正态分布表	(346)
2、泊松分布表	(348)
3、t 分布表	(350)
4、 χ^2 分布表	(351)
5、F 分布表	(353)
6、相关系数检验表	(365)

第一章 随机事件与概率

人们在社会实践和科学实验中遇到的各种现象，都是在一定的条件下呈现出来的某种结果。把它们归纳起来，大体上可分成两类：

其中一类现象，在一定的条件下，事先就可以断言它是否会发
生，这类现象称为确定性现象。例如，“在一个大气压下，纯水加热到 100°C 时会沸腾”“随手向空中抛一石子，它会落回地面”等等，这些现象是在试验之前就可以肯定它们会发生的。又如“在一只装有若干白色小球的口袋中，任取一个小球，取出的是黑色小球”，这在取前就可以断言这种结果不会发生的。上述的这一类现象称为**确定性现象**。

另一类现象，在试验之前不能预定试验的结果，即在一定的条件下作一系列试验，而每次试验的可能结果不止一个，而且在每次试验之前无法知道试验的确切结果。这类现象称为**随机现象**。例如，“抛掷一枚均匀的硬币，正面（通常指标有币值的一面）朝上”这一现象，在抛掷之前，我们无法断言它一定发生或不发生，因此它是一种随机现象。

人们在长期实践中发现，随机现象虽然在个别的试验或观察中具有不确定性，但在大量地重复试验或观察下，它都呈现出某种规律性。例如有人进行多次重复地抛掷硬币的试验，发现“正面朝上”的次数约占总次数的一半。这种在大量重复的试验或观察中所呈现出的固有规律性，我们把它称为统计规律性。概率论和数理统计是研究随机现象统计规律性的一门数学学科。

第一节 随机事件

一、随机试验

我们把在一定条件下，所进行的实验和对自然现象与人类社会现象的观察都称为试验，在概率论中把具有下述特征的试验：

- (1) 在相同条件下可以重复进行；
- (2) 每次试验的可能结果不止一个，但每次试验的所有可能结果，是事先知道的；
- (3) 在完成试验之前不能确定会出现哪一种结果。

称为**随机试验**，为叙述方便，以后简称为**试验**。

下面举几个随机试验的例子。

例 1 在装有黑、白两种颜色小球的口袋中任取一球，观察所取小球的颜色。

例 2 记录某商店在一天内接待的顾客数。

例 3 某射手用步枪打靶，考察枪弹击中靶时，击中的位置与靶心的距离。

显然，上面三个试验都可以重复进行。对于例 1，试验的可能结果有 2 个：“取出的是黑色小球”或“取出的是白色小球”，而且在每次抽取前无法确定被取小球的颜色。对于例 2，每天接待的顾客数总是某个非负整数，它可以是 0，或 1，或 2，……。因此，所有可能记录的结果是非负整数中的某一个具体数值。但事先不能确定它是哪个数。对于例 3，枪弹击中靶的位置到靶心的距离总是某个非负实数，当然，它也不会超过靶子边缘到靶心的最大距离 R ，因此，试验的所有可能结果必定在区间 $(0, R]$ 上。但在每次射击之前不能确定击中的位置与靶心的距离在 $(0, R]$ 内取哪一个数值。上述三例所述的都是随机试验。

二、随机事件与样本空间

1. 随机事件

在随机试验中，对一次试验而言，某个可能发生也可能不发生的结果称为**随机事件**，简称事件，并用字母 A 、 B 、 C 、 $\dots$ 表示。显然，试验的每一个可能结果都是一个随机事件，例如在上例 2 中，该商店在一天中接待顾客数可能是 0, 1, 2, $\dots$ 等等，其中每一个可能结果都是随机事件，在一天中“接待顾客数不少于 100”，也是试验的一个可能结果，因而它也是随机事件，不过它是由顾客数 100, 101, $\dots$ 等随机事件组成的，当其中有一个事件在试验中发生了，“接待顾客数不少 100”这一事件便发生了，通常我们把前者诸事件称为**基本事件**，后者由若干个基本事件组成的事件称为**复合事件**。下面再来举一个例子。

