2002版研究生入学考试数学辅导系列

最新修订版

数学

复习指南(理工类)

主编　陈文灯　黄先开

世界图书出版公司

数学

复习指南

2002版研究生入学考试**数学**辅导系列

最新修订版

数学复习指南

（理工类）

主　编　陈文灯　黄先开

副主编　曹显兵　施明存

柳金甫　俞元洪

世界图书出版公司

北京·广州·上海·西安

2001

图书在版编目(CIP)数据

数学复习指南(理工类)/陈文灯等主编. －北京:世界图书出版公司北京公司,2001.3
[2002 版研究生入学考试数学辅导系列]
ISBN 7-5062-3703-2

Ⅰ.数… Ⅱ.①陈… ②黄… Ⅲ.高等数学-研究生-入学考试-试题 Ⅳ.013-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(98)第 04959 号

数学复习指南(理工类)
(2002 版研究生入学考试数学辅导系列)

主　　编:陈文灯　黄先开
副 主 编:曹显兵　施明存　柳金甫　俞元洪
责任编辑:世　华
装帧设计:王元群

出　　版:世界图书出版公司北京公司
发　　行:世界图书出版公司北京公司
(北京朝内大街 137 号　电话 62619802　邮编 100010)
销　　售:各地新华书店
印　　刷:北京云西华都印刷厂

开　　本:787×1092 毫米　1/16
印　　张:35.375
字　　数:872 千字
版　　次:2001 年 3 月第 1 版　2001 年 3 月第 1 次印刷

ISBN **7-5062-3703-2/G·78**　　**定价:49.00 元**

前　言

本书是根据国家教委颁布的《考研数学复习大纲》、近几年统考命题的特点以及作者历年评阅试卷和在文登培训学校考研班辅导的经验而编写的一本应试之作。本书对难度较大的题型均作出思维定式处理。读者在短期内,对照本书归纳总结的方法、技巧,研读相关的典型例题便可融汇贯通、举一反三、触类旁通。为了适应考研数学命题的趋势,更加突出和完善以题型为纲的特点,在今年的修订中,本书在第二篇和第三篇中作了很大程度的修订,增加了许多新的题型和解题方法。另外,本书的篇前篇是我多年教学经验的浓缩,相信在考研中能起到关键作用。

本书特点如下:

(1)对大纲所要求的重要概念、公式、定理进行剖析,增强读者对这些内容的理解和记忆,避免犯概念性及错用公式、定理的错误。

(2)针对“考研”题型,安排相应章节,深入分析探究,总结出解题方法、技巧,便于读者掌握和应用。

(3)用“举题型讲方法”的格式代替各书普通采用的“讲方法套题型”的作法,使读者应试时思路畅通,有的放矢。

(4)介绍许多新的快速解题方法、技巧,大大提高读者的解题速度和准确性。同时,设计和改造出众多的新题,供读者即席练习。

(5)广泛采用表格法,使读者对要点一目了然。

勿庸置疑,本书是面向考研学生的,但由于本书概念准确、思路清晰、例题典型,近几年来有两类学生也积极使用本书:一是本科生学生,他(她)们借助本书复习课堂讲课内容,成效奇佳;二是专升本学生,因近几年专升本考试试题有多处与本书比较简单的例子不谋而合,不少专升本考试辅导老师用本书介绍的方法、技巧辅导学生,反映效果很好。

恳请广大读者和使用本书的老师们提出批评和指正。

陈文灯

2001.3

目　　录

篇前篇　高数解题的四种思维定势……………………………………………………(1)

第一篇　高等数学

第一章　函数·极限·连续……………………………………………………………(7)
第二章　导数与微分 ………………………………………………………………(43)
第三章　不定积分 …………………………………………………………………(57)
第四章　定积分及广义积分 ………………………………………………………(84)
第五章　中值定理的证明技巧……………………………………………………(126)
第六章　常微分方程………………………………………………………………(142)
第七章　一元微积分的应用………………………………………………………(168)
第八章　无穷级数…………………………………………………………………(194)
第九章*　矢量代数与空间解析几何 ……………………………………………(230)
第十章*　多元函数微分学 ………………………………………………………(248)
第十一章*　重积分 ………………………………………………………………(271)
第十二章*　曲线、曲面积分及场论初步 ………………………………………(296)
第十三章　函数方程与不等式证明………………………………………………(321)

第二篇　线性代数

第一章　行列式……………………………………………………………………(340)
第二章　矩阵………………………………………………………………………(353)
第三章　向量………………………………………………………………………(375)
第四章　线性方程组………………………………………………………………(393)
第五章*　矩阵的特征值与特征向量及二次型 …………………………………(412)

第三篇*　概率论与数理统计

第一章　事件的概率………………………………………………………………(433)
第二章　随机变量及其分布………………………………………………………(458)
第三章　随机变量的数字特征……………………………………………………(497)
第四章　大数定律和中心极限定理………………………………………………(522)
第五章　数理统计初步……………………………………………………………(529)

附录　2001 年硕士研究生入学考试数学试题一、二及参考答案 ……………………(547)

注：带＊篇、章，数二考生不必看。

篇前篇　高数解题的四种思维定势

先赠送给大家四句话，相信在考研中能起到关键作用，请考生务必牢记.

