

论连续三角网的精度

〔苏联〕K·Л·普罗沃洛夫著

刘 振 英 译

吴 天 桂 校

中国工业出版社

论连续三角网的精度

〔苏联〕K. Л. 普罗沃洛夫著

刘 振 英 译

吴 天 柱 校

中国工业出版社

本书阐述了連續三角网在精度估計方面的主要問題，叙述和分析了一部分作业成果，导出了估計連續三角网各元素的精度的新公式，并对連續三角网的布設作出了一系列的結論。

作者沒有在本书中提出解决連續三角网的所有問題，尤其是平差問題，单就这一問題而言足可写成一部較大的著作。

本书系供科学工作人員、高等学校师生以及从事大地測量工作的工程技術人員之用。

К. Л. Проворов
О ТОЧНОСТИ СПЛОШНЫХ
СЕТЕЙ ТРИАНГУЛЯЦИИ
Издательство геодезической
литературы
МОСКВА · 1956

* * *
論 連 續 三 角 網 的 精 度

刘振英 譯 吳天柱 校

(根据原測繪出版社紙型重印)

*
国家測繪总局測繪书刊編輯部編輯 (北京三里河国家測繪总局)

中国工业出版社出版 (北京修鵬閣路丙10号)

北京市书刊出版业营业許可証出字第110号

中国工业出版社第四印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 · 各地新华书店經售

*
开本 $850 \times 1168^{1/32}$ · 印张 $6^{3/16}$ · 字数 166,000

1958年5月北京第一版

1964年11月北京新一版 · 1964年11月北京第一次印刷

印数 0001—1,060 · 定价 (科七) 1.10元

*
統一书号: 15165 · 3316 (測繪-121)

獻給導師和朋友

瓦西里·华西里耶維契·波波夫

目 录

原序	5
緒論	7
第一节 連續三角网角度觀測成果之精度	9
第二节 等边三角形連續网中确定边长及坐标 方位角之誤差	62
第三节 任意三角形連續三角网諸元素之精度估計	112
第四节 等边三角形連續三角网內确定对角綫諸 元素之誤差	120
第五节 研究連續三角网各項誤差之实验工作	134
第六节 图形形状对連續网諸元素精度之影响	146
第七节 三、四等三角点之測定精度	160
第八节 起算数据誤差影响之估計	180
結論	191
参考文献	197

原 序

近十年来在布設大規模連續三角网方面获得了广泛的进展。其所以能以大范围及高速度进行这项工作，这是与严密的理論基础及高深的科学研究分不开的。傑出的苏联大地測量学者 Ф. Н. 克拉索夫斯基, А. С. 契巴塔廖夫, В. В. 波波夫, Н. А. 烏尔馬耶夫, А. А. 依佐托夫教授及卓越的苏联測量作业工 程师 С. Г. 苏达科夫, Д. А. 拉林, И. Ю. 普兰尼斯-普兰涅維奇以及其它等人的著作都是些重要的理論基础，即在此基础上，奠定了現代布設大地控制网的方法及其計算方法。

到目前为止，在布設三角网方面已积累了丰富的經驗，并依生产条件制定了技术方案，确定了各个作业过程之技术定額标准。但还有一系列的問題尚需今后进行科学研究及总结作业成果来解决。建立在現代科学水平上的外业及內业各个作业过程的改善、机械化、自动化以及技术研究，平差計算方法以及尽可能地不使連續三角网平差元素受到起算数据誤差影响等問題都是尚待解决的問題，最后，觀測值及平差值之精度估計問題是一个急待解决的問題。

本書主要系研究連續网諸元素的精度問題，为此曾利用各项作业成果，进行了不少的实验工作，并在理論上获得了必要的結論及估算。在推导及改进公式方面，作者力求使这些公式简单化，使之在实际应用上既十分方便，又能保持必要的精度。因此在本書中刊出了許多使計算简单化的专用图解及諾謨图。

如果計算公式不能經常用于二等网的設計及勘选（这些通常使用預先規定的几何限差），則在布設三、四等网时，欲使三角点获得必要的測定精度，工程师必須备有简单方便的計算工具，

