高等数学

GAODENG SHUXUE
JIAOYUXUE YAOLAN

教与学要览

（下册）

喻德生　主编

西南交通大学出版社
Http://press.swjtu.edu.cn

高等数学教与学要览

（下册）

主　　编　喻德生

编写人员（按章节编写顺序排序）

喻德生　李　昆　邹　群　明万元

黄香蕉　王卫东　程　筠　杨就意

胡结梅　徐　伟　陈菱蕙　毕公平

漆志鹏　熊归凤　魏贵珍　李园庭

西南交通大学出版社

·成　都·

图书在版编目（CIP）数据

高等数学教与学要览. 下册 / 喻德生主编. —成都：西南交通大学出版社，2013.2

ISBN 978-7-5643-2187-1

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①喻… Ⅲ. ①高等数学－高等学校－教学参考资料 Ⅳ. ①013

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2013）第 028122 号

高等数学教与学要览

（下册）

主编　喻德生

责任编辑	张宝华
封面设计	墨创文化
出版发行	西南交通大学出版社 （成都二环路北一段 111 号）
发行部电话	028-87600564　87600533
邮政编码	610031
网　　址	http: //press.swjtu.edu.cn
印　　刷	四川五洲彩印有限责任公司
成品尺寸	185 mm × 260 mm
印　　张	21.375
字　　数	532 千字
版　　次	2013 年 2 月第 1 版
印　　次	2013 年 2 月第 1 次
书　　号	ISBN 978-7-5643-2187-1
定　　价	35.00 元

前　言

本书根据高等学校理工科高等数学课程教学的基本要求，结合当前高等数学教学改革和学生学习的实际需要，组织教学经验比较丰富的教师编写. 它可作为理工科高等数学学习的指导书和研究生考试的复习资料供学生使用，也可以作为高等数学教学的同步教材供教师参考.

该书参照理工科《高等数学》教材的基本内容，依据各章知识结构的体系——知识单元分节进行编写. 每节均包括教学目标、内容提要、疑点解析、例题分析和练习题五个部分，各部分编写说明如下：

一、教学目标　根据高等数学教学大纲的基本要求，分层次逐点进行编写. 目的是把教学目标交给学生，使学生了解教学大纲的精神和教师的要求，从而增强学习的主动性和目的性.

二、内容提要　以各节的知识结构为框架，用树形图表的方式，简明扼要地总结、概括各节的主要内容. 目的是对各节的教学内容进行梳理，使学生掌握各个知识之间的联系，将使零散的知识形成系统的知识结构. 在这部分中，通常先列出所述知识点的名称，目的是当你熟悉这个名称的含义时，就不必往下看.

三、疑点解析　围绕高等数学教学的重点、难点，从不同侧面阐述有关知识点的数学思想、数学方法、教学方法等方面的内容，主要包括一些概念的理解，、一些定理条件与结论的分析，一些解题方法与技巧的总结，各种知识之间的区别与联系等，从而加深知识的理解、解决高等数学教学中可能出现的一些问题.

四、例题分析　围绕高等数学教学内容的重点、难点，按每大节 20 个、小节 10 个左右例题的幅度选择一些比较典型的例题，从不同侧面阐述解题的思路、方法与技巧. 每个题均按照"例题+分析+解或证明+思考"的模式编写，运用变式、引申等方式，突出题目的重点，揭示解题方法的本质，从而在解题的过程中，运用"师生对话"的机制，使"教、学、思"融于一题，使举一反三成为可能，提高学生分析问题和解决问题的能力.

五、练习题　各节大约按例题一半的幅度配备练习题，目的是让学生在各题"思考"的基础上，进一步得到训练.

每章还配有测试卷两套，可作为学生学完各章内容之后，检测自己掌握所学知识的程度之用.

此外，书末附有各节练习题答案或提示，以及测试卷答案.

本书由喻德生教授任主编. 参与本书编写的老师有：第一章第三节李昆，第四节邹群；第二章第一节明万元，第二、三节黄香蕉；第三章第一节王卫东，第二节程筠；第四章第一、二节杨就意；第六章第一、二节胡结梅；第七章第一节徐伟，第二、三节陈菱蕙；第八章第一节杨就意，第四节毕公平；第九章第一节漆志鹏，第二节熊归凤；第十一章第一、二、三节魏贵珍，第十二章第一、二、三节李园庭；其余章节及测试题喻德生. 全书修改、统纂定稿喻德生.

由于水平有限，书中难免出现疏漏、甚至错误之处，敬请国内外同仁和读者批评指正.

编　者

2012 年 9 月

目　录

第八章　多元函数微分法及其应用

第一节　多元函数的概念与性质

一、教学目标

1. 了解平面区域、邻域、聚点等基本概念，知道 n 维空间中相应的概念.

2. 了解多元函数（点函数）的基本概念，会求二元函数的定义域，会作二元函数的图形.

3. 了解多元函数（点函数）极限的概念，知道二元函数极限的运算法则，会求一些二元函数的极限.

4. 了解多元函数（点函数）连续的概念，知道闭区域上二元连续函数的基本性质，会求一些二元函数的连续性.

二、内容提要

多元函数

- 定义：z是$P(x_1,x_2,\cdots,x_n)$的函数$(z=f(P)\Leftrightarrow\forall P(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in D\subset R^m, z\in\mathbf{R})$，按法则 f 有确定的值与之对应.
- 极限：$\lim\limits_{P\to P_0}f(P)=A\Leftrightarrow P_0$ 是 D 的聚点，$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，使$\forall P\in D$且$0<|P_0P|<\delta$时恒有$|f(P)-A|<\varepsilon$.
- 连续性
  - 定义：$f(P)$在P_0处连续$\Leftrightarrow P_0\in D$，$\lim\limits_{P\to P_0}f(P)=f(P_0)$. 否则，$f(P)$在$P_0$处间断.
  - 性质
    - $f(P)$在 D 内连续 $\Leftrightarrow\forall P\in D$，$f(P)$在$P$处连续.
    - 最值定理：有界闭区域 D上的多元连续函数在D上取得最大(小)值.
    - 介值定理：$f(P)$在区域 D上连续，$P_1,P_2\in D\Rightarrow f(P)$取得最介于$f(P_1),f(P_2)$之间的任何值.