第一句话：在题设条件中给出一个函数 $f(x)$ 二阶和二阶以上可导，"不管三七二十一"，把 $f(x)$ 在指定点展成泰勒公式再说.

【例 1】 设 C 为实数，函数 $f(x)$ 满足下列两个等式：

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = C,\quad \lim_{x\to\infty} f'''(x) = 0.$$

求证：$\lim\limits_{x\to\infty} f'(x) = 0$，$\lim\limits_{x\to\infty} f''(x) = 0$.

［证明］ 由泰勒公式有

$$f(x+1) = f(x) + f'(x) + \frac{1}{2!}f''(x) + \frac{1}{6}f'''(\xi_1),\quad x < \xi_1 < x+1, \tag{①}$$

$$f(x-1) = f(x) - f'(x) + \frac{1}{2!}f''(x) - \frac{1}{6}f'''(\xi_2),\quad x-1 < \xi_2 < x. \tag{②}$$

由 ① + ② 得，$$f''(x) = f(x+1) + f(x-1) - 2f(x) + \frac{1}{6}f'''(\xi_2) - \frac{1}{6}f'''(\xi_1). \tag{③}$$

由 ① − ② 得，$$2f'(x) = f(x+1) - f(x-1) - \frac{1}{6}f'''(\xi_1) - \frac{1}{6}f'''(\xi_2). \tag{④}$$

当 $x\to\infty$ 时，$\xi_1\to\infty$，$\xi_2\to\infty$，于是有

$$\lim_{x\to\infty} f''(x) = 2C - 2C + \frac{1}{6}\times 0 - \frac{1}{6}\times 0 = 0,$$

$$\lim_{x\to\infty} 2f'(x) = C - C - \frac{1}{6}\times 0 - \frac{1}{6}\times 0 = 0.$$

因此　$\lim\limits_{x\to\infty} f'(x) = 0$，$\lim\limits_{x\to\infty} f''(x) = 0$.

【例 2】 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶导数连续，$f(0) = f(1) = 0$，并且当 $x \in (0,1)$ 时，$|f''(x)| \leqslant A$，求证：$|f'(x)| \leqslant \dfrac{A}{2}$，$x \in [0,1]$.

［证明］ 由于 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上具有二阶连续导数，则 $f(x)$ 可展成一阶泰勒公式，即

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2!}f''(\xi)(x - x_0)^2,\ \xi \text{ 在 } x \text{ 与 } x_0 \text{ 之间}.$$

取 $x = 0$，$x_0 = x$，则

$$f(0) = f(x) + f'(x)(0 - x) + f''(\xi_1)\frac{(0-x)^2}{2!},\quad 0 < \xi_1 < x \leqslant 1; \tag{①}$$

取 $x = 1$，$x_0 = x$，则

$$f(1) = f(x) + f'(x)(1 - x) + f''(\xi_2)\cdot\frac{(1-x)^2}{2!},\quad 0 < x < \xi_2 < 1. \tag{②}$$

② − ① 得

$$f'(x) = f(1) - f(0) + \frac{1}{2!}[f''(\xi_1)x^2 - f''(\xi_2)(1-x)^2]$$

$$\xlongequal{f(0)=f(1)=0}\frac{1}{2!}[f''(\xi_1)x^2-f''(\xi_2)(1-x)^2].$$

又 $\quad |f''(x)|\leqslant A, x\in(0,1),$ $\quad -A\leq f''(\xi_1)\leq A \quad -A\leq -f''(\xi_2)\leq A$

则 $\quad |f'(x)|\leqslant\frac{A}{2}[x^2+(1-x)^2]=\frac{A}{2}(2x^2-2x+1).$

当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时, $2x^2-2x+1\leqslant 1$. 故 $|f'(x)|\leqslant\frac{A}{2}$.

$=2x(x-1)+1$

【例3】 试证:若偶函数 $f(x)$ 在点 $x=0$ 的某邻域内具有连续的二阶导数,且 $f(0)=1$,则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|f(\frac{1}{n})-1\right|$ 绝对收敛.

<0 $\quad f'(-x)=-f'(x)$

[证明] 因 $f(x)$ 为偶函数,故 $f'(x)$ 为奇函数, $f'(0)=0$. 又

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2}\cdot x^2+o(x^2),$$

$$f\left(\frac{1}{n}\right)=1+\frac{f''(0)}{2}\cdot\frac{1}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

故 $$u_n=f\left(\frac{1}{n}-1\right)=\frac{f''(0)}{2}\cdot\frac{1}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

从而 $$|u_n|=\left|f(\frac{1}{n})-1\right|\sim\frac{|f''(0)|}{2n^2}.$$

由于级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{|f''(0)|}{2n^2}$ 收敛,故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 收敛,所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 绝对收敛.

【例4】 设函数 $f(x)$ 二阶可导,且 $f''(x)\geqslant 0, x\in(-\infty,+\infty)$,函数 u 在区间 $[0,a]$ $(a>0)$ 上连续,证明:

$$\frac{1}{a}\int_0^a f[u(t)]\mathrm{d}t\geqslant f\left[\frac{1}{a}\int_0^a u(t)\mathrm{d}t\right].$$

[证明] 令 $x_0=\frac{1}{a}\int_0^a u(t)\mathrm{d}t$,将 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处展成一阶泰勒公式:

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2!}f''(\xi)(x-x_0)^2.$$

由于 $f''(x)\geqslant 0$, 则 $f(x)\geqslant f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$.

