華南師範學院數學系函授專修科

代數學習指導

第二分册

華南師範學院教務處印發

一九五七年五月

第五章 複數體

1. 時面分配　本章共學習52小時。劃分本章爲三個單元。每個單元的時間分配如下:

第一單元	§ 52—§ 55	閱讀時間	十小時。
第二單元	§ 56—§ 60	閱讀時間	六小時。
第三單元	§ 61—§ 68	閱讀時間	十六小時。
複習			六小時。
作業			十五小時。

2. 全章主要內容 (§ 52—§60)

第一單元　本單元的主要內容，是建立複數集合和複數體以及研究複數的某些性質。首先提出，在實數集合內，方程 $x^2+1=0$ 不能解，亦即在實數集合內，負數的偶次方根的運算不能做，從而說明了建立新的數體的必要。但是，將實數集如何擴張，才能使新的數集包含 -1 的平方根而且又能符合第一章所提的新數擴張的原則? 關鍵的問題，在于如何定義新數間的運算。因爲在教材中，簡單地就以符號 $a+bi$ 作爲複數(此處 ab 爲實數，i 叫做虛單位)，對於賦與符號 i 的意義上來說，是不明顯的。所以，這樣引入複數是形式的。另方面，在新的數集內，是否包含一切實數，亦尚未得知。因此，必須運用新數間所確立的運算結合同構對應的概念，才能對上述問題得到正眞的解釋。在 §52 中，就是根據新數間所定義的運算，說明以 $a+bi$ 爲元素的複數集合中，包含了全體實數，且 i 的實際意義爲 -1，亦即，複數集合是實數集合的擴集，且在這個集合內，方程 $x^2+1=0$ 可以解。這樣，就達到了原來的目的。

複數集合，關于加法和乘法能否構成一個體，在本節中作了比較詳細的論証。借助以實數間的運算，得出所與的加法乘法具有基本運算律，且這兩種運算，在複數集合內均存在逆運算——減法乘法，從而說明複數集合具備了體的性質。因此，複數集合是一個體。

複數的性質，在本節中亦作了初步的闡述。例如，兩共軛複數的和與積是實數，這就爲複數的除法提供了便利條件。又如定理："當我們把組成部分中的每一個換成與其共軛的複數時，算術運算的結果也換成共軛的數"，這不僅說明了複數與其共軛數成一一對應，而且與其相應的運算結果亦成一一對應，因此就顯示出複數體與其自身同構這一特性。

我們知道，複數體是由全體實數附加方程 $x^2+1=0$ 的根而構成的，這無疑的複數體包含了全體實數。但是，實數體是阿幾米德有序體，而複數體却不能成爲阿幾米德有序體。在 §43 中已經証明實數體是最大阿幾米德體，意即在實數體中不能再加入新數，使得擴張後的數集仍然是阿幾米德有序體。所以複數體沒有順序性，"大于""小于"的概念不能擴充到複數體中去。關于這一點，本節已作了証明。另方面，我們也可以這樣說，假如複數體有順序性，則按順序關係將有任何不爲零的元素的平方和恒爲正元素，但在複數體內，數 i 與 1 適合等式：$i^2+1=0$。由 $1^2=1$，得出兩個平方數之和等于零，這是不合適的。所以複數體不是有序體。因此，我們應該明確，當從一個較狹的數集擴充到較廣的數集時，在運算的基本性質雖然沒有損失，但是别的方面的損失還是有的。例如在自然數集裡，永遠有 $a+b>a$，有了零之后，變爲 $a+b\geq a$，當引進負數以後，已經不能說出什麼了。又如由有理數集擴張到實數時，損失了可數性。由實數集擴張到複數集時，損失了順序性，這並沒有什麼奇怪，因爲我們的擴張原則，並沒有這樣規定——把原數集裡的性質完全保留下來。

總之，§52 的內容是回答下述問題：（1）爲什麼要建立複數體；（2）如何建立複數體；（3）複數體中的元素有什麼特性。

從 §53 到 §54 的主要內容，是將複數和複數運算的實際意義，用幾何方法表示出來。根據歷史的傳統，我們稱數 i 爲虛單位，這個"虛"字，初看起來好似有點奇幻，它是需要用產生複數概念的歷史來解釋的。的確，唯心論者的哲學家們，常把複數進行許多純粹的哲學思想，然而，複數的神秘面罩已被揭開了，同時用這些複數可以說明，我們周圍世界中的某些