三、疑点解析

1. 关于多元函数的概念　多元函数 $y=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 与一元函数 $y=f(x)$ 是相对的两个概念. 它们都是函数，主要区别在于依赖于自变量的个数是多个还是单个的问题. 但这种区别只是形式上的，而不是本质上的. 因为，一元函数 $y=f(x)$ 的自变量 x 可以看成是一维空间（坐标轴）中点 $P(x)$ 的坐标，而多元函数的自变量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 可以看成是 n 维空间中点 $P(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的坐标，因此只要用“点”解决不同“元”的问题，多元函数和一元函数就可以用“点”函数的概念统一起来. 即

设 D_f 是 n 维空间的非空点集，对于 D_f 中任意一点 $P(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，变量 y 按照一定的法

则 f，总有确定的值 y 与之对应，则称 y 是点 $P(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的函数，记为

$$y=f(P),\quad P(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in D_f,$$

其中 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 称为自变量，D_f 称为函数的定义域.

显然，当 $n=1$ 时，就是我们熟知的一元函数；当 $n\geqslant 2$ 时，就是这里所讲的多元函数.

因此，定义域 D_f 与对应法则 f 也是构成多元函数 $y=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的两个要素. 两个形式上不同的多元函数，如果它们的定义域相同，对应法则也相同，那么这两个函数就是相同的. 否则，只要两个函数的定义域或对应法则中有一个不同，那么它们就是不同的.

例如，尽管 $f(x,y)=\ln(xy)$ 与 $g(x,y)=\ln x+\ln y$ 的对应法则是相同的，但它们并不是同一个函数，因为它们的定义域 $D_f=\{(x,y)\mid xy>0\}$ 和 $D_g=\{(x,y)\mid x>0,y>0\}$ 是不同的.

2. 关于函数的分类 与量的分类方法类似，函数亦可以分为数量函数和矢量函数两大类. 而根据自变量个数的多少，数量函数又可以分为一元函数和多元函数；多元函数又可以分为二元函数、三元函数，等等；多元向量函数也可以类似地进一步细分. 于是

$$\text{函数}\begin{cases}\text{数量函数}\begin{cases}\text{一元函数}\\[2ex]\text{多元函数}\begin{cases}\text{二元函数}\\\text{三元函数}\\\cdots\cdots\end{cases}\end{cases}\\[4ex]\text{向量函数}\end{cases}$$

高等数学教材中，所谓的函数通常是数量函数的简称，而提及向量函数往往用全称，以示两者的区分. 所涉及的向量函数如多元函数 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的梯度 $\mathbf{grad}f$，向量场 $\boldsymbol{A}(x,y,z)=P(x,y,z)\boldsymbol{i}+Q(x,y,z)\boldsymbol{j}+R(x,y,z)\boldsymbol{k}$，等等.

3. 关于二元函数极限的概念 首先，二元函数 $z=f(x,y),(x,y)\in D$ 在一点 $P_0(x_0,y_0)$ 的极限

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}f(x,y)=A\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0,\ \exists\delta>0,\ \text{s.t.}\forall P(x,y)\in D\cap\mathring{U}(P_0,\delta),\ |f(x,y)-A|<\varepsilon$$

反映的是函数 $z=f(x,y)$ 在这点附近的变化趋势，它并不要求函数在 P_0 处有定义，即不要求 $P_0\in D$，因此 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)}f(x,y)$ 与函数在 $P_0(x_0,y_0)$ 处是否有定义无关，但要求 P_0 是 D 的聚点，否则 $D\cap\mathring{U}(P_0,\delta)$ 可能为空集，而当 $D\cap\mathring{U}(P_0,\delta)=\varnothing$ 时，讨论 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)}f(x,y)$ 是没有意义的.

其次，它并不要求 $|f(x,y)-A|<\varepsilon$ 在 P_0 处成立，通常也不要求 $|f(x,y)-A|<\varepsilon$ 在 P_0 的整个去心邻域 $\mathring{U}(P_0,\delta)$ 内成立，而只要求 $|f(x,y)-A|<\varepsilon$ 在 P_0 的去心邻域 $\mathring{U}(P_0,\delta)$ 与函数定义域 D 的公共部分 $D\cap\mathring{U}(P_0,\delta)$ 成立即可.

此外，$\delta=\delta(\varepsilon)$ 也是随 ε 的变化而变化的，通常 ε 越小，相应的 $\delta=\delta(\varepsilon)$ 也越小，但 δ 未必是 ε 的函数，从而 $|f(x,y)-A|<\varepsilon$ 成立的范围 $D\cap\mathring{U}(P_0,\delta)$ 也越小. 不过，由于 P_0 是 D 的聚点，$D\cap\mathring{U}(P_0,\delta)$ 必定是无穷点集，因此 $|f(x,y)-A|<\varepsilon$ 仅在有限多个点处成立不可能有 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)}f(x,y)=A$.

必须指出，以上关于二元函数极限的讨论，可以类似地推广到三元及三元以上函数的极限上去.

4. 关于二元函数极限的特点　二元函数极限与一元函数极限的不同之处，首先表现在动点（即自变量）趋近于已知点的方向上. 对一元函数，已知点附近的点只有这点附近左、右两边的点，动点趋近于已知点只有这两个方向或这两个方向兼具的可能. 特别地，若把动点限制在这点附近左边或右边，就是所谓的左、右极限的问题；对二元函数，已知点附近的点通常包括这点附近无穷多个方向或其中若干个方向兼具的可能，动点趋近于已知点有无穷多个方向的可能.