令 $x=u(t)$,则 $f[u(t)]\geqslant f(x_0)+f'(x_0)[u(t)-x_0]$.

上式两边在 $[0,a]$ 上对 t 积分,得

$$\int_0^a f[u(t)]\mathrm{d}t\geqslant\int_0^a f(x_0)\mathrm{d}t+\int_0^a f'(x_0)[u(t)-x_0]\mathrm{d}t$$

$$=af(x_0)+f'(x_0)\left[\underbrace{\int_0^a u(t)\mathrm{d}t-ax_0}_{=0}\right]=af(x_0).$$

故 $$\frac{1}{a}\int_0^a f[u(t)]\mathrm{d}t\geqslant f\left[\frac{1}{a}\int_0^a u(t)\mathrm{d}t\right].$$

[另证] 因 $f''(x)\geqslant 0$,所以 $f(x)$ 为凸函数. 因此,具有性质:

$$f(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i)\leqslant\sum_{i=1}^{n}\lambda_i f(x_i)(\text{其中 }\lambda>0,\sum_{i=1}^{n}\lambda_i=1).$$

由 u 在 $[0,a]$ 上连续,从而可积. 将 $[0,a]$ 分成 n 等分,有

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{u(\xi_i)}{a}\cdot\frac{a}{n}=\frac{1}{a}\int_0^a u(t)\mathrm{d}t.$$

由 f 的凸性及连续性，有

$$f\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{u(\xi_i)}{a}\cdot\frac{a}{n}\right)\leqslant\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}f[u(\xi_i)]=\sum_{i=1}^{n}\frac{f(u(\xi_i))}{a}\cdot\frac{a}{n}.$$

对上式两边令 $n\to\infty$ 取极限，由可积性可得

$$f\left(\frac{1}{a}\int_0^a u(t)\mathrm{d}t\right)\leqslant\frac{1}{a}\int_0^a f(u(t))\mathrm{d}t.$$

第二句话：在题设条件或欲证结论中有定积分表达式时，则“不管三七二十一”先用积分中值定理对该积分式处理一下再说.

【例 5】 设 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上连续，在 $(0,2)$ 内二阶可导，且 $f(0)=f(\frac{1}{2})$，$2\int_{\frac{1}{2}}^{1}f(x)\mathrm{d}x=f(2)$. 证明：存在一个 $\xi\in(0,2)$，使 $f''(\xi)=0$.

［证明］ $f(2)=2\int_{\frac{1}{2}}^{1}f(x)\mathrm{d}x \xlongequal{\text{积分中值定理}} 2\times(1-\frac{1}{2})f(\eta)=f(\eta)$，$\frac{1}{2}\leqslant\eta\leqslant 1$.

于是 $f(x)$ 在 $[\eta,2]$ 上满足罗尔定理，即存在一个 $\xi_1\in(\eta,2)$，使

$$f'(\xi_1)=0. \qquad ①$$

又 $f(x)$ 在 $[0,\frac{1}{2}]$ 上满足罗尔定理，于是存在一个 $\xi_2\in(0,\frac{1}{2})$，使

$$f'(\xi_2)=0. \qquad ②$$

由 ①，② 可知 $f'(\xi_1)=f'(\xi_2)$.

再对 $f'(x)$ 在 $[\xi_2,\xi_1]$ 上使用罗尔定理，于是 $\exists\,\xi\in(\xi_2,\xi_1)\subset(0,2)$，使 $f''(\xi)=0$.

【例 6】 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上是非负、单调递减的连续函数，且 $0<a<b<1$，证明：

$$\int_0^a f(x)\mathrm{d}x\geqslant\frac{a}{b}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

［证明］ 由积分中值定理

$$\int_0^a f(x)\mathrm{d}x=af(\xi_1)\geqslant af(a),\quad \xi_1\in[0,a],$$

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=(b-a)f(\xi_2)\leqslant(b-a)f(a),\quad \xi_2\in[a,b].$$

于是
$$\frac{1}{a}\int_0^a f(x)\mathrm{d}x\geqslant f(a)\geqslant\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x>\frac{1}{b}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

故
$$\int_0^a f(x)\mathrm{d}x\geqslant\frac{a}{b}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

［另证］ $\int_0^a f(x)\mathrm{d}x\geqslant\frac{a}{b}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \iff b\int_0^a f(x)\mathrm{d}x\geqslant a\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$

令 $F(x)=b\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-x\int_x^b f(t)\mathrm{d}t$，则

$=(b-x)f(x)-\int_x^b f(t)\mathrm{d}t+2xf(x)$

$$F'(x)=bf(x)-\int_x^b f(t)\mathrm{d}t+xf(x)=\int_x^b f(x)\mathrm{d}t-\int_x^b f(t)\mathrm{d}t+2xf(x)$$

$x\le t\le b$，$f(x)$单调减

$$=\int_x^b[f(x)-f(t)]\mathrm{d}t+2xf(x)\geqslant 0,(\text{由于 } f(x)-f(t)\geqslant 0,f(x)\geqslant 0).$$