自然現象間的量的關係，决沒有什麽劣于實數的地方。例如複變函數論在電工學中、流體動力學中、航空動力學中、工程或自然科學的其他部門中都有着非常廣泛的應用。在§53中已經指出，“複數集合與平面上點的集合可使處于一一對應中”，亦即複數可表示平面上的點。又稱，複數 $a+bi$ 可看作是平面上由原點出發的向量（具體解釋見要點指示）。兩個複數之和，為由這兩數所構成的平行四邊形的對角綫。等等。這些都是為複數的實際意義作出了强有力的說明。

複數的標準形式，除了直接與給定的實數偶有關係的代數式 $(a+bi)$ 外，還有一種所謂三角式，在§53中已經提出來了。這種標準形式，將為複數的乘法、除法、乘方以及開方提供了便利條件。但是我們必須記住所給標準式 $Z=\rho\,(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ 中的各個符號，如 ρ 必須取正號（因為它是複數的絕對值），且括弧中必須取“+”號。我們不能把 $Z_1=-2\left(\cos\frac{\pi}{5}+i\sin\frac{\pi}{5}\right)$，$Z_2=3\left(\cos\frac{2}{3}\pi-i\sin\frac{2}{3}\pi\right)$ 認為是複數 Z_1Z_2 的三角式，這些複數的三角式應該是這樣的：$Z_1=2\left(\cos\frac{6\pi}{5}+i\sin\frac{6\pi}{5}\right)$，$Z_2=3\left(\cos\frac{4}{3}\pi+i\sin\frac{4}{3}\pi\right)$。

複數的模及幅角的意義，複數三角式與代數式的互化以及共軛複數的幾何意義等，在研究複數時佔着重要地位，必須好好注意。從複數運算的幾何圖示所導出的棣美弗公式，有着其廣泛應用，應好好掌握它，在§54中也列舉了一些范例。但是在學習這幾節時，應先複習高中三角中的三角函數定義，兩角和與差的正弦及余弦公式，倍角公式，以及高中代數中的，牛頓二項式定理公式等，這樣，才能對這幾節的教材有更好的理解。當然，學習過棣美弗公式後，對于把 n 倍角的三角函數用單角的正弦及余弦的方一來表示，在求法上更形便利。

§55的主要內容，是研究複數的開方問題，這裡又一次說明，把實數這樣來擴張，是符合擴張原則的。因為數的開方運算，在實數體內，不是總可以實施的，而在複數體內，則是永遠可以施行了。

複數開方的理論，給解 n 次的代數方程起了奠基的作用。特別的 對于解二項方程 $xn+a=0$，提出了極為簡捷的方法，因為這是歸結為求 a 的 n 次根的問題。

在過去為了使得方根簡單，應用起來單純，我們對于方根曾强調要取算術根。現在已經証明，一個複數的n次方根有n個且只有n個，那就不能再强調只取算術根了。因此，我們對于$\sqrt{-1}$來說，如果看作是虛單位，那末$\sqrt{-1}=i$；如果看作是-1的平方根，那末$\sqrt{-1}=\pm i$。必須注意，不能把實數體中的根式運算公式$\sqrt{a}\sqrt{\alpha}=\sqrt{ab}$不正確地搬到複數體中來。我們看一個錯誤的例子：$\sqrt{-1}\sqrt{-1}=\sqrt{(-1)(-1)}=\sqrt{1}=1$，由于$\sqrt{-1}=i$，$\sqrt{-1}\sqrt{-1}=i^2$，故$i^2=1$。但是，$i^2=-1$，顯然這推論是錯誤的。其錯誤的原因在于，$\sqrt{-1}$與$\sqrt{1}$在複數體內是變值的，即$\sqrt{-1}=\pm i$與$\sqrt{1}=\pm 1$。因此，我們應該有$\sqrt{-1}\sqrt{-1}=(\pm i)(\pm i)=\pm i^2=\pm 1$，且$\sqrt{1}=\pm 1$（而不是1）；如果對于兩個$\sqrt{-1}$同取$i$或$-i$，我們將有$\sqrt{-1}\sqrt{-1}=i\cdot i=i^2=-1$，或$\sqrt{-1}\sqrt{-1}=(-i)(-i)=(-i^2)=i^2=-1$。