其次，表现在动点趋近于已知点的方式上. 前者，动点趋近于已知点只能是“直线”式的；后者可以是“直线”式、“折线”式和其他任何“曲线”式的. 因此，在二元函数极限中，不能用类似于一元函数左、右极限相等的方法来肯定二元函数极限的存在，但常常用一元函数左、右极限存在但不相等或左、右极限至少有一个不存在得出函数极限不存在类似的方法来否定二元函数极限的存在. 而且，只需在动点趋近于已知点的无穷多种可能情形中，找出一种特殊情形函数的极限不存在或找出两种特殊情形函数的极限存在但不相等，就可以得出函数在这点的极限不存在，即便是动点趋近于已知点的过程中，有无穷多种情形函数的极限存在且相等也是如此.

例如，当 $(x,y)\to(0,y_0)\ (y_0\in\mathbf{R})$，即动点 (x,y) 趋近于直线 $x=0$ 上的任意点 $(0,y_0)$ 时，函数 $f(x,y)=\dfrac{|x|}{x}$ 的极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,y_0)}f(x,y)$ 不存在，这是因为

$$\lim_{(x,y)\to(0,y_0)}f(x,y)=\lim_{(x,y)\to(0,y_0)}\frac{|x|}{x}=\lim_{x\to0}\frac{|x|}{x}\text{不存在.}$$

由于 $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{|x|}{x}=1,\ \lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{|x|}{x}=-1$，这也可以理解二元函数 $f(x,y)$ 为沿 x 轴正、负半轴两个方向的极限存在但不相等，从而函数的极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,y_0)}f(x,y)$ 不存在.

而当 $(x,y)\to(0,0)$ 时，函数 $f(x,y)=\dfrac{xy^2}{x^2+y^4}$ 的极限也不存在. 尽管当动点 (x,y) 沿任意直线方向 $y=kx$ 趋近于 $(0,0)$ 的极限存在且等于零，即

$$\lim_{\substack{x\to0\\y=kx\to0}}f(x,y)=\lim_{\substack{x\to0\\y=kx\to0}}\frac{xy^2}{x^2+y^4}=\lim_{\substack{x\to0\\y=kx\to0}}\frac{x\cdot k^2x^2}{x^2+k^4x^4}=\lim_{\substack{x\to0\\y=kx\to0}}\frac{k^2x}{1+k^4x^2}=0,$$

但由于当动点 (x,y) 沿二次曲线方式 $x=ky^2$ 趋近于 $(0,0)$ 时，函数的极限存在但不相等，即

$$\lim_{\substack{y\to0\\x=ky^2\to0}}f(x,y)=\lim_{\substack{y\to0\\x=ky^2\to0}}\frac{xy^2}{x^2+y^4}=\lim_{\substack{y\to0\\x=ky^2\to0}}\frac{ky^2\cdot y^2}{k^2y^4+y^4}=\lim_{\substack{y\to0\\x=ky^2\to0}}\frac{k}{1+k^2}$$

与 k 有关，即对两条不同的形如 $x=ky^2$ 的二次曲线函数的极限是不同的，所以此时函数的极限不存在.

必须指出，以上关于二元函数极限特点的讨论，也可以类似地推广到三元及三元以上函数的极限上去.

5. 关于统一的函数极限的概念　不管动点趋近于已知点的方式如何不同，它对极限的概念都不是本质的. 因为极限只论动点与已知点之间的距离，而不论动点趋近于已知点的方式. 事实上，如果我们忽略一、二元函数定义中的细节，那么容易发现它们的“模式”是完全一

样的，这就是说，一元函数的极限与多元函数的极限可以完全统一起来，亦即

设函数 $y=f(P)$ 在 n 维区域 D 内有定义，P_0 是 D 的聚点. 如果对于任意的正数 ε，总存在正数 δ，使得对于 D 内适合不等式 $0<|P_0P|<\delta$ 的任意点 P，均有 $|f(P)-A|<\varepsilon$，则称常数 A 为函数 $y=f(P)$ 当 P 趋近于 P_0 时的极限，记为 $\lim\limits_{P\to P_0} f(P)$.

特别地，当 D 为区间、$y=f(P)$ 为一元函数时，$\lim\limits_{P\to P_0} f(P)$ 即为一元函数的极限.

由于一元函数极限与多元函数极限本质上是相同的，所以可以把不涉及一元函数极限特性的结论和方法. 例如，极限的四则运算法则、连续函数极限的性质、复合函数极限的性质、两个重要极限和夹逼定理，等等，都直接应用到多元函数上来.

例如，可以利用两个函数和的极限的运算法则和两个重要极限求如下二元函数的极限：

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y)\to(0,1)}\left[(1+xy)^{\frac{1}{x}}+\frac{x}{\sin(xy)}\right]&=\lim_{(x,y)\to(0,1)}\left[(1+xy)^{\frac{1}{xy}}\right]^{y}+\lim_{(x,y)\to(0,1)}\left[\frac{xy}{\sin(xy)}\cdot\frac{1}{y}\right]\\&=\left[\lim_{(x,y)\to(0,1)}(1+xy)^{\frac{1}{xy}}\right]^{\lim\limits_{y\to1}y}+\lim_{(x,y)\to(0,1)}\frac{xy}{\sin(xy)}\cdot\lim_{y\to1}\frac{1}{y}\\&=\mathrm{e}^{1}+1\cdot\frac{1}{1}=\mathrm{e}+1.\end{aligned}$$

6. **关于多元函数连续的特点**　一元函数的连续性可以形象地理解为一条没有“断开”的曲线；多元函数，例如，二元函数的连续性，可以形象地理解为既没有“洞”又没有“缝”的一张曲面. 由于曲面上具有“洞”和“缝”的情形远比曲线“断开”的情形复杂，因此多元函数的连续性比一元函数的连续性要复杂得多.