所以 $F(x)$ 单调递增,又 $F(0)=0$,故

$$F(a)>F(0)=0,\text{即 } b\int_0^a f(x)\mathrm{d}x-a\int_a^b f(x)\mathrm{d}x>0,$$

亦即 $$\int_0^a f(x)\mathrm{d}x \geqslant \frac{a}{b}f(x)\mathrm{d}x.$$

第三句话:在题设条件中函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,在 (a,b) 内可导,且 $f(a)=0$ 或 $f(b)=0$ 或 $f(a)=f(b)=0$,则"不管三七二十一"先用拉格朗日中值定理处理一下再说.

$$f(x)\xlongequal{f(a)=0}f(x)-f(a)=f'(\xi)(x-a),\quad a<\xi<x.$$

或 $$f(x)\xlongequal{f(b)=0}f(x)-f(b)=f'(\xi)(x-b),\quad x<\xi<b.$$

若 $f(a)=f(b)=0$,则 $$\begin{cases}f(x)=f(x)-f(a)=f'(\xi_1)(x-a), & a<\xi_1<x,\\ f(x)=f(x)-f(b)=f'(\xi_2)(x-b), & x<\xi_2<b.\end{cases}$$

【例 7】 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有连续的导数,且 $f(a)=f(b)=0,M=\max\limits_{x\in[a,b]}|f'(x)|$,试证:$\dfrac{4}{(b-a)^2}\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\leqslant M$.

[证明] $f(x)\xlongequal{f(a)=0}f(x)-f(a)=(x-a)f'(\xi_1),a<\xi_1<x$,则

$$|f(x)|=(x-a)|f'(\xi_1)|\leqslant(x-a)M.$$

同理 $$|f(x)|\leqslant(b-x)M.$$

于是 $$\int_a^b|f(x)|\mathrm{d}x=\int_a^{\frac{a+b}{2}}|f(x)|\mathrm{d}x+\int_{\frac{a+b}{2}}^b|f(x)|\mathrm{d}x$$

$$\leqslant\int_a^{\frac{a+b}{2}}(x-a)M\mathrm{d}x+\int_{\frac{a+b}{2}}^b(b-x)M\mathrm{d}x=\frac{(b-a)^2}{4}M.$$

故 $$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_a^b|f(x)|\mathrm{d}x\leqslant\frac{(b-a)^2}{4}M.$$

即 $$\frac{4}{(b-a)^2}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\leqslant M.$$

【例 8】 已知在 $[0,a]$ 上 $|f''(x)|\leqslant M$,且 $f(x)$ 在 $(0,a)$ 内取最大值,试证:

$$|f'(0)|+|f'(a)|\leqslant Ma.$$

[证明] 设 $f(c)=\max\limits_{x\in(0,a)}\{f(x)\}$,则 $f'(c)=0$.(费尔马定理)

对 $f'(x)$ 在 $[0,c]$ 与 $[c,a]$ 内分别用拉格朗日中值定理,有

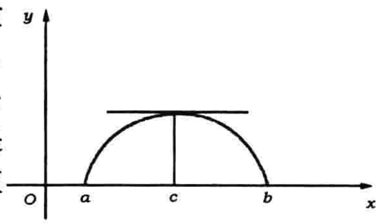
$$f'(c)-f'(0)=f''(\xi_1)c,\quad 0<\xi_1<c,$$
$$f'(a)-f'(c)=f''(\xi_2)(a-c),\quad c<\xi_2<a.$$

于是 $$|f'(0)|=|f''(\xi_1)c|\leqslant Mc,$$
$$|f'(a)|=|f''(\xi_2)(a-c)|\leqslant M(a-c).$$

故 $$|f'(0)|+|f'(a)|\leqslant Mc+M(a-c)=Ma.$$

【例 9】 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有连续的 $f''(x)$，且 $f''(x)<0$，$f(a)=f(b)=0$，则在 (a,b) 上 $f(x)>0$，且

$$\int_a^b\left|\frac{f''(x)}{f(x)}\right|\mathrm{d}x>\frac{4}{b-a}.$$



［证明］ 由 $f''(x)<0$ 可知，$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上是凹函数（图形上凸）；由凹函数性质知，$f(x)$ 大于连接 $(a,f(a))$，$(b,f(b))$ 线段上点的纵坐标. 而此线段所在直线即为 $y=0$（x 轴），所以在 (a,b) 上 $f(x)>0$. 再由 $f''(x)<0$ 知，$f'(x)$ 是严格单调减少的，从而知 ~~$f(x)$~~ $f'(x)$ 在 (a,b) 内有唯一的极大值点，记为 $x=c$. 此时 $f'(c)=0$，如右图所示，而在 (a,c) 上，$f'(x)>0$，在 (c,b) 上 $f'(x)<0$. 由拉格朗日中值定理，当 $x\in[a,c]$ 时，

$$f(x)=f'(\xi_1)(x-a)+f(a),\quad \xi_1\in(a,x).$$

由 $f'(x)$ 严格递减，$f'(\xi_1)<f'_+(a)$，注意到 $f(a)=0$，有

$$f(x)<f'_+(a)(c-a),x\in[a,c].$$

当 $x\in[c,b]$ 时，同理可得

$$f(x)<(-f'_-(b)(b-c),x\in[c,b].$$

于是

$$\frac{1}{f(x)}>\frac{1}{(c-a)f'_+(a)},x\in[a,c],$$

$$\frac{1}{f(x)}>\frac{1}{(b-c)(-f'_-(b))},x\in[c,b].$$

则

$$\int_a^b\left|\frac{f''(x)}{f(x)}\right|\mathrm{d}x=-\int_a^b\frac{f''(x)}{f(x)}\mathrm{d}x=\int_a^c\frac{-f''(x)}{f(x)}\mathrm{d}x+\int_c^b\frac{-f''(x)}{f(x)}\mathrm{d}x$$

