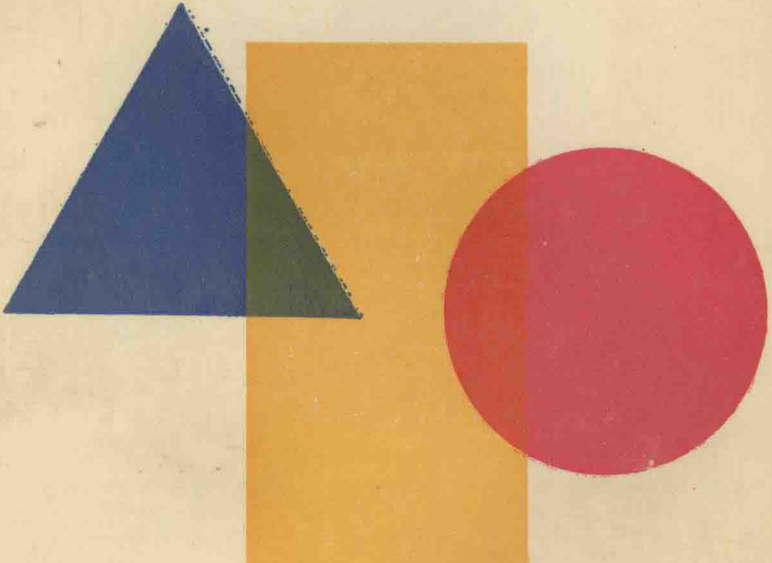
初中数学解题序和术

贺家勇　陈新昌　编著



首 都 师 范 大 学 出 版 社

初中数学解题序和术

贺家勇　陈新昌　编著

首都师范大学出版社

（京）新208号

初中数学解题序和术

编 著 者　贺家勇　陈新昌
出版发行　首都师范大学出版社（原北京师范学院出版社）
社　　址　北京西三环北路105号（邮政编码100037）
经　　销　全国新华书店
印　　刷　三河科教印刷厂
开　　本　787×1092　1/32　印　　数 1—10500册
字　　数　134 千字　　　　印　　张 7.125
版　　本　1993年 7 月　第1版
　　　　　1993年 8 月　第1次印刷
书　　号　ISBN7-81039-058-9/G·53
定　　价　4.50元

作者简介

贺家勇，1950年生，湖南澧县人。湖南师范大学毕业，曾在湖南教育学院进修两年。现任湖南常德市教科所所长兼数学教研员，湖南中学数学教研会常务理事，常德市数学学会副理事长，常德市教育学会秘书长。

在《数学通报》、《湖南教育研究》等刊物及有关学术会议上发表、交流论文18篇；主编专著《初中数学客观题及其解法》、《中学数学纵横选粹》等5种，参加编写的著作有4种。其业绩已被《中国当代教育名人辞典(普教部分)》、《中国数学教育人名辞典》、《湖南教育学院英才录》、《沣浦人杰》收录。

陈新昌，中学一级教师。生于一九四六年四月，安徽省宿州市人。现为宿州市十一中学教师。对初等数学有专门研究在“中学数学教学”，“中学数学研究”等40余家省级及省级以上刊物发表论文200余篇；与他人合编著11部教学用书正式出版，被15家省级刊物聘为特约通讯编辑、记者、通讯员、中国数学会会员，中国教育学会数学教育发展中心会员、宿州市先进教师、市政协委员，多次参加全国及省级数学年会。

读者的话

《初中数学解题序和术》，面向初中师生，面向初中数学爱好者，总结了一般解题程序，解答了一些数学问题。如果说数学问题的解答是目的，那么如何求得数学问题的解答要方法。本书告诉读者，解题要术，解题有术，解题长术。术就是方法。目的固然重要，方法更重要。没有方法，不达目的，达到了目的，学到了方法。

本书所选题目，所用之术，似常非常。本书在“法”字上加砝码，在“巧”字上下功夫。值得一读。

第一读者　张运筹

1992年6月

目　录

第一章　解　题　序

解题在学习和研究数学中的重要作用，谁也不会怀疑。初中数学题的内容丰富多彩，形式千变万化，但无论解什么样的题，都要遵循一定的程序。同一道题，有些人瞑思不得其解，而有的人却象能征善战的将军，从容不迫，全面"侦察"，运筹帷幄一阵之后，不仅能出奇制胜，巧渡难关，而且十分注意"战"后总结。