例如，当 $x\neq0$ 及 $\dfrac{y}{x}\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$，即 $x\neq0$ 和 $y\neq\left(k\pi+\dfrac{\pi}{2}\right)x\ (k\in\mathbf{Z})$ 时，函数 $z=\tan\dfrac{y}{x}$ 才连续，因此该函数间断点的集合为 $\left\{(x,y)\mid x=0或y=\left(k\pi+\dfrac{\pi}{2}\right)x\ (k\in\mathbf{Z})\right\}$.

可见，该函数的图形是有一个“洞”和有很多“缝”的曲面，其间断点集是通过坐标原点的无穷多条直线.

7. **关于统一的函数连续的概念**　由点函数及其极限的定义，即得到一元函数和多元函数统一的连续的定义. 即

设函数 $y=f(P)$ 在 n 维区域 D 内有定义，$P_0\in D$. 若 $\lim\limits_{P\to P_0} f(P)=f(P_0)$，则称函数 $y=f(P)$ 在 P_0 处连续.

由于一元函数连续与多元函数连续本质上是一样的，所以可以把不涉及一元函数连续特性的结论，如闭区间上连续函数的性质、连续的四则运算法则、初等函数的连续性等等，都直接应用到多元函数上来.

注意：多元分段函数在分段点处的连续性，也必须用连续的定义来讨论，而且多元分段函数的分段点通常有无穷多个.

例如，函数 $f(x,y)=\begin{cases}x\sin\dfrac{1}{y}, & y\neq0\\ 0, & y=0\end{cases}$ 的分断点的集合是整个 x 轴. 根据无穷小与有界函数的

乘积仍为无穷小的性质，可得 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0=f(0,0)$，因此根据定义，函数在 $(0,0)$ 处连续；而当 $a\neq 0$ 时，取 $y_n'=\dfrac{1}{n\pi}$，$y_n''=\dfrac{2}{(4n+1)\pi}$，则由两函数列的极限

$$\lim_{(x,y_n')\to(a,0)} f(x,y)=\lim_{x\to a}x\cdot\lim_{n\to\infty}\sin n\pi=0,\quad \lim_{(x,y_n'')\to(a,0)} f(x,y)=\lim_{x\to a}x\cdot\lim_{n\to\infty}\sin\left(2n+\frac{1}{2}\right)\pi=a$$

可知，$\lim\limits_{(x,y)\to(a,0)} f(x,y)\ (a\neq 0)$ 不存在，因此函数在 $(a,0)\ (a\neq 0)$ 处不连续.

四、例题分析

例 1　求下列函数的定义域，并判断它们是否为同一函数：

（i）$z_1=\ln[(1-x^2)(1-y^2)]$；　　（ii）$z_2=\ln[(1-x)(1+y)]+\ln[(1+x)(1-y)]$.

分析　判断两个函数是否为同一函数，只要看它们的两个要素——定义域与对应法则是否相同.

证明　（i）由 $(1-x^2)(1-y^2)>0$，即

$$\begin{cases}1-x^2>0\\1-y^2>0\end{cases} \text{或} \begin{cases}1-x^2<0\\1-y^2<0\end{cases},$$

求得函数 z_1 的定义域 $D_1=\{(x,y)\,\|\,x|<1,|y|<1\vee|x|>1,|y|>1\}$（见图 8-1）;

（ii）由 $\begin{cases}(1-x)(1+y)>0\\(1+x)(1-y)>0\end{cases}$，即

$$\begin{cases}1-x>0\\1+y>0\\1+x>0\\1-y>0\end{cases} \text{或} \begin{cases}1-x<0\\1+y<0\\1+x>0\\1-y>0\end{cases} \text{或} \begin{cases}1-x>0\\1+y>0\\1+x<0\\1-y<0\end{cases} \text{或} \begin{cases}1-x<0\\1+y<0\\1+x<0\\1-y<0\end{cases},$$

求得函数 z_2 的定义域 $D_2=\{(x,y)\,\|\,x|<1,|y|<1\vee x<-1,y>1\vee x>1,y<-1\}$（见图 8-2）.

由于 D_2 仅是 D_1 的一部分，所以 z_1,z_2 不是同一函数.

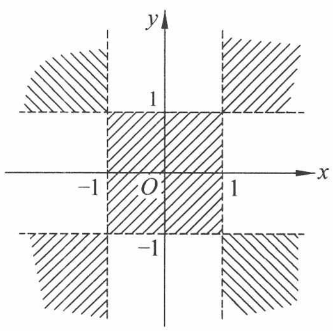

图 8–1

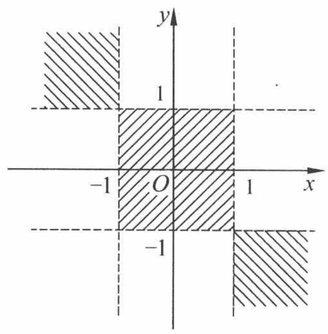

图 8–2

思考　求下列函数的定义域，并判断它们及以上函数是否为同一函数：

$$z_3=\ln[(1-x)(1-y)]+\ln[(1+x)(1+y)],\quad z_4=\ln[(1+x)(1-y)]+\ln[(1-x)(1+y)]$$

例2 设$F(x,y)=f\left(x+y,\dfrac{y}{x}\right)-f\left(x-y,\dfrac{x}{y}\right)-2xy$，且$f(x+y,x-y)=x^2+y^2-xy$，求$F(x,y)$.

分析 先求出函数$f(x,y)$的表达式，再利用$F(x,y)$与$f(x,y)$之间的关系求出$F(x,y)$.