$$>\int_a^c\frac{-f''(x)}{(c-a)f'_+(a)}\mathrm{d}x+\int_c^b\frac{-f''(x)}{(b-c)(-f'_-(b))}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{(c-a)f'_+(a)}[f'_+(a)-f'(c)]+\frac{1}{(b-c)(-f'_-(b))}[f'(c)-f'_-(b)]$$

$$=\frac{1}{c-a}+\frac{1}{b-c}=\frac{b-a}{(c-a)(b-c)}>(b-a)\frac{1}{\left(\frac{b-a}{2}\right)^2}=\frac{1}{b-a}.$$

第四句话：对定上限或变上限积分，若被积函数或其主要部分为复合函数，则“不管三七二十一”先做变量替换使之成为简单形式 $f(u)$ 再说.

【例 10】 求下列函数的导数（设 $f(u)$ 是 u 的连续函数）：

(1) $F(y)=\int_0^y f(x-y)\mathrm{d}x$，求 $F'(y)$； (2) $F(x)=\int_0^{x^2}tf(x-t)\mathrm{d}t$，求 $F'(x)$；

(3) $F(x)=\int_0^1 f(te^x)\mathrm{d}t$，求 $F'(x)$； (4) $F(x)=\int_0^{x^2}xf(x+t)\mathrm{d}t$，求 $F'(x)$.

［解］ (1) $F(y)\xlongequal{\text{令 } u=x-y}\int_{-y}^0 f(u)\mathrm{d}u$，则 $F'(y)=-f(-y)\cdot(-1)=f(-y)$.

(2) $F(x)\xlongequal{\text{令 } u=x-t}\int_x^{x-x^2}(x-u)f(u)(-\mathrm{d}u)$

$$= -x\int_x^{x-x^2} f(u)\mathrm{d}u + \int_x^{x-x^2} uf(u)\mathrm{d}u,$$

则
$$F'(x) = -\int_x^{x-x^2} f(u)\mathrm{d}u - x[f(x-x^2)\cdot(1-2x) - f(x)]$$
$$+ (1-2x)(x-x^2)f(x-x^2) - xf(x)$$
$$= \int_{x-x^2}^{x} f(u)\mathrm{d}u + \cancel{x}(2x-1)f(x-x^2).$$

(3) $F(x) \xlongequal{令\ u = te^x} \int_0^{e^x} f(u)\dfrac{1}{e^x}\mathrm{d}u = \dfrac{1}{e^x}\int_0^{e^x} f(u)\mathrm{d}u = e^{-x}\int_0^{e^x} f(u)\mathrm{d}u$,

则
$$F'(x) = -e^{-x}\int_0^{e^x} f(u)\mathrm{d}u + e^{-x}f(e^x)\cdot e^x = f(e^x) - e^{-x}\int_0^{e^x} f(u)\mathrm{d}u.$$

(4) $\int_0^{x^2} f(x+t)\mathrm{d}t \xlongequal{令\ u = x+t} \int_x^{x+x^2} f(u)\mathrm{d}u$，于是有 $F(x) = x\int_x^{x+x^2} f(u)\mathrm{d}u$，则
$$F'(x) = \int_x^{x+x^2} f(u)\mathrm{d}u + x[f(x+x^2)\cdot(1+2x) - f(x)].$$

【例 11】 设 $f(x)$ 可微，且满足 $x = \int_0^x f(t)\mathrm{d}t + \int_0^x tf(t-x)\mathrm{d}t$，求 $f(x)$.

［解］ $\int_0^x tf(t-x)\mathrm{d}t \xlongequal{令\ u = t-x} \int_{-x}^0 (u+x)f(u)\mathrm{d}u = -\int_0^{-x} uf(u)\mathrm{d}u + x\int_{-x}^0 f(u)\mathrm{d}u$.

于是原方程变为 $\quad x = \int_0^x f(t)\mathrm{d}t - \int_0^{-x} uf(u)\mathrm{d}u - x\int_0^{-x} f(u)\mathrm{d}u$.

两边对 x 求导，得 $\quad 1 = f(x) - (-x)f(-x)\cdot(-1) - \int_0^{-x} f(u)\mathrm{d}u - xf(-x)\cdot(-1)$.

整理，得 $\quad 1 = f(x) - \int_0^{-x} f(u)\mathrm{d}u$.

两边再对 x 求导，得 $\quad 0 = f'(x) - f(-x)\cdot(-1)$，

即 $\quad f'(x) = -f(-x)$. ①

上式两边对 x 求导，得 $\quad f''(x) = f'(-x)$. ②

由 ①，② 得 $\quad f''(x) = -f(x)$.

即 $\quad f''(x) + f(x) = 0$.

解此方程得 $\quad f(x) = C_1\cos x + C_2\sin x$.

注意到 $f(0) = 1, f'(0) = -1$，故 $f(x) = \cos x - \sin x$.