解题能力的提高，不是一朝一夕的事情，盲目的加大"运动量"，也不一定有好效果。相反，按科学的方法和程序去解数学题，却能达到举一反三，以少胜多的目的。

解数学题的一般程序是，审题→探索→表述→回顾→总结与拓展。如果是考试，总结与拓展可在出考场后进行。

§1　审　　题

审题好似打仗前的"侦察"，是解题成败的关键之一。一般说来，审题要达到如下要求。

一、明辨条件和结论

条件是思考问题和进行推理的起点，是应用数学原理的依据。结论是推理的终点，是解题的最终目的。

数学语言是一种叙述精炼、结构严谨的科学语言，每一个字词都有其特殊含义。对题目的条件和结论，以及关键的

连接语句，一定要字字推敲，句句斟酌。如果题目较难，还可试探把它分解成几个辅助问题。思考这些辅助问题，可能悟出解题方案。

二、罗列条件的简单推论和结论成立的条件

这一工作实质上是对题目进行"解剖"。要解剖成功，需回忆与题目有关的概念、公式、法则、定理等。通过知识再现，由已知推可知，由未知找需知，逐步缩短已知与未知的距离，架好由已知通向未知的桥梁。

三、发掘隐含条件

题中若明若暗，含蓄不露的已知或可知(隐含条件)，常巧妙地隐蔽在题设的背后.发掘隐含条件，能使题设明确化、具体化，便于捕捉解题方向，有时还可使解答过程大为简化。

如后面第二章§3的例2，由一个方程要解出两个未知数，似乎行不通。这提示我们挖掘题中的隐含条件，设法把$2x^2+6xy+5y^2-2x-4y+1$表示成两个完全平方式之和。

四、画出示意图

为使条件更明显，更集中，经常要根据题意作出图示或画出图形。由语言叙述的条件和结论通过画示意图，会更直观、更形象，便于分析推断。

总之，审题越细致，越深入，对探索解题方法越有利。如果凭印象和"经验"，粗枝大叶，拿到题就似乎"见过"或"做过"，则非常有害。因为许多数学题，往往一字之差，会导

致解答面目全非。

§2 探　　索

探索犹如打仗前的运筹帷幄，是解题过程的中心环节。探索时，思维的灵活性至关重要。一般有下面的探索途径。

一、识别题目的类型

如果能把题目归类，列入所学知识的某一章节，或确认与自己大脑所储存的某种题型类似，则可迅速回忆解决问题的方案。因为在数学课本中对很多类型的问题，介绍了解答它们的一般思路。

二、紧扣条件展开思路

探求解法的实质是做由已知到未知的转化工作。条件是转化的起点，概念、公式、法则、定理等是转化的依据。在深刻理解已知条件，发掘隐含条件的基础上，从已知条件出发，通过联想、构思，由已知推可知，再推可知……直到问题最后解决。这种“执因导果”的思维方法，称为综合法。

三、执果索因顺藤摸瓜

探索解法时，起点和终点是相对的。如果把待证的结论作为起点，即假定结论成立，去探求结论成立的条件，再探求这些条件成立又需具备的条件……，如此顺藤摸瓜，直到已知的事实为止。这种由“未知”索“需知”，逐步向“已知”靠拢的“执果索因”的思维方法，称为分析法。