解 令$\begin{cases}x+y=u\\x-y=v\end{cases}$，则$\begin{cases}x=\dfrac{u+v}{2}\\y=\dfrac{u-v}{2}\end{cases}$. 于是

$$f(u,v)=\left(\frac{u+v}{2}\right)^2+\left(\frac{u-v}{2}\right)^2-\frac{u+v}{2}\cdot\frac{u-v}{2}=\frac{1}{4}(u^2+3v^2)\Rightarrow f(x,y)=\frac{1}{4}(x^2+3y^2)$$

故

$$\begin{aligned}F(x,y)&=f\left(x+y,\frac{y}{x}\right)-f\left(x-y,\frac{x}{y}\right)-2xy\\&=\frac{1}{4}\left[(x+y)^2+3\left(\frac{y}{x}\right)^2\right]-\frac{1}{4}\left[(x-y)^2+3\left(\frac{x}{y}\right)^2\right]-2xy\\&=\frac{3}{4}\left(\frac{y^2}{x^2}-\frac{x^2}{y^2}\right)-xy.\end{aligned}$$

思考 如果$f\left(\dfrac{y}{x},\dfrac{x}{y}\right)=x^2-y^2$或$f\left(\dfrac{x}{y},\dfrac{y}{x}\right)=x^2-y^2$或$f(x+y,x-y)=\dfrac{y}{x}+\dfrac{x}{y}-xy$或$f(x+y,x-y)=\left(\dfrac{y}{x}\right)^2+\left(\dfrac{x}{y}\right)^2-xy$或……，结果如何？

例3 证明：函数极限$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^2+y^2+xy}{\sqrt{x^2+3y^2}}=0$.

分析 对$|f(x,y)-0|$进行适当的放缩，得出含$\sqrt{x^2+y^2}$方幂的函数$\varphi(\sqrt{x^2+y^2})$. 对任意给定的$\varepsilon>0$，由$\varphi(\sqrt{x^2+y^2})<\varepsilon$解得$\sqrt{x^2+y^2}<\delta(\varepsilon)$，使之成为$|f(x,y)-0|<\varepsilon$的充分条件即可.

证明 因为

$$|x|^2+|y|^2\geqslant 2|x||y|\Rightarrow\frac{x^2+y^2}{2}\geqslant|xy|\Rightarrow\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{2}\geqslant\frac{|xy|}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

所以

$$\begin{aligned}|f(x,y)-0|&=\frac{|x^2+y^2+xy|}{\sqrt{x^2+3y^2}}\leqslant\frac{|x^2+y^2|+|xy|}{\sqrt{x^2+y^2}}\\&\leqslant\sqrt{x^2+y^2}+\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{2}=\frac{3\sqrt{x^2+y^2}}{2}.\end{aligned}$$

$\forall\varepsilon>0$，要使$|f(x,y)-0|<\varepsilon$，只要

$$\frac{3\sqrt{x^2+y^2}}{2}<\varepsilon,$$

即要

$$\sqrt{x^2+y^2}<\frac{2}{3}\varepsilon.$$

取 $\delta=\dfrac{2}{3}\varepsilon$，则当 $0<|P_0P|=\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}=\sqrt{x^2+y^2}<\delta$ 时，恒有

$$|f(x,y)-0|<\varepsilon,$$

故 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^2+y^2+xy}{\sqrt{x^2+3y^2}}=0$.

思考　（i）证明：$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^2+y^2+xy}{\sqrt{x^2+ay^2}}=0\,(a\in\mathbf{R}^+)$，$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^2+y^2+bxy}{\sqrt{x^2+y^2}}=0\,(b\in\mathbf{R})$ 及 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^2+y^2+bxy}{\sqrt{x^2+ay^2}}=0\,(a\in\mathbf{R}^+,b\in\mathbf{R})$；（ii）先求函数极限，再用以上方法给出证明：$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^3+xy^2+3\sqrt{x^2+3y^2}+xy}{\sqrt{x^2+3y^2}}$.

例 4　证明：函数的极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(\infty,\infty)}\dfrac{x^2-3xy+y^2}{x^4+y^4}=0$.

分析　证明函数的极限，可取函数与其极限差的绝对值，再将其适当地放大，并证明放大后的函数极限为零，从而根据夹逼准则得出函数的极限.

证明　因为 $x^4+y^4\geqslant 2x^2y^2$，所以

$$\left|\frac{x^2-3xy+y^2}{x^4+y^4}\right|\leqslant\left|\frac{x^2-3xy+y^2}{2x^2y^2}\right|=\frac{1}{2}\left|\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}-\frac{3}{xy}\right|\leqslant\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{3}{|xy|}\right),$$

而
$$\lim_{(x,y)\to(\infty,\infty)}\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{3}{|xy|}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}+\lim_{y\to\infty}\frac{1}{y^2}+3\lim_{x\to\infty}\frac{1}{|x|}\lim_{y\to\infty}\frac{1}{|y|}=0,$$

故由夹逼准则得出 $\lim\limits_{(x,y)\to(\infty,\infty)}\dfrac{x^2+3xy+y^2}{x^4+y^4}=0$，从而函数的极限存在.

思考　（i）用以上方法证明函数的极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(\infty,\infty)}\dfrac{x^2+x^2y+xy^2+y^2}{x^4+y^4}=0$；（ii）判断函数的极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(\infty,\infty)}\dfrac{x^3+x^2y+xy^2+y^3}{x^4+y^4}$ 是否存在，若存在，求出极限；若不存在，给出证明.

例 5　设函数 $f(x,y)=\dfrac{xy^\alpha}{x^2+y^4}\,(\alpha\in\mathbf{R}^+)$，证明：当 $0<\alpha\leqslant 2$ 时，函数的极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0^+)}f(x,y)$ 不存在.

分析　证明函数的极限不存在，只要找出动点趋近于已知点的两种不同方式，使得在这两种方式下，函数的极限不同即可.