第一篇　　高 等 数 学

第一章　　函数·极限·连续

§1.1　函　　数

一　　函数的定义

设有两个变量 x 和 y，变量 x 的变域为 D，如果对于 D 中的每一个 x 值，按照一定的法则，变量 y 有一个确定的值与之对应，则称变量 y 为变量 x 的函数，记作

$$y = f(x)$$

x—— 自变量，y—— 因变量，变域 D 为定义域，记为 D_f，变量 y 的取值的集合称为函数的值域，记作 Z_f.

函数概念的两要素：

(1) 定义域 $\triangleq$ 自变量 x 的变化范围(若函数是解析式子表示的，则使运算有意义的实自变量值的集合即为定义域).

(2) 对应关系 $\triangleq$ 给定 x 值，求 y 值的方法.

[解题提示]　当且仅当给定的两个函数，其定义域和对应关系完全相同时，才表示同一函数，否则表示不同的函数.

【例 1.1】　与 $f(x) = \sqrt{\ln^2 x}$ 等价的函数是(　　).

(a) $\ln x$　　(b) $\frac{1}{2}\ln x^2$　　(c) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\int_0^x |\ln t|\,\mathrm{d}t\right)$　$=|\ln x|$　　(d) $\ln|x|$

[解]　$f(x) = \sqrt{\ln^2 x} = |\ln x| = \begin{cases} \ln x & x \geqslant 1 \\ -\ln x & 0 < x < 1 \end{cases}$

(a) 与 $f(x)$ 对应关系不同；(b)，(d) 与 $f(x)$ 的定义域不同，前二者为 $x \neq 0$，后者为 $(0, +\infty)$，故(c) 与 $f(x)$ 等价.

[解题提示]　函数的表示法只与定义域和对应关系有关，而与用什么字母表示无关，即

$$f(x) = f(t) = f(u) = \cdots$$

简称函数表示法的"无关特性"，这是由 $f[g(x)]$ 的表达式求解 $f(x)$ 表达式的有效方法.

【例 1.2】　设 $f(x) + f(\frac{x-1}{x}) = 2x$　其中 $x \neq 0, x \neq 1$，求 $f(x)$.

[解]　利用函数表示法的无关特性，令 $t = \frac{x-1}{x}$

即 $x = \frac{1}{1-t}$，代入原方程得　$f(\frac{1}{1-t}) + f(t) = \frac{2}{1-t}$

即　　$f(x) + f(\frac{1}{1-x}) = \frac{2}{1-x}$

再令 $\dfrac{1}{1-x}=\dfrac{u-1}{u}$,即 $x=\dfrac{1}{1-u}$,代入上式,得

$$f(\frac{1}{1-u})+f(\frac{u-1}{u})=\frac{2(u-1)}{u} \quad 即 \quad f(\frac{1}{1-x})+f(\frac{x-1}{x})=\frac{2(x-1)}{x}$$

解联立方程组,得 $\quad f(x)=x+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{1-x}-1$

二　函数的定义域的求法

记住下列简单函数的定义域:

$y=\dfrac{1}{x}$,	$D_f: x\neq 0$,	$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$
$y=\sqrt[2n]{x}$,	$D_f: x\geqslant 0$,	$[0,+\infty)$
$y=\log_a x$,	$D_f: x>0$,	$(0,+\infty)$
$y=\tan x$, $=\dfrac{\sin x}{\cos x}$	$\cos x\neq 0 \Rightarrow$ $D_f: x\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2}$,	$k\in Z$
$y=\cot x$, $=\dfrac{\cos x}{\sin x}$	$\sin x\neq 0$ $D_f: x\neq k\pi$,	$k\in Z$
$y=\arcsin x$(或 $\arccos x$),	$D_f: \mid x\mid\leqslant 1$,	$[-1,1]$

$\Leftrightarrow x=\sin y$ $\quad |\sin y|\leq 1$

[解题提示] 求复杂函数的定义域,就是求解由简单函数的定义域所构成的不等式组之解集.

【例 1.3】 求下列函数的定义域:

$$(1)y=\log_{(x-1)}(16-x^2) \qquad (2)f(x)=\int_{x^2}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$$

$$(3)y=\arcsin\frac{2x-1}{7}+\frac{\sqrt{2x-x^2}}{\ln(2x-1)}$$

[解] (1)$\begin{cases}16-x^2>0\\ x-1>0\\ x-1\neq 1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mid x\mid<4\\ x>1\\ x\neq 2\end{cases}\Rightarrow 1<x<2$ 及 $2<x<4$,即$(1,2)\cup(2,4)$.

(2) 该函数的定义域为$(-\infty,+\infty)$,初学者易写成 $D_f: x\neq 0$,究其原因是对可积函数类不甚了解,请见第四章 §4.1 定积分概念,因为$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$,所以 $x=0$ 是被积函数的第一类间断点,因此,$f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$ 在包含 $x=0$ 的区间内积分有意义.

$$(3)\quad\begin{cases}\left|\dfrac{2x-1}{7}\right|\leqslant 1\\ 2x-x^2\geqslant 0\\ 2x-1>0\\ 2x-1\neq 1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-6\leqslant 2x\leqslant 8\\ x(x-2)\leqslant 0\\ 2x>1\\ x\neq 1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-3\leqslant x\leqslant 4\\ 0\leqslant x\leqslant 2\\ x>\dfrac{1}{2}\\ x\neq 1\end{cases}$$