为此在本書中載有計算公式及最簡單的計算規則。

估計起算数据的誤差是一个十分困難的問題。本書將提出一个既簡單而又十分精確的方法，該法应用于三、四等三角点精度估計公式中。

作者希望本書中所討論过的一系列問題，有助于連續三角网布設方面的理論工作及实际工作。

作者謹向 А·И·杜尔聶夫教授，特別是向白俄罗斯苏維埃社会主义共和国科学院士 В·В·波波夫 教授給予的帮助及在工作上的許多宝貴指示致以謝意，并向科学技术碩士 А·В·雷托夫、Л·П·彼列年及 В·Н·甘申发表在書报評論上的宝貴建議致以謝意。

К.Л.普罗沃洛夫教授

一九五六年于新西伯利亚

緒 論

在苏联領域內所完成的地形及大地測量的全部作业中，基本大地測量作业占着显著的地位。构成国家天文大地网的一等三角鎖以及布設在广大幅員上的連續三角网皆作为扩展大比例尺測图控制之大地基础，并对有关地球形状及大小的探討給予必須的科学研究資料。

由于苏联領域內轉入到大比例尺測图，由于国民經济各部門对大地測量作业日益增加的需要，以及由于有要借大地測量观测資料来解决的一系列的科学問題，引起了应重新审訂布設国家三角系的現行方案及綱要的必要性。大地測量科学干部及作业干部的增长，以及用大量現代化高精度測量仪器装备起来的測量生产机构，保证了提高基本大地測量作业精度的必要条件。由于中央測繪科学研究所完成了許多科学研究工作的結果，并在利用測繪总局各分局布設一等三角鎖丰富的生产經驗这一基础上，于一九五四年出版了“苏联国家大地測量法式”〔1〕。

一等三角系为构成所有各等三角系的基础，它是由許多鎖段构成的三角鎖，这些鎖段并組成周长达 800 公里的閉合鎖环，而每一鎖段的长不超过 200 公里。一等三角鎖段由形状近似等边的三角形組成，或由三角形与完全四边形所組成，其边长由 20—25 公里。所有大地測量应按一定的方法并使用能保证成果获得最高精度的仪器来进行。按三角形閉合差計算的測角中誤差不应超过 $\pm 0''.7$ ，起算边边长相对誤差不应大于 $1:350\,000$ ，而按各个測回与其算术中数之差計算的鎖段兩端的天文測定中誤差，緯度不应超过 $\pm 0''.3$ ，經度不应超过 $\pm 0''.03$ ，而方位角則不应超过 $\pm 0''.5$ 。

在一等閉合环內布設二、三等連續网，而在最大比例尺測图

时則布設四等連續网或四等導綫。

二等三角网全面地布設于一等网鎖环面积上，該网由平均边長約13公里的三角形所构成。观测水平角时，按三角形閉合差計算的中誤差不能超过 $\pm 1''$ 。直接測定的或由基綫网計算的起算边之長，其相对誤差不应大于1:250 000。基綫网（或直接測定的边）应这样布設，以使該基綫网与相邻一等或二等基綫网間的二等三角形不多于14个，而二等基綫网与一等三角鎖最近边之間的二等三角形不多于9个。在每个鎖环中大約位于二等网中心的起算边两端点上測定天文緯度、經度及方位角，其精度与一等三角測量中之精度相同。

在一等及二等网的基础上，插入单个点或不大的点系来确定三等网的点，而四等网的点則以高等点为基础依类似的方法測定之。規定三等网各三角形之边長平均約为8公里，而四等网的平均边長約为1.5—6.0公里。根据三角形閉合差計算的角度中誤差，三等网不应超过 $\pm 1''.5$ ，四等网不应超过 $\pm 2''.0$ 。

各等网內三角形的形状应尽可能近似于等边三角形。二等网內三角形的角度通常不应小于 30° ，而三等及四等网內三角形的角度則不应小于 25° 。

如果連續网由边長为 S 的等边三角形所組成，那末可以将一个点控制的面积 p 視為內切圓半徑为 $\frac{1}{2}S$ 的正六角形的面积，此点即位于該正六角形的中心。設三角网布設的面积为 P ，并令布設在此面积上的二等及三等点的点数为 n_1 及 n_2 。那末顧及到各毗連点，將有以下的近似关系：

$$\left. \begin{aligned} p &= \frac{4}{5} S^2; \\ n_1 &= \frac{5}{4} \cdot \frac{P}{S_1^2}; \quad n_2 = \frac{5}{4} \cdot \frac{P}{S_2^2} - n_1 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