证明　（i）当 $\alpha=2$ 时，若动点 (x,y) 沿任意直线 $y=kx$ 趋近于已知点 $(0,0^+)$ 时，函数的极限为

$$\lim_{\substack{x\to0\\ y=kx\to0^+}}\frac{xy^2}{x^2+y^4}=\lim_{x\to0}\frac{x\cdot k^2x^2}{x^2+k^4x^4}=\lim_{x\to0}\frac{k^2x}{1+k^4x^2}=0;$$

若动点 (x,y) 沿任意抛物线 $x=ky^2\ (k\neq 0)$ 趋近于已知点 $(0,0^+)$ 时，函数的极限为

$$\lim_{\substack{x=ky^2\to 0\\ y\to 0^+}}\frac{xy^2}{x^2+y^4}=\lim_{y\to 0^+}\frac{ky^2\cdot y^2}{k^2y^4+y^4}=\frac{k}{1+k^2}\neq 0\text{；}$$

可见，以上 (x,y) 趋近于已知点 $(0,0^+)$ 的两类方式下，函数的极限不相等，故此时函数的极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0^+)}f(x,y)$ 不存在.

当 $0<\alpha<2$ 时，不妨设当 $0<y<1$，于是 $\left|\dfrac{xy^\alpha}{x^2+y^4}\right|>\left|\dfrac{xy^2}{x^2+y^4}\right|$，而由以上证明易知 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0^+)}\left|\dfrac{xy^2}{x^2+y^4}\right|$ 不存在，从而函数的极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0^+)}f(x,y)$ 不存在.

因此，当 $0<\alpha\leqslant 2$ 时，函数的极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0^+)}f(x,y)$ 不存在.

思考　（i）在以上证明中，仅由 $\lim\limits_{\substack{x=ky^2\to 0\\ y\to 0^+}}\dfrac{xy^2}{x^2+y^4}=\lim\limits_{y\to 0^+}\dfrac{ky^2\cdot y^2}{k^2y^4+y^4}=\dfrac{k}{1+k^2}$，能否说明 $\alpha=2$ 时函数的极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0^+)}f(x,y)$ 不存在？（ii）证明：当 $\alpha>2$ 时，函数的极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0^+)}f(x,y)$ 存在，并求其极限；（iii）设函数 $f(x,y)=\dfrac{x^\alpha y^2}{x^2+y^4}\ (\alpha\in\mathbf{R}^+)$，讨论当 α 为何值时，函数的极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0^+,0)}f(x,y)$ 不存在；当 α 为何值时，函数的极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0^+,0)}f(x,y)$ 存在.

例 6　求函数的极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)}(1+x+x^2y)^{\frac{1-xy+y^2}{x+xy}}$.

分析　这是 1^∞ 型的极限，可以利用 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$ 求解.

解　原式 $=\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)}\left[(1+x+x^2y)^{\frac{1}{x+x^2y}}\right]^{\frac{(1+xy)(1-xy+y^2)}{1+y}}$

$$=\left[\lim_{(x,y)\to(0,1)}(1+x+x^2y)^{\frac{1}{x+x^2y}}\right]^{\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)}\frac{(1+xy)(1-xy+y^2)}{1+y}}=\mathrm{e}^{\frac{(1+0\cdot 1)(1-0\cdot 1+1^2)}{1+1}}=\mathrm{e}\cdot$$

思考　（i）是否能用以上方法求极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,-1)}(1+x+x^2y)^{\frac{1-xy+y^2}{x+xy}}$？若能，求出结果；若不能，应如何求解？结果为多少？（ii）求函数的极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)}(1+x+2x^2y)^{\frac{1-xy+y^2}{x+xy}}$ 和 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)}(1+x+kx^2y)^{\frac{1-xy+y^2}{x+xy}}\ (k\in\mathbf{N})$.

例 7　求函数的极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(\infty,\infty)}\dfrac{x+y}{x^2-xy+y^2}$.

分析　当函数的极限存在时，取函数绝对值，并其将分子适当地放大、分母适当地缩小，从而把一个较难求极限的函数转化成一个较易求极限的函数，再用夹逼准则得出结果.

解　由

$$x^2-xy+y^2=\frac{1}{2}(x^2+y^2)+\frac{1}{2}(x^2-2xy+y^2)=\frac{1}{2}(x^2+y^2)+\frac{1}{2}(x-y)^2$$

$$\Rightarrow x^2-xy+y^2\geqslant\frac{1}{2}(x^2+y^2),$$

$$0\leqslant(x-y)^2\Rightarrow 2xy\leqslant x^2+y^2\Rightarrow(x+y)^2\leqslant 2(x^2+y^2)\Rightarrow|x+y|\leqslant\sqrt{2(x^2+y^2)},$$

所以
$$\left|\frac{x+y}{x^2-xy+y^2}\right|\leqslant\frac{\sqrt{2(x^2+y^2)}}{\frac{1}{2}(x^2+y^2)}=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

而 $\lim\limits_{(x,y)\to(\infty,\infty)}\dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$，故由夹逼准则知 $\lim\limits_{(x,y)\to(\infty,\infty)}\dfrac{x+y}{x^2-xy+y^2}=0$.

思考　（i）求函数 $\lim\limits_{(x,y)\to(\infty,\infty)}\dfrac{x+2y}{x^2-2xy+4y^2}$ 的极限；（ii）是否能用以上方法求以下三个函数的极限：$\lim\limits_{(x,y)\to(\infty,\infty)}\dfrac{x+y}{x^2+xy+y^2}$，$\lim\limits_{(x,y)\to(\infty,\infty)}\dfrac{x-y}{x^2-xy+y^2}$，$\lim\limits_{(x,y)\to(\infty,\infty)}\dfrac{x-y}{x^2+xy+y^2}$？若能，写出求解过程；若否，说明理由.（ii）若函数的极限存在但不等于零，以上方法是否仍然奏效？若否，应对该方法作什么调整？并举例说明.

例 8　求函数的极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(2^+,3)}\dfrac{(x-2)^{(x-2)(y-2)}}{4x-3y}$.

分析　显然，分母的极限存在且不为零，因此可以先求出来；对于分子的极限，通过取对数可以转化成两个一元函数极限的积，从而用一元函数极限的方法求出.