$\Rightarrow\dfrac{1}{2}<x<1$ 及 $1<x\leqslant 2$, 即$(\dfrac{1}{2},1)\cup(1,2]$

【例 1.4】 设 $f(x)=\begin{cases}1 & 0\leqslant x\leqslant 1\\ -2 & 1<x\leqslant 2\end{cases}$,求下列函数定义域:

(1) $f(x+3)$ (2) $f(2x)$

[解] (1) $\because f(x)=\begin{cases}1 & 0\leqslant x\leqslant 1\\ -2 & 1<x\leqslant 2\end{cases}$

$$\therefore f(x+3)=\begin{cases}1 & 0\leqslant x+3\leqslant 1\\ -2 & 1<x+3\leqslant 2\end{cases}=\begin{cases}1 & -3\leqslant x\leqslant -2\\ -2 & -2<x\leqslant -1\end{cases}$$

故 $D_f:[-3,-1]$

(2) $f(2x)=\begin{cases}1 & 0\leqslant 2x\leqslant 1\\ -2 & 1<2x\leqslant 2\end{cases} \Rightarrow f(2x)=\begin{cases}1 & 0\leqslant x\leqslant \frac{1}{2}\\ -2 & \frac{1}{2}<x\leqslant 1\end{cases}$

故 $D_f:[0,1]$

三 函数的基本性质

1. 奇偶性

设函数 $f(x)$ 在区间 X 上有定义,如果对于 $\forall x\in X$ 恒有

$$f(x)=f(-x) \quad (\text{或 } f(x)=-f(-x))$$

则称 $f(x)$ 为偶函数(或 $f(x)$ 为奇函数).

偶函数 $f(x)$ 的图象关于 y 轴对称,奇函数 $f(x)$ 的图象关于坐标原点对称.

奇偶函数的运算性质:

(1) 奇函数的代数和仍为奇函数;偶函数的代数和仍为偶函数.

(2) 偶数个奇(或偶)函数之积为偶函数;奇数个奇函数的积为奇函数.

(3) 一奇一偶的乘积为奇函数.

常见的偶函数: $|x|$, $\cos x$, x^{2n}(n 为正整数), $e^{|x|}$, e^{x^2},…

常见的奇函数: $\sin x$, $\tan x$, $\frac{1}{x}$, x^{2n+1}, $\arcsin x$, $\arctan x$,…

[解题提示] 判别给定函数的奇偶性,主要是根据奇偶性的定义,有时也用其运算性质.

注意:(1) $f(x)+f(-x)=0$ 是判别 $f(x)$ 为奇函数的有效方法.

(2) 函数的奇偶性是相对于对称区间而言的,若定义域关于原点不对称,则该函数就不是奇或偶函数.

【例 1.5】 判别下列函数的奇偶性:

(1) $y=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$ (2) $y=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$,其中 $f(x)$ 为奇函数

(3) $y=F(x)\left(\frac{1}{a^x-1}+\frac{1}{2}\right)$ 其中 $a>0,a\neq 1,F(x)$ 为奇函数

[解] (1) 令 $f(x)=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$

$$f(-x)=\ln(-x+\sqrt{x^2+1})$$

$$f(x)+f(-x)=\ln(x+\sqrt{x^2+1})+\ln(-x+\sqrt{x^2+1})$$

$$=\ln(x+\sqrt{x^2+1})(-x+\sqrt{x^2+1})=\ln 1=0$$

故 $y=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$ 为奇函数.

(2) 令 $F(x) = \int_0^x f(t)\mathrm{d}t$

$$F(-x) = \int_0^{-x} f(t)\mathrm{d}t \xlongequal{令 t=-u} \int_0^x f(-u)(-\mathrm{d}u)$$

$$= -\int_0^x f(-t)\mathrm{d}t = \int_0^x f(t)\mathrm{d}t \quad (\because f(x) \text{ 为奇函数}) = F(x)$$

$-f(-t)=f(t)$

故 $\quad y = \int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 为偶函数.

(3) 令 $g(x) = \dfrac{1}{a^x - 1} + \dfrac{1}{2}$

$$g(-x) = \frac{1}{a^{-x} - 1} + \frac{1}{2} = \frac{a^x}{1 - a^x} + \frac{1}{2} = -\frac{a^x}{a^x - 1} + \frac{1}{2}$$

$$g(x) + g(-x) = \frac{1}{a^x - 1} + \frac{1}{2} - \frac{a^x}{a^x - 1} + \frac{1}{2} = 0$$

所以 $\quad g(x)$ 为奇函数.

又 $\quad F(x)$ 为奇函数.

故 $\quad y = F(x)\left(\dfrac{1}{a^x - 1} + \dfrac{1}{2}\right)$ 为偶函数.

2. 周期性

设函数 $f(x)$ 在区间 X 上有定义,若存在一个与 x 无关的正数 T,使对于任一 $x \in X$,恒有

$$f(x + T) = f(x)$$

则称 $f(x)$ 是以 T 为周期的周期函数,把满足上式的最小正数 T 称为函数 $f(x)$ 的周期.

周期函数的运算性质:

(1) 若 T 为 $f(x)$ 的周期,则 $f(ax + b)$ 的周期为 $\dfrac{T}{|a|}$.

(2) 若 $f(x), g(x)$ 均是以 T 为周期的函数,则 $f(x) \pm g(x)$ 也是以 T 为周期的函数.