複數n次根的幾何解釋，應好好掌握，它鮮明地指出了求給定數Z的n次根W的一切值，只須順次乘$W_0=\sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{\varphi}{n}+i\sin\frac{\varphi}{n}\right)$以$\Sigma\ \Sigma^2\cdots\cdots\Sigma^{n-1}$（$\rho$與$\varphi$分別為$Z$的模與幅角，$\Sigma=\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n}$），特別地，對于實數$n$次根的虛根或實根的判斷，給出了極好的啓示。因為實數$Z\neq 0$的實數值$\sqrt[n]{Z}$，是位于正n邊形的頂點，又因Z的幅角等于零（當$Z>0$）或π（當$Z<0$），故這些值又位于實軸上。因此，我們馬上可以判斷，$\sqrt[n]{Z}$的實值不能多于兩個，而且，如果是兩個，它必然是絕對值相同而符號相反。如果$Z>0$，則它的幅角等于零，且表示Z_0的頂點，位于正的實半軸下。當n是偶數時，對頂點也在實軸上，因而我們得到了兩個實根；當n是奇數時，對頂點不能在實軸上（因n不能整除2π），因此我們僅能得到一個實根。如果$Z<0$，則它的幅角等于π，數Z_k的幅角表示為$\frac{\pi+2K\pi}{n}=\frac{2K+1}{n}\pi$。當$n$是奇數且$K=\frac{n-1}{2}$時，它的幅角是$\pi$的倍數，因此，我們得到了以$\pi$為幅角的一個實根，即負值；當$n$是偶數時，幅角$\frac{2K+1}{n}\pi$不可能是$\pi$的倍數，因此我們得不到任何實根。

第二單元，本單元的主要內容，是論述複數體內的多項式。由于多項式，有理函數及綫性方程組的理論都是奠基于對係數實施四種算術運算的可能性上，而複數的集合關于算術的四種運又構成一個體，這樣，在有理數體中，一切有關多項式、有理函數及綫性方程組的理論，可以推廣到複數體上去。因此，複數係數的多項式的集合，做成一個環，因爲其中可以實施加法減法與乘法；複數係數的多項式集合，亦能做成一個體，因爲其中可以實施加法減法乘法及除法（零多項式作除式除外）。但是，由于多項式的根以及可約性的概念都是相對的，故在擴大了的數的集合內——複數集合內，對于這些問題，必須重新加以攷慮。本單元就在這些問題上以代數基本定理爲基礎作了若干個的補充論證。例如，在有理數體或在實數體中，我們都說，n 次多項式不能有多于 n 個根，而在複數體內我們就可以斷言，n次多項式有n個根且只有n個根。多項式的既約性也有很大的差別，例如，在有理數體上，任意高次的已約多項式是存在的，在實數體內，只有不超過二次的實係數多項式，才可能是已約的，但在複數體內則只有一次二項式才是已約的。因此，當我們作出對一個多項式是否有根或是否已約的論斷時，應該指明所說的是在那一個數體上。必須注意，在複數體上只有一次多項式才是已約的這一論斷，僅僅對于一個變數的多項多式才是對的。可以證明：任意次數的在複數體內是已約的多變數多項項式是存在的。以上所說的所有情況在 § 58中均有論證。

在 § 57中所提出的代數基本定理，是數值系數多項式的理論基礎，在教材中不作證明而採用它。代數基本定理．並不是一個純粹的代數定理，因爲關于這個定理的所有證明，都多少要利用和連續概念有關的一些性質。到現在爲止，對于給予係數在某一個體 P 中的一個 n 次多項式 $F(x)$，一定有 P的這樣的擴體P' 存在（雖然它的存在性未曾作嚴格證明），使得$F(x)$在P' 裡面有根。譬如，多項式$f(x)=x^2-2$，就存在實數體，使得$f(x)$在它裡面有根；又如，多項式 $g(x)=x^2+1$，也有複數體存在，使得$g(x)$在它裡面有根。我們知道：數體的每一次擴張，都是與找尋多項式根的工作有關系的。但是，當數的領域達到複數體後，就不再行擴張了，複數體的這一美妙性質，是由一個剛才所說的代數基本定理推出的。