解　令 $z=(x-2)^{(x-2)(y-2)}$，则

$$\ln z=(x-2)(y-2)\ln(x-2).$$

于是

$$\lim_{(x,y)\to(2^+,3)}\ln z=\lim_{(x,y)\to(2^+,3)}(x-2)(y-2)\ln(x-2)=\lim_{y\to3}(y-2)\lim_{x\to2^+}(x-2)\ln(x-2)$$

$$=1\cdot\lim_{x\to2^+}\frac{\ln(x-2)}{\frac{1}{x-2}}=\lim_{x\to2^+}\frac{\frac{1}{x-2}}{-\frac{1}{(x-2)^2}}=-\lim_{x\to2^+}(x-2)=0,$$

从而
$$\lim_{(x,y)\to(2^+,3)}z=\lim_{(x,y)\to(2^+,3)}(x-2)^{(x-2)(y-2)}=\mathrm{e}^0=1,$$

故
$$\text{原式}=\lim_{(x,y)\to(2^+,3)}\frac{1}{4x-3y}\lim_{(x,y)\to(2^+,3)}(x-2)^{(x-2)(y-2)}=\frac{1}{4\cdot2-3\cdot3}\cdot1=-1.$$

思考　（i）若欲使 $\lim\limits_{(x,y)\to(2^+,3)}\dfrac{(x-2)^{(x-2)(y-2)}}{4x-by}=2$，则 b 应等于多少？（ii）若欲使 $\lim\limits_{(x,y)\to(2^+,3)}\dfrac{(x-2)^{(x-2)(y-2)}}{ax-by}=b$，求 a,b 之间的关系；（iii）是否可以用以上方法求函数的极限

$\lim\limits_{(x,y)\to(2^+,3)}\dfrac{[(x-2)(y-2)]^{x-2}}{4x-3y}$？

例 9　求函数的极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{(x^3+y^3)(1-\cos\sqrt{x^2+y^2})}{(x^2+3y^2)^2}$.

分析　利用坐标变换，特别是直角坐标与极坐标之间的关系，有时可以将多元函数的极限转化成有界函数与一个极限为零的一元函数极限的积，从而根据无穷小的性质得出结果.

解　令 $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$，则当 $(x,y)\to(0,0)$ 时，$r=\sqrt{x^2+y^2}\to 0$．于是

$$原式=\lim_{r\to 0}\frac{r^3(\cos^3\theta+\sin^3\theta)(1-\cos r)}{r^4(1+2\sin^2\theta)^2}=\lim_{r\to 0}\left[\frac{1-\cos r}{r}\cdot\frac{\cos^3\theta+\sin^3\theta}{(1+2\sin^2\theta)^2}\right]$$

$$=2\lim_{r\to 0}\left[\frac{\sin^2\frac{r}{2}}{r}\cdot\frac{\cos^3\theta+\sin^3\theta}{(1+2\sin^2\theta)^2}\right],$$

由于

$$\lim_{r\to 0}\frac{\sin^2\frac{r}{2}}{r}=\lim_{r\to 0}\frac{\left(\frac{r}{2}\right)^2}{r}=0,\qquad \left|\frac{\cos^3\theta+\sin^3\theta}{(1+2\sin^2\theta)^2}\right|\leqslant|\cos^3\theta+\sin^3\theta|<2,$$

故根据无穷小的性质得

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{(x^3+y^3)(1-\cos\sqrt{x^2+y^2})}{(x^2+3y^2)^2}=2\lim_{r\to 0}\left[\frac{\sin^2\frac{r}{2}}{r}\cdot\frac{\cos^3\theta+\sin^3\theta}{(1+2\sin^2\theta)^2}\right]=0.$$

思考　（i）求函数的极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{(x^3-y^3)(1+\cos\sqrt{x^2+y^2})}{(3x^2-y^2)^2}$；（ii）能否用以上方法求函数的极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(\infty,\infty)}\dfrac{(x^3+y^3)(1-\cos\sqrt{x^2+y^2})}{(x^2+3y^2)^2}$，$\lim\limits_{(x,y)\to(0,\infty)}\dfrac{(x^3+y^3)(1-\cos\sqrt{x^2+y^2})}{(x^2+3y^2)^2}$ 和 $\lim\limits_{(x,y)\to(\infty,0)}\dfrac{(x^3+y^3)(1-\cos\sqrt{x^2+y^2})}{(x^2+3y^2)^2}$？（iii）对（i）中的极限，讨论（ii）中类似的问题.

例 10　证明：函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\sin xy}{x}, & x\neq 0\\ y, & x=0\end{cases}$ 在坐标原点 $O(0,0)$ 处连续.

分析　这是分段函数在分段点处的连续性问题，只能根据函数连续的几种定义，例如函数连续的“$\varepsilon-\delta$”定义来证明.

证明　由 $f(0,0)=0$ 及 $\sin x\leqslant x$，得

$$|f(x,y)-f(0,0)|=|f(x,y)|=\begin{cases}\left|\dfrac{\sin xy}{x}\right|, & x\neq 0\\ |y|, & x=0\end{cases}=\begin{cases}\left|y\dfrac{\sin xy}{xy}\right|\leqslant|y|, & x\neq 0\\ |y|, & x=0\end{cases},$$

于是，对任意的 x,y，均有

$$|f(x,y)-f(0,0)|\leqslant|y|\leqslant\sqrt{x^2+y^2}.$$

故对 $\forall\varepsilon>0$，要使 $|f(x,y)-f(0,0)|<\varepsilon$，只要

$$\sqrt{x^2+y^2}<\varepsilon.$$

取 $\delta=\varepsilon$，则当 $|P_0P|=\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}=\sqrt{x^2+y^2}<\delta$ 时，恒有

$$|f(x,y)-f(0,0)|<\varepsilon,$$

从而 $f(x,y)$ 在坐标原点 $O(0,0)$ 处连续.

思考　（i）用以上方法证明函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\sin xy}{x}, & x\neq 0\\ 2y, & x=0\end{cases}$ 在坐标原点 $O(0,0)$ 处连续；（ii）用函数连续的极限定义（即函数的极限值等于函数值），讨论以上两个函数在 y 轴上其他点 $(0,b)(b\neq 0)$ 处的连续性.