四、两头凑——既执因导果，又执果索因

有时，仅执因导果或仅执果索因，会使思路受阻，而“两头凑”——两种方法配合使用，可能顿开茅塞，打开解题思路。这是值得重视和提倡的一种探索途径。

归纳起来，探索的过程，就是回想、联想、猜想的过程。

回想，即在审题的基础上，根据条件与结论的关系，回忆和思考与题目有关的概念、公式、法则、定理有哪些？能否直接利用它们解题？这类题的常规解法是怎样的？

回想的思维基础是演绎推理，即由一般到特殊的推理。

联想，即从一个数学问题想到另一个数学问题，也就是寻找一个自己熟悉的相似问题，或从与题目接近的原理、方法出发，变通运用这些知识，试探问题能否解决。

联想的思维基础是类比推理，即由特殊到特殊的推理。其基本思维活动是把解决某个特殊问题的思路和方法“移植”过来。应用于接近或相似的问题。

猜想，即对数学对象及其结构的一种迅速识别，直接理解和试探性判断。数学虽以严谨的推理著称，但决不排斥合理的猜想。相反，许多著名猜想的提出和研究，成为数学发展的巨大推动力。比如，一元二次方程的求根公式虽然揭示了根与系数的关系，但给人以繁冗之感。韦达猜想根与系数之间应该有更简洁明了的关系，结果发明了韦达定理。我们解答某些数学题时，同样需要根据已有的经验和一定的技能技巧，“简略”或“浓缩”某些推理过程，借助于猜想进行探索：制订解答方案或得到某个结论，再接受严密的推理论证

和实践的检验.这样做，可能走弯路甚至导致错误，但随着我们数学修养的提高和技能技巧的充实，猜想的准确度会愈来愈高.

猜想的思维基础是不完全归纳推理，即由特殊到一般的推理.其基本思维活动是根据题中的蛛丝马迹，进行追踪和试探，找到解题方向.

当然，回想、联想、猜想往往密不可分，需要灵活运用，相互补充.回想越充分，联想越丰富，猜想越合理，解题思路就越敏捷.

§3 表　述

审明题意，弄清解题思路，确定解题方案之后，要使自己的思维结果被他人公认，必须简明、认真地演算或推证，把解题的思维过程用文字记录下来，这就是表述.表述的基本要求如下.

一、作图准确规范

图形是题设条件的直观表现.准确的作图可以帮助自己思考，为推理提供丰富的感性材料，也便于他人弄清自己的思路.反之，失真的图形干扰解题思路，甚至使自己误入歧途，得出错误的结论.

二、结构层次分明

解一道数学题，就象写一篇小论文.论点是什么，论据是什么；先写什么，再写什么，最后写什么，都应心中有数，想好了再写，力求做到符合逻辑，层次分明，条理清

楚.新学习的题型,表述可详尽一些，因为详细的文字表述常可发现自己在探索解题思路中的某些疏漏。熟知的题型，表述可稍微简略一点，但关键步骤决不能省略。

三、推理言必有据

“据”，是指题目的已知条件，已学过的定义、公式、法则、定理等。解答中的每一步推理，每一个结论，都应认真琢磨它的根据是什么。如发现理由不充分，要及时检查原因，不可盲目继续推演。

需要说明的是，表述解答过程，用综合法还是用分析法，无统一要求，可自行确定。但一般说来，探求解法时，综合法与分析法可配合使用，表述时，综合法却比分析法简捷。

§4 回　　顾

回顾，就是对解答的各步骤进行全面审查，相当于产品出厂前的“质量检验”。回顾检验可侧重在以下几个方面。

一、解答是否有充分的依据

如前所述，解题是将数学原理应用于已知条件或已知条件的推论而进行的一系列推理。解答的正确性是建立在推理正确基础之上的，因此，要对每一步运算、推理逐一分析和推敲，看在运用定义、法则、公式、定理时，是否符合相应的条件和要求，所得的每一结论是否正确无误。

二、解答是否符合题意

由于审题疏忽或其它原因，有时可能产生推理正确但不符合题意的情况，这是不符合解题要求的。如已知$\log_{18}9=a\,(a\neq 2)$，$18^b=5$，求$\log_{36}45$。若给出如下解答

$$\log_{36}45=\frac{\lg 45}{\lg 36}=\frac{\lg 9+\lg 5}{\lg 4+\lg 9}=\frac{2\lg 3+\lg 5}{2(\lg 2+\lg 3)}$$

$$\approx\frac{2\cdot 0.4771+0.6990}{2(0.3010+0.4771)}\approx 1.06.$$

尽管运算无误，运用公式合理，但不符合要求。因为题目要求用a、b表示$\log_{36}45$$\left(\text{正确答案为}\frac{a+b}{2-a}\right)$.