因之，当三角网的平均边长等于 13 公里时，在 30 000—40 000 平方公里的面积上，必须布设二等三角点 200—300 个，由这些点组成了 450—600 个三角形的网。用三角形平均边长为 8 公里的三等网补充同一锁环时，除二等点外，还应布设 350—500 个三等点，由这些点组成了 750—1000 个三角形的网。

建立如此庞大的三角网确系一复杂问题，这一问题要求有专门的科学理论根据，并应具有顾及整个综合作业而又经过深思远虑的施工程序。

对二等网应提出特别高的要求，其各个部分应尽可能具有同样强度以使该网在平差后能获得同一精度的成果。如果估计到二等网各点是布设在广大的面积上，而且所处的自然地理条件较三角形锁更是各种各样，同时也估计到网的各边在定向上的多样性，那末就可以肯定：测角的总误差，在数值上仍然不小于三角锁的测角总误差，但按其特性来说则接近于偶然量。后一情况非常重要，因为网的平差元素在颇大程度上将不受系统累积的影响，这些元素的中误差便将更严格地表明了它们的精度。

显然，要能获得高精度的成果，就意味着三角测量资料必须进行全面的整理，特别是三角测量的平差，应当以必要的精度和严密而循序地进行。同时，正如任何三角测量一样，连续网的平差元素精度决定于下列条件：构成网的各图形之形状，与起算数据连接的网系形状，起算点与起算边的布设及精度，以及测角精度。后一条件为极精确地获得适应于现代的技术要求的三角网各元素之最重要条件。

第一节 連續三角网角度观测成果之精度

(一)

布设三角系时，为了使测量有可靠的校核，为了提高精度，以及为了估计观测值及平差值的质量，除了观测必要的元素（角

度、基綫及方位角)之外,还应观测附加(多余的)元素。这些附加观测将得出条件方程式中的閉合差,这些閉合差是由于不可避免的观测誤差及起算数据誤差所致。

由于測角誤差通常是不知道的,故这些角度的精度的判定可根据各种因素影响的研究或根据观测資料来进行,更正确一点說,根据重測时的不符值和条件方程式中的閉合差来进行。測站观测角与其平差值之差以及图形条件方程式的閉合差,乃是該項研究最适宜的資料,因为这两种誤差仅由观测角誤差所引起,而与起算数据的誤差无关。应该指出,极条件方程式之閉合差也具有这种特性,但是根据极条件方程式之閉合差来討論角度观测的精度是十分复杂的,而且由于沒有分門別类的資料,往往又是不可能的。

表 1 載出了測站平差角的中誤差(这些誤差是根据測站上之差計算的),以及按下列公式計算的上述角度(一般将此角度称为观测角)之中誤差:

$$m'' = \pm \sqrt{\frac{[ww]}{3n}}, \quad (2)$$

式中 w 为三角形閉合差, n 为三角形数。

三角測量角度中誤差

表 1

三角测量的种类及等級	三角形(T), 鎖段(3),或 三角点(n) 之 数 量	中 誤 差		
		測站上的 $\pm m_1$	按三角形 閉 合 差 $\pm m_2$	$\pm m_2$
位于哈薩克斯坦的二等連續網……	722 T	0.34	0.68	0.59
位于烏拉爾的二等連續網……	276 T	0.25	0.65	0.60
位于东西伯利亚的二等連續網……	162 T	——	0.64	——
位于烏克蘭的二等連續網……	796 T	0.30	0.55	0.46
苏联一等天文大地網, [2]……	295 3	0.30	0.64	0.57
莫斯科一等城市網……	65 n	0.52	0.77	0.57
列宁格列一等城市網……	37 n	0.40	0.56	0.39
位于斯維德洛夫斯克的一等城市網……	25 n	0.59	0.86	0.62