實係數多項式，有其獨特的性質，卽，如有虛根必成偶數（注意，這僅

僅對于實係數多項式），由此推出，實係數的奇次多項式至少有一實根，並由比推出結論：在實數體上，任何高于二次的實係數多項式，可以分解爲一次及二次三項式因子連乘積的形式。（也可能全爲一次或二次因子的積）這些論斷，在§59中均作了論述。

在§60中所提到的多項式的根與係數關係，是奠基于兩個多項式的恒等定理的基礎上。首項係數爲1的多項式，它的根與係數的關係，表示爲所謂韋達公式，在這裡多項式的係數，可被表示成它的根的基本對稱函數。在相反情形下，如果給出多項式的根，亦可由韋達公式決定這個多項式。例如，設某一個四次多項式 $f(x)$ 含有二重根1和單根2與6，試求這個多項式。由韋達公式有：

$P_1=-(x_1+x_2+x_3+x_4)=-(1+1+2+6)=-10$，

$P_2=x_1x_2+x_1x_3+x_1x_4+x_2x_3+x_2x_4+x_3x_4=1+2+6+2+6+12=29$，

$P_3=-(x_1x_2x_3+x_1x_2x_4+x_1x_3x_4+x_2x_3x_4=-(2+6+12+12=32$，

$P_4=x_1x_2x_3x_4=12$，

由此所求的多項式是

$$f(x)=x^4-10x^3+29x^2-32x+12。$$

基本對稱函數與韋達公式的這一關係，在應用對稱函數來研究一個未知量的多項式的理論時，佔有重要作用。次之論斷是很重要的：多項式的根的任何有理對稱函數，可以用所給多項式的係數表示出來，教材中限于篇幅未曾作出証明，但從所舉的例子中，亦可以窺見一斑。

我們注意，在推証韋達公式時，是假定多項式的首項係數爲1的情况下而得到的。如果多項式的首項係數不爲1，那麼，應用韋達公式時，首先須將多項式的各項係數除以首項係數。當然，這並不會改變多項式的根。這樣一來，在這一情形韋達公式給予所有係數都是對首項係數的比值的表示式。

3.要點提示：

（1）在§52中，提出了同構對應這一概念，且舉了一些例子。爲了使這一概念有進一步的理解，再作如下的綜合說明：

設在一個集合 N_1 內定義了一個或數個代數運算，在集合 N_2 內也定義了同樣多的代數運算。次設 N_1 的每個代數運算都對應 N_2 的一個代數運算。我們用記號 •，+……代表 N_1 內定義的代數運算，以⊙，⊕……

代表 N_2 內對應的代數運算。

假若集合 N_1 與 N_2 滿足下述條件時，我們說 N_1 與 N_2 是一一同構（關于在它們內定義的代數運算一一同構）：在 N_1 與 N_2 的元素間可以建立一一對應，在這對應下，N_1 的位＝元素 a 與 b 對應于 N_2 的元素 $a'b'$，並且有：

$1°$ 與和 $a+b$ 對應的是和 $a' \oplus b'$；

$2°$ 與積 $a \cdot b$ 對應的是積 $a' \odot b'$。

一一同構對應的概念瞭解爲代數上的形式等價。形式等價在算術上可以看做是數的相等的概念，在集合論上可以看做濃度相等的概念。從代數的觀點，一一同構的集合可以看作相同，因爲在近世代數裡不在于討論集合的元素的性質，而在于研究代數運算的性質，所以就代數運算的性質而論，一一同構的集合實在沒有什麼本質上的區別，唯一的區別只是命名不同而已。我們所要注意的是：用這種觀點可以把代數抽象化。這樣，被討論的對象的屬性就可以不問，只要它滿足所給予的某些公理，我們的結論對它就可以適用。

基于上面的理由，我們就可以把形如 $a+oi$ 的複數所成的集合與全體實數所成的集合看作是相同；形如 $a+bi$ 的複數所成的集合與平面上的點所成的集合或與平面上由原點引出的向量所成的集合，均可以看作是相同。