三、解答是否完备

数学题的答案往往不唯一，图形的位置也可能有多种情况。回顾检查时，要根据已知条件，分析可能出现的各种特殊情形，求出所有的解，讨论图形的各种可能位置。

四、解答是否纯粹

答案中必须去掉不符合题意的多余部分，才能保证解答的正确性和合理性。如解方程必须去掉增根，换元后必须检验字母的取值范围是否扩大等。

§5 总结与拓展

如果解题后不注重"消化"与"吸收"，很难从根本上提高

自己的解题能力．总结与拓展，就是解题后的消化与吸收。

总结与拓展，一般围绕总结解题经验，寻求多种解法；探讨命题的推广与一题多思两方面进行．

一、总结解题经验，寻求多种解法

研究同一道题的多种解法，必然要从各个方面发掘已知与未知的联系；必然要综合运用所学的基础知识；必然要施展自己的全部解题技能，斟酌试探：什么途径行不通？什么途径可行？什么方法呆板？什么方法巧妙？如此这般的选优弃劣，对于拓宽自己的解题思路，总结解题规律，积累解题技巧，无疑大有裨益．因此，探索一题多解，即用不同的钥匙开一把锁，是一项十分重要的工作．

二、探讨命题的推广与一题多思

命题的推广与一题多思，是比一题多解更富有趣味，是更高层次的创造性思维活动．做完一道比较有代表性的题后，可考虑从以下几个方面进行推广和思索：

1．用字母代替条件中的具体数字，结论如何？

2．将项数、幂次、因子的个数推广到一般情况，结论如何？

3．在特殊位置成立的结论，推广到一般位置，结论如何？

4．对特殊图形成立的结论，推广到一般图形，结论如何？

5．交换题目的条件和结论，结果如何？

6．题目的条件是否还可以减弱？

7．题目的结论是否还可以加强？

第二章 解 题 术

有人说，数学由数学知识与数学方法组成。这话很有道理。数学课本中，无论是概念的建立，还是命题的论证和习题的解答，都离不开数学方法。如果说数学知识是数学的躯体，那么数学方法则是数学的灵魂。

解题是学习数学的重要手段。在某种意义上说，数学解题是命题的连续交换，而命题的连续交换，又是数学方法的灵活运用。同一数学问题，采用不同的方法，可殊途同归，即一题多解；用同一方法解决不同的数学问题，便产生多题一解。知识固然重要，但方法更重要。积累基础知识，做一定量的模仿性习题，是必要的。但如果忽视数学方法的总结和提炼，在变式性问题面前也会束手无策。可见数学方法的掌握和灵活运用何等重要！

下面，我们以解题为主线，简要介绍初中基本的数学方法，即初中数学基本的解题术。

§1 换　　元

一、概述

用三角形的三边长a、b、c表示其面积$\triangle$，则有

$$\triangle=\frac{1}{2}ab\sqrt{\left(1+\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\right)\left(1-\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\right)}.$$

上式不易记忆，也不便使用。

如适当换元，令$p=\frac{1}{2}(a+b+c)$，上式变成

$$\triangle=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

这个公式形式整齐，易记易用，给人以美的享受。

在数学中，为了书写简洁，或使数量关系变隐为明，化繁为简，化难为易，促使未知向已知转化，把某个式子看成一个新的未知数，实行变量替换的方法称为换元法。

使用换元法的关键在于确定辅助未知数。辅助未知数的确定技巧性较强，没有一般通则可依，只能因题而异。但也不是不可捉摸，请读者从下面的例题中，体会用换元法解题的一般规律。

二、应用举例

(一)有理式代换

例1 分解因式$(1+x+x^2+x^3)^2-x^3$。

解 设$1+x+x^2=y$，则

$$\begin{aligned}\text{原式}&=(y+x^3)^2-x^3\\&=y^2+2yx^3+x^3(x^3-1)\\&=y^2+2yx^3+x^3(x-1)y\\&=y(y+x^4+x^3)\end{aligned}$$

$\therefore$ 原式$=(x^2+x+1)(x^4+x^3+x^2+x+1)$。

例2 解方程$\frac{x-b-c}{a}+\frac{x-c-a}{b}+\frac{x-a-b}{c}=3$。

$(abc\neq0,\ ab+bc+ca\neq0)$

解 设$x-a-b-c=y$，则原方程可写成

$$\frac{y+a}{a}+\frac{y+b}{b}+\frac{y+c}{c}=3,$$