例 4 连续两次抛掷同一枚硬币，观察正、反面朝上的情况，在这个试验中，所有可能结果有 4 个：(正, 正)，(正, 反)，(反, 正)，(反, 反)。其中 (正, 反) 表示“第一次掷得正面朝上，第二次掷得反面朝上”，其余类推。记事件

$$A_1 = (\text{正}, \text{正}), \quad A_2 = (\text{正}, \text{反}),$$

$$A_3 = (\text{反}, \text{正}), \quad A_4 = (\text{反}, \text{反}).$$

另记事件

$$B_1 = \text{“至少有一次正面朝上”}$$

$$= \{(\text{正}, \text{正}), (\text{正}, \text{反}), (\text{反}, \text{正})\} = \{A_1, A_2, A_3\}$$

$$B_2 = \text{“至少有一次反面朝上”}$$

$$= \{(\text{反}, \text{正}), (\text{反}, \text{反}), (\text{正}, \text{反})\} = \{A_3, A_4, A_2\}$$

那么， A_1 、 A_2 、 A_3 、 A_4 及 B_1 、 B_2 都是随机事件，而 A_1 、 A_2 、 A_3 、 A_4 是基本事件。 B_1 、 B_2 分别是由 A_1 、 A_2 、 A_3 及 A_2 、 A_3 、 A_4 组成的复合事件。

在试验中，一定会发生的结果称为必然事件，而把试验中一定不会发生的结果称为不可能事件。其实，两者都是确定性现象。为研究方便起见，不妨把它们看作是随机事件的特例，分别用字母 U 、 Φ 表示。

例 5 一口袋中装有两个红球和一个白球，从中任取两球，观察所取出的两个球的颜色。试验不涉及取球顺序，故可能结果只有两个：

$A = \text{“取出的两球都是红球”}$

$B = \text{“取出的两球一红一白”}$

显然它们是该试验仅有的两个基本事件。

事件

$C_1 = \text{“取出的两球中至少有一个是红球”}$

$C_2 = \text{“取出的两球都是白球”}$

其中 C_1 复合事件，它由 A 、 B 两个基本事件组成，只要 A 、 B 两事件之一发生， C_1 便发生了，因而是必然事件。而 C_2 不包括任何基本事件，因而是不可能事件。

2. 样本空间

前面已经指出，一个试验的所有可能结果事先是知道的。我们把由试验产生的所有基本事件构成的集合称为**样本空间**，把其中每一个基本事件称为**样本点**。样本空间也用字母 U 表示，样本空间中样本点的个数称为**样本容量**。

下面举例给出具体试验的样本空间。

例 6 设口袋中有三只编号分别为 1、2、3 的小球，其中 1、2 号为红球，3 号为白球，用无放回抽样（所谓“无放回”抽样就是从每次取出的一个球，不再放回袋中的情况下，继续从袋中抽取下一个球）的方法从中抽取两次试写出下列试验的样本空间。

(1) 观察顺序取出的小球颜色，

(2) 观察顺序取出的小球编号。

解 在试验 (1) 中，只考虑所取小球的颜色而不管它们的编号，所以它的三个基本事件是

$A_1 = (\text{红}, \text{白}), A_2 = (\text{红}, \text{红}), A_3 = (\text{白}, \text{红})$

由此产生的样本空间为

$U_1 = \{A_1, A_2, A_3\}$

在试验(2)中,我们关心的是小球的编号。所以,所有样本点共有六个。它们是

$$B_1 = (1, 2), \quad B_2 = (1, 3)$$

$$B_3 = (2, 1), \quad B_4 = (2, 3)$$

$$B_5 = (3, 1), \quad B_6 = (3, 2)$$

由此产生的样本空间为

$$U_2 = \{B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6\}$$

例6表明,在讨论样本空间时,要充分注意到试验条件和考察目的。读者不妨可以与例5进行比较,以体会其中的差别。

例7 观察电话交换台在单位时间内收到的呼唤次数,并写出它的样本空间。

解 电话交换台在单位时间内收到的呼唤次数总是非负整数,且可能是0次、1次、2次、……,所以所求的样本空间为

$$U_3 = \{\text{在单位时间内收到 } k \text{ 次呼唤 } k=0, 1, 2, \dots\}$$

例8 测试某工厂生产的电视机的使用寿命,并试写出例3的样本空间。

解 用 x 表示“射中的位置与靶心的距离”那么它的样本空间为

$$U_4 = \{x | 0 \leq x < \infty\}$$

在前面的例子中, U_1 、 U_2 都只含有有限个样本点,称这样的样本空间为有限的; U_3 含有无限多个样本点,但它们可以依次排列出来,我们称它含有可列多个样本点或称样本空间是可列的; U_4 也含有无限多个样本点,但它不能象 U_3 那样可以把所有样本点依次排列出来,我们称它含有不可列多个样本点,或称样本空间是不可列的。

三、事件间的关系与运算

在实际问题中,往往要在同一条件下研究不同的事件之间的关系。

由于每一随机事件都是由某些基本事件构成的,所以,在引入