由表 1 可以看出，根据三角形閉合差所計算的角度中誤差比根据測站上不符值所計算的角度中誤差平均要大一倍（就城市三角測量的这一类誤差而言則大 0.5 倍）。这些誤差的差異可以用下述原因来解釋，即根据觀測角或觀測方向与其測站上平差值之差所計算的測站上角度誤差，實質上是表示在一定觀測条件下之**角度觀測精度**。显然，每一角度誤差的常数部分为全部因素平均影响之总和值（剩余值），即此常数部分在測站觀測結果中不会出現，因而也不会影响到角度中誤差值。故在測站上觀測的及平差的角度中誤差只是反映了每一測站上的觀測条件。

諸三角形的閉合差完全反映了各个不同点上全部角度的誤差，因而也是表示角度精度較正确的标志。

茲以 m_1'' 表示測站上觀測条件变化时三角形角度的中誤差，而以 m_2'' 表示仅在比較各个測站觀測成果时出現的角度中誤差，并将下列各項誤差作为确定 m_1'' 值的因素：照准、讀数、仪器之偶然誤差，外部条件及其他誤差。角度誤差 m_2'' 則决定于归心元素測定的是否正确，旁折光的影响，仪器系統誤差等。故总的測角中誤差为

$$m''^2 = m_1''^2 + m_2''^2.$$

根据表 1 各数据所計算的一、二等之 m_2'' 值（載于表 1 最后一栏中），在 0.5—0".6 范圍內，城市三角測量之 m_2'' 值在 0.4—0".6 范圍內。而 m_1'' 之值則各为：0.2—0".3 及 0.4—0".6。

因而野外三角測量之 m_2'' 值大于 m_1'' 值一倍（不包括城市三角測量在內——校者注），故現今非常注意選擇良好的觀測条件及准确地測定归心元素等。在城市三角測量中，当边长較短而視綫通过条件不佳时，这两种誤差的比值是有些不同的，因而在此情況下，必須以同样的程度注意减少各种誤差的影响。

但有一种情况会引起角度觀測成果精度估計問題的某种不定性。如所周知，某測站点至其他各点方向間的角度（三角形的角度或全組合中的角度）或构成“方向組”的方向（即由該測站的

一个共同起点讀出的角度，起始方向通常为連續三角网方向之一），都可以是三角测量中直接測定的独立值。图 1、2、3 为觀測元素略图。

直接觀測方向法，即所謂各个方向与輔助測标方向連測的方法（图 3），我們未予采用。所采用的水平閉合的全周方向觀測法，实际上也可得出直接觀測的各个独立方向^①。

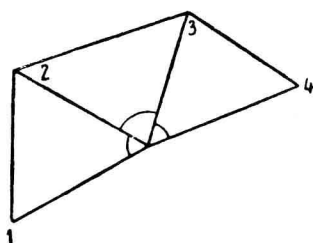


图1 三角形角度觀測略图

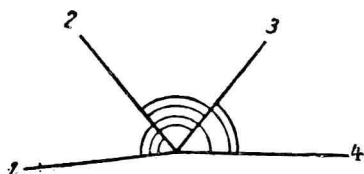


图2 全組合測角略图

連續三角网中之角度觀測应使其在所有各点上得出近似等精

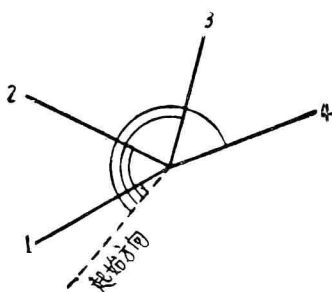


图3 方向觀測略图

度的方向列。为此，可用全周方向觀測法直接觀測方向，或用全組合測角法觀測角度，但应在測站平差結果中求出方向。既然这些方向已进行了測站平差，故按这种方向进行三角測量平差的严密性必須加以确定。

^① 关于使用現代角觀測法直接觀測的角度只可以說是假定的，因为角度是用两个讀数之差表示的，而其中每一个讀数即为与起算边所成的角度。

連續三角网通常按三角形的角度进行平差，而这些角度系由測站平差方向中求得；因此既破坏了运用最小二乘法平差（正确一些說，用这种方法由平差中求出最或然結果）方面的严密性，也破坏了觀測值及平差值精度估計的正确性。