（2）在 §53 中提到，平面上的點或平面上由原點所引出的向量，均可用數複 $a+bi$ 來表示，這一事實是正確的，但教材中未作說明。爲了揭露複數的實際意義，再作一次解釋：

設在平面上取一正坐標系我們知道，不論平面上的點或由原點所引的向量，均可用一對有次序的實數偶（以下簡稱序偶）$Z=(a,b)$ 來確定。在這些序偶的集合中，我們來定義加法和乘法。設 $Z_1=(a_1,b_1)$，$Z_2=(a_2,b_2)$

$$Z_1+Z_2=(a_1,b_1)+(a_2,b_2)=(a_1+a_2,b_1+b_2) \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

$$Z_1 \cdot Z_2=(a_1,b_1)\cdot(a_2,b_2)=(a_1a_2-b_1b_2,a_1b_2+b_1a_2) \cdots (2)$$

我們給這兩個運算以幾何的解釋（以序偶所確定的向量爲例）。

我們証明，這個集合關于加法和乘法構成一個體。

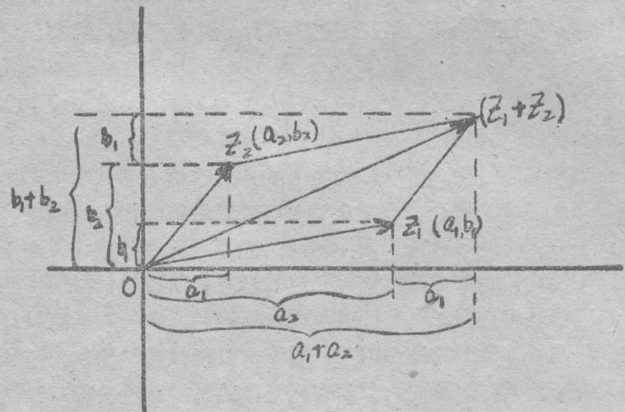
首先，由驗稱得知，這些運算滿足基本運算律。

由實數的運算性質，導出了這些序偶的加法具有交換性和結合性：

因 $(a_1,b_1)+(a_2,b_2)=(a_1+a_2,b_1+b_2)$

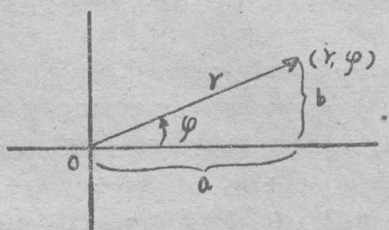
$$(a_2\ \ b_2)+(a_1\ \ b_1)=(a_2+a_1,\ b_2+b_1)$$

加法取一組正坐標系，並作向量 Z_1，Z_2 如下圖:



我們知道，向量加法是根據平行四邊形的規則，平行四邊形的對角綫，就代表兩個向量的和。不難証明（類似的証明，可參照教材 § 54）向量（Z_1+Z_2）的終點的坐標是（$a_1+a_2\ \ b_1+b_2$）。

乘法　爲了給向量 Z_1、Z_2 的乘法的幾何解釋，我們先利用下把向量由其極坐標來確定（圖中 γ、φ 表示向量的模和幅角）:



極向量的極坐標與正坐標的關係有如下式:

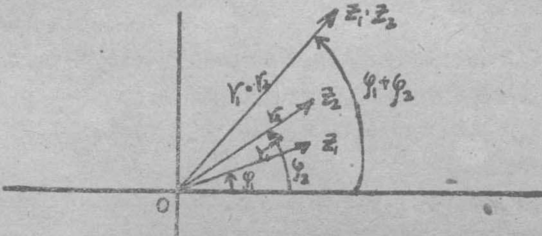
$$a=\gamma\cos\varphi,\quad b=\gamma\sin\varphi;$$

$$Z=(a,\ b)=(\gamma\cos\varphi,\ \gamma\sin\varphi)。$$

現在來看，$Z_1\cdot Z_2=(a_1,b_1)(a_2,b_2)=(\gamma_1\cos\varphi_1,\ \gamma_1\sin\varphi_1)(\gamma_2\cos\varphi_2,$
$\gamma_2\sin\varphi_2)$

$$=(r_1\cos\varphi_1 r_2\cos\varphi_2-r_1\sin\varphi_1 r_2\sin\varphi_2,\ r_1\sin\varphi_1 r_2\cos\varphi_2+r_1\cos\varphi_1 r_2\sin\varphi_2)$$
$$=[r_1\cdot r_2\cos(\varphi_1+\varphi_2),\ r_1\cdot r_2\sin(\varphi_1+\varphi_2)],$$