(3) 若 $f(x), g(x)$ 分别是以 $T_1, T_2, T_1 \neq T_2$ 为周期的函数,则 $f(x) \pm g(x)$ 是以 T_1, T_2 的最小公倍数为周期的函数.

常见函数的周期: $\sin x, \cos x$,其周期 $T = 2\pi$;

$\tan x, \cot x, |\sin x|, |\cos x|$,其周期 $T = \pi$.

[解题提示] 判别给定函数 $f(x)$ 是否为周期函数,主要是根据周期的定义,有时也用其运算性质.

【例 1.6】 设对一切实数 x,有 $f\left(\dfrac{1}{2} + x\right) = \dfrac{1}{2} + \sqrt{f(x) - f^2(x)}$,则 $f(x)$ 是周期为________的周期函数.

[解] $f\left[\dfrac{1}{2} + \left(\dfrac{1}{2} + x\right)\right] = \dfrac{1}{2} + \sqrt{f\left(\dfrac{1}{2} + x\right) - f^2\left(\dfrac{1}{2} + x\right)}$

$$= \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - f(x) + f^2(x)}$$

$$= \frac{1}{2} \pm \left[\frac{1}{2} - f(x)\right] = f(x), \left(\text{由题设 } f(x) \geqslant \frac{1}{2}\right)$$

即 $\quad f(1 + x) = f(x)$,故可知 $f(x)$ 的周期为 1.

3. **有界性**

设函数 $y=f(x)$ 在区间 X 上有定义,如果 $\exists M>0$,使得对于一切 $x\in X$,恒有:

$$|f(x)|\leqslant M$$

则称 $f(x)$ 在区间 X 上有界;若不存在这样的 $M>0$,则称 $f(x)$ 在区间 X 上无界.

注意:(1) 函数 $f(x)$ 有无界是相对于某个区间而言的.

(2) 无界函数与无穷大的区别:在一定变化趋势下 $f(x)$ 为无穷大,则 $f(x)$ 一定无界;若 $f(x)$ 在某个区间上无界,则 $f(x)$ 不一定是无穷大,例如,$f(x)=x\sin x$,当 $x\to+\infty$ 时是无界函数而不是无穷大量.

六个常见的有界函数	$\lvert\sin x\rvert\leqslant 1$,	$\lvert\cos x\rvert\leqslant 1$,	$(-\infty,+\infty)$
	$\lvert\arcsin x\rvert\leqslant\dfrac{\pi}{2}$,	$\lvert\arccos x\rvert\leqslant\pi$,	$[-1,1]$
	$\lvert\arctan x\rvert<\dfrac{\pi}{2}$,	$\lvert\operatorname{arccot} x\rvert<\pi$,	$(-\infty,+\infty)$

[解题提示] 将函数取绝对值,然后用不等式放缩法;或借助导数利用求最大(小)值法处理.

判断增减性

【例 1.7】 函数 $f(x)=\dfrac{x}{1+x^2}$ 在定义域内为(　　).

(a) 有上界无下界　　(b) 有下界无上界

(c) 有界,且 $-\dfrac{1}{2}\leqslant f(x)\leqslant\dfrac{1}{2}$　　(d) 有界且 $-2\leqslant\dfrac{x}{1+x^2}\leqslant 2$

[解] $|f(x)|=\left|\dfrac{x}{1+x^2}\right|=\dfrac{|x|}{1+x^2}\leqslant\dfrac{|x|}{2|x|}=\dfrac{1}{2}$ 　($\because 1+x^2\geqslant 2|x|$)

$(1-|x|)^2=1+x^2-$

故 $-\dfrac{1}{2}\leqslant f(x)\leqslant\dfrac{1}{2}$, 可知(c)入选.

【例 1.8】 函数 $f(x)=\dfrac{\lg x}{x}$ 在区间 $[\dfrac{1}{2},1]$ 上为(　　).

$1^2+x^2\geqslant 2\sqrt{1\cdot x^2}$

(a) 有上界无下界　　(b) 有下界无上界

(c) 有界且 $2\lg\dfrac{1}{2}\leqslant f(x)\leqslant 0$　　(d) 有界且 $\lg\dfrac{1}{2}\leqslant f(x)\leqslant-\dfrac{1}{4}$

[解] $f(x)=\dfrac{\lg x}{x}$

$$f'(x)=\frac{x\cdot\dfrac{1}{x\ln 10}-\lg x}{x^2}=\frac{1}{x^2}(\lg e-\lg x)$$

$\because x\in[\dfrac{1}{2},1]$, $\therefore f'(x)>0$. 故 $f(x)$"$\nearrow$"

因此, $\dfrac{\lg\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}\leqslant f(x)\leqslant\dfrac{\lg 1}{1}$, 即 $2\lg\dfrac{1}{2}\leqslant f(x)\leqslant 0$,可知,该选(c).

4. **单调性**

设函数 $y=f(x)$ 在区间 X 上有定义,如果对 $\forall x_1,x_2\in X,x_1<x_2$,恒有

$$f(x_1)<f(x_2)\quad(\text{或 } f(x_1)>f(x_2))$$

则称 $f(x)$ 在区间 X 上是单调增加(或单调减少)的.

[解题提示] 若 $f(x)$ 在区间 X 上没有告知可导,则其单调性的判别用定义;若 $f(x)$ 在