由于通常按公式（2）估計角度觀測精度，故該式中經常含有非独立的量。因而按測站上的差計算的誤差不能完全說明測角的精度。关于用角度平差法估計方向精度的問題，也不十分明确，因为在此情況下，某一些量是另一些量的函数。

故估計觀測角度值之精度及其函数精度問題的某种不定性，就在于此。

当然，如果对直接觀測值〔三角形中的角度（图1），全組合的角度（图2）或方向（图3）〕进行了平差，那末当觀測元素中沒有系統誤差时，問題就容易解决了。

（二）

現在我們来研討一下把由測站角度平差結果所求得的方向进行平差的严密性問題。

由文献〔6〕的逐次平差法中得出这样的結論：用条件觀測法同时一并平差网和測站，無論是根據觀測角或測站概略平差角，其結果都是一样。

設各方向是按測站平差角（用任意权的全組合測角法觀測的）求得的。显然，若測站上系以任意程序进行觀測，且 $n > 3$ 及无其他附加条件，則确定方向权将是一个不定的問題〔3〕。为了消除这种不定性，我們应使按方向平差网的結果与按測站的概略平差角一并平差网及測站的結果相同。

用 $p_{12}, p_{13}, p_{14}, \dots, p_{ik}$ 表示觀測角之权，而用 $p_1, p_2, p_3, \dots, p_i, \dots$ 表示所求的方向权。那末在方向平差时，对編号为 r 的一点而言，可写出下列 n 个誤差方程式：

$$v_1 = -z_r + a_1 x_r + b_1 y_r - a_1 x_1 - b_1 y_1 + l_1 \dots \text{权 } p_1,$$

$$v_2 = -z_r + a_2 x_r + b_2 y_r - a_2 x_2 - b_2 y_2 + l_2 \cdots \cdots + p_2,$$

$$v_3 = -z_r + a_3 x_r + b_3 y_r - a_3 x_3 - b_3 y_3 + l_3 \cdots \cdots \text{和 } p_3,$$

..... (27)

$$v_n = -z_r + a_n x_r + b_n y_r - a_n x_n - b_n y_n + l_n \cdots \text{权} p_n,$$

式中:

a 及 b 为誤差方程式系数;

x 及 y 为各点近似座标改正数;

 ε_r 为测站定向改正数; l 为方程式常数项:

v 为观测方向改正数。三角网全部方程式系中一点的部分方程式(简写)为:

$$[p]z_r - [pa]x_r - [pb]y_r + p_1a_1x_1 + p_1b_1y_1 + p_2a_2x_2 + \\ + p_2b_2y_2 \dots \dots - [pl] = 0$$

$$[paa]x_r + [pab]y_r - p_1a_1^2x_1 - p_1a_1b_1y_1 - p_2a_2^2x_2 - \\ - p_2a_2b_2y_2 \dots \dots \dots + [pal] = 0;$$

$$[pbb]y_r - p_1a_1b_1x_1 - p_1b_1^2y_1 - p_2a_2b_2x_2 - p_2b_2^2y_2 - \dots + [pbl] = 0;$$

$$p_1 a_1^2 x_1 + p_1 a_1 b_1 y_1 - p_1 a_1 l_1 = 0;$$

$$p_1 b_1^2 y_1 - p_1 b_1 l_1 = 0;$$

$$p_2 a_2^2 x_2 + p_2 a_2 b_2 y_2 - p_2 a_2 l_2 = 0;$$

.....