例 11　求函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\ln(1+xy)}{x}, & x\neq 0\\ y, & x=0\end{cases}$ 的定义域，并证明该函数在其定义域上连续.

分析　分段函数的定义域等于各段上的定义域的并集. 显然，函数在各段定义域内的连续性可以由初等函数的连续性得出，但在分段点处的连续性应根据连续的定义，例如函数连续的极限定义来证明.

证明　当 $x\neq 0$ 时，由 $1+xy>0$ 解得 $xy>-1$. 因此函数的定义域

$$D=\{(x,y)\,|\,xy>-1\,(x\neq 0)\vee x=0\}=\{(x,y)\,|\,xy>-1\},$$

即抛物线 $xy=-1$ 两支所夹的区域.

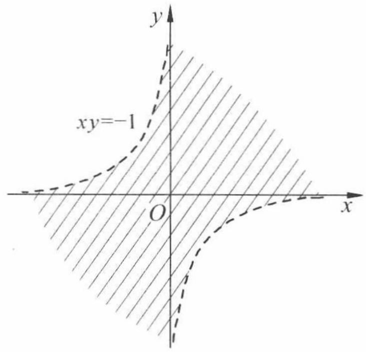

图 8.3

其分段点为 $\{(x,y)\,|\,x=0\}$，即整个 y 轴（见图 8-3）.

当 $x\neq 0$ 时，函数 $f(x,y)=\dfrac{\ln(1+xy)}{x}$ 为初等函数，连续.

当 $x=0$ 时，函数 $f(x,y)$ 在 y 轴上的任一已知点 $(0,b)$ 处，显然有 $f(0,b)=b$. 而当 $(x,y)\to(0,b)$，亦即 $0<\sqrt{(x-0)^2+(y-b)^2}=\sqrt{x^2+(y-b)^2}\to 0$ 时，

$$\lim_{(x,y)\to(0,b)}f(x,y)=\begin{cases}\lim\limits_{(x,y)\to(0,b)}\dfrac{\ln(1+xy)}{x}, & x\neq 0\\ \lim\limits_{(x,y)\to(0,b)}y, & x=0\end{cases}=\begin{cases}\lim\limits_{(x,y)\to(0,b)}\dfrac{\ln(1+xy)}{xy}\cdot y, & x\neq 0\\ \lim\limits_{(x,y)\to(0,b)}y, & x=0\end{cases}=b,$$

所以 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,b)}f(x,y)=f(0,b)$，即函数在点 $(0,b)$ 处连续.

思考　（i）当 $(x,y)\to(0,b)$ 时，函数 $f(x,y)$ 是否可以交替地等于 $\dfrac{\ln(1+xy)}{x}$ 和 y？若是，

是否会对以上求极限的过程和结果产生影响？（ii）用以上方法讨论函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\ln(1+xy)}{x}, & x\neq 0\\ 2y, & x=0\end{cases}$ 在整个定义域上的连续性；（iii）用函数连续的“$\varepsilon-\delta$”定义，证明以上两个函数在坐标原点 $O(0,0)$ 处的连续性.

例 12　讨论函数 $f(x,y)=\begin{cases}(x+y)\sin\dfrac{1}{xy}, & xy\neq 0\\ 0, & xy=0\end{cases}$ 在定义域上的连续性.

分析　这是分段函数的连续性问题. 对分段点处的连续性，要根据定义判断，而对非分段点的连续性，利用初等函数的连续性判断即可.

证明　显然，函数 $f(x,y)$ 在整个 xOy 面上有定义，而其分段点为两坐标轴上所有点的集合.

当 $xy\neq 0$ 时，$f(x,y)=(x+y)\sin\dfrac{1}{xy}$ 是初等函数，因此 $f(x,y)$ 连续.

当 $(x,y)\to(0,0)$，亦即 $0<\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}=\sqrt{x^2+y^2}\to 0$ 时，

$$f(x,y)=\begin{cases}(x+y)\sin\dfrac{1}{xy}, & xy\neq 0\\ 0, & x=0\vee y=0\end{cases}.$$

此时，若 $x=0$ 或 $y=0$，由定义 $f(0,0)=0$，显然有 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=0$；若 $xy\neq 0$，因为 $x+y$ 为无穷小量，$\sin\dfrac{1}{xy}$ 是有界函数，从而 $f(x,y)=(x+y)\sin\dfrac{1}{xy}$ 是无穷小量，亦有 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=0$. 又由定义 $f(0,0)=0$，故有

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=f(0,0),$$

即 $f(x,y)$ 在坐标原点 $(0,0)$ 处连续.

当 $(x,y)\to(0,b)\ (b\neq 0)$，亦即当 $0<\sqrt{(x-0)^2+(y-b)^2}=\sqrt{x^2+(y-b)^2}\to 0$ 时，取 $(x,y)\to(0,b)\ (b\neq 0)$ 的两个序列 $x'=\dfrac{1}{bn\pi}, y=b\ (n\to\infty)$ 和 $x''=\dfrac{1}{b\left(2n\pi+\dfrac{\pi}{2}\right)}$，$y=b\ (n\to\infty)$，显然有

$$\lim_{(x',y)\to(0,b)}f(x,y)=\lim_{(x',y)\to(0,b)}(x+y)\sin\frac{1}{xy}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{bn\pi}+b\right)\sin n\pi=0,$$

$$\lim_{(x'',y)\to(0,b)}f(x,y)=\lim_{(x'',y)\to(0,b)}(x+y)\sin\frac{1}{xy}=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{b\left(2n\pi+\dfrac{\pi}{2}\right)}+b\right]\sin\left(2n\pi+\frac{\pi}{2}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{b\left(2n\pi+\dfrac{\pi}{2}\right)}+b\right]=b\neq 0,$$