消去第二、第三……………等方程式中的未知数 z ，
即得下列約化方程式：

$$\left\{ [paa] - \frac{[pa]^2}{[p]} \right\} x_r + \left\{ [pab] - \frac{[pa][pb]}{[p]} \right\} x_r -$$

$$\begin{aligned}
& - \left\{ p_1 a_1^2 - \frac{p_1 a_1 [pa]}{[p]} \right\} x_1 - \left\{ p_1 a_1 b_1 - \frac{p_1 b_1 [pa]}{[p]} \right\} y_1 \\
& - \left\{ p_2 a_2^2 - \frac{p_2 a_2 [pa]}{[p]} \right\} x_2 - \dots + \\
& + \left\{ [pal] - \frac{[pa][pl]}{[p]} \right\} = 0; \\
& \left\{ [pab] - \frac{[pa][pb]}{[p]} \right\} x_r + \left\{ [pbb] - \frac{[pb]^2}{[p]} \right\} y_r - \\
& - \left\{ p_1 a_1 b_1 - \frac{p_1 a_1 [pb]}{[p]} \right\} x_1 - \left\{ p_1 b_1^2 - \frac{p_1 b_1 [pb]}{[p]} \right\} y_1 - \\
& - \left\{ p_2 a_2 b_2 - \frac{p_2 a_2 [pb]}{[p]} \right\} x_2 - \dots + \\
& + \left\{ [pbl] - \frac{[pb][pl]}{[p]} \right\} = 0; \\
& \dots
\end{aligned}$$

将上列方程式中 x_r 的系数化为

$$\begin{aligned}
& \left\{ [paa] - \frac{[pa]^2}{[p]} \right\} = \frac{1}{[p]} \left\{ [p][paa] - [p^2 aa] - \right. \\
& \left. - 2[p_i p_k a_i a_k] \right\} = \frac{1}{[p]} [p_i p_k (a_k - a_i)(a_k - a_i)].
\end{aligned}$$

同样得出其余各项的系数为

$$\begin{aligned}
& \left\{ [pab] - \frac{[pa][pb]}{[p]} \right\} = \frac{1}{[p]} [p_i p_k (a_k - a_i)(b_k - b_i)]; \\
& \left\{ p_1 a_1^2 - \frac{p_1 a_1 [pa]}{[p]} \right\} = \frac{p_1 a_1}{[p]} [p_i (a_i - a_1)];
\end{aligned}$$

$$\left\{ p_1 a_1 b_1 - \frac{p_1 b_1 [pa]}{[p]} \right\} = \frac{p_1 b_1}{[p]} [p_i (a_i - a_1)];$$

.....

$$\left\{ [pal] - \frac{[pa][pl]}{[p]} \right\} = \frac{1}{[p]} [p_i p_k (a_k - a_i) (l_k - l_i)];$$

等等。

全組合觀測角按間接觀測法平差時，同一点的誤差方程式为

$$(a_2 - a_1)x_r + (b_2 - b_1)y_r + a_1 x_1 + b_1 y_1 - a_2 x_2 - b_2 y_2 - l_1 + l_2 =$$

$$= v_{12} \cdots \cdots \cdots \text{权 } p_{12};$$

$$(a_3 - a_1)x_r + (b_3 - b_1)y_r + a_1 x_1 + b_1 y_1 - a_3 x_3 - b_3 y_3 - l_1 + l_3 =$$

$$= v_{13} \cdots \cdots \cdots \text{权 } p_{13};$$

$$(a_4 - a_1)x_r + (b_4 - b_1)y_r + a_1 x_1 + b_1 y_1 - a_4 x_4 - b_4 y_4 - l_1 + l_4 =$$

$$= v_{14} \cdots \cdots \cdots \text{权 } p_{14};$$

.....

$$(a_k - a_i)x_r + (b_k - b_i)y_r + a_i x_i + b_i y_i - a_k x_k - b_k y_k - l_i + l_k =$$

$$= v_{ik} \cdots \cdots \cdots \text{权 } p_{ik};$$

.....

三角网总方程式系中一点的部分法方程式为:

$$[p_{ik}(a_k - a_i)(a_k - a_i)]x_r + [p_{ik}(a_k - a_i)(b_k - b_i)]y_r +$$

$$+ [p_{1i}a_1(a_i - a_1)]x_1 + [p_{1i}b_1(a_i - a_1)]y_1 + \cdots \cdots \cdots +$$

$$+ [p_{ik}(a_k - a_i)(l_k - l_i)]$$

等等。

欲使角度及方向的平差結果(平差元素值及其中誤差)相同，那末两个方程式系中相应未知数的系数及常数項应当一致。但这