因此得，两個向量相乘，可以把它們的模相乘，幅角相加。如下圖：



故 $(a_1,b_1)+(a_2,b_2)=(a_2,b_2)+(a_1,b_1)$

因 $[(a_1,b_1)+(a_2,b_2)]+(a_3,b_3)=(a_1+a_2,b_1+b_2)+(a_3,b_3)$
$$=(a_1+a_2+a_3,b_1+b_2+b_3)$$
$$(a_1,b_1)+[(a_2,b_2)+(a_3,b_3)]=(a_1,b_1)+(a_2+a_3,b_2+b_3)$$
$$=(a_1+a_2+a_3,b_1+b_2+b_3)$$

所以 $[(a_1,b_1)+(a_2,b_2)]+(a_3,b_3)=(a_1,b_1)+[(a_2,b_2)+(a_3,b_3)]$

同理，這些序偶的乘法具有交換性結合性以及乘法對加法的分配性。

因 $(a_1,b_1)\cdot(a_2,b_2)=(a_1a_2-b_1b_2,a_1b_2+b_1a_2)$，
$$(a_2,b_2)(a_1,b_1)=(a_2a_1-b_2b_1,a_2b_1+b_2a_1),$$

故 $(a_1b_1)(a_2,b_2)=(a_2,b_2)(a_1,b_1)$。

因 $[(a_1,b_1)(a_2,b_2)](a_3,b_3)=(a_1a_2-b_1b_2,a_1b_2+b_1a_2)(a_3,b_3)$
$$=(a_1a_2a_3-b_1b_2a_3-a_1b_2b_3-b_1a_2b_3,\ a_1a_2b_3-b_1b_2b_3+a_1b_2a_3+b_1a_2b_3),$$
$$(a_1,b_1)[(a_2,b_2)(a_3,b_3)]=(a_1,b_1)(a_2a_3-b_2b_3,a_2b_3+b_2a_3)$$
$$=(a_1a_2a_3-a_1b_2b_3-b_1a_2b_3-b_1b_2a_3,\ a_1a_2b_3+a_1b_2a_3+b_1a_2a_3-b_1b_2b_3),$$

故 $[(a_1,b_1)(a_2,b_2)](a_3,b_3)=(a_1,b_1)[(a_2,b_2)(a_3,b_3)]$。

因 $[(a_1,b_1)+(a_2,b_2)](a_3,b_3)=(a_1+a_2,b_1+b_2)(a_3,b_3)$

$$=(a_1a_3+a_2a_3-b_1a\ \ -b_2a_3,$$
$$a_1b_3+a_2b_3+b_1a_3+b_2a_3),$$
$$(a_1,b_1)(a_3,b_3)+(a_2,b_2)(a_3,b_3)=(a_1a_3-b_1b_3,a_1b_3+b_1a_3)$$
$$+(a_2a_3-b_2b_3,a_2b_3+b_2a_3)$$
$$=(a_1a_3-b_1b_3+a_2a_3-b_2b_3,$$
$$a_1b_3+b_1a_3+a_2b_3+b_2a_3),$$

故 $[(a_1,b_1)+(a_2,b_2)](a_3,b_{\ })=(a_1,b_1)(a_3,b_3)+(a_2,b_2)(a_3,b_3)$。

其次，加法和乘法均有逆算——減法和除法:

減法 設序偶$Z_1=(a_1b_1)$，$Z_2=(a_2,b_2)$，現在求一序偶$Z_3=(x_1y)$使之滿足條件:

$$(a_2,b_2)+(x,y)=(a_1,\ b_1)。\qquad\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

我們假定這樣的序偶是存在的，于是

$$(a_2+x,\ b_2+y)=(a_1,\ b_1),$$

由此得方程組: $a_2+x=a_1$與$b_2+y=b_1$。

爲了確定xy，解這方程組得: $x=a_1-a_2$與$y=b_1-b_2$，

即 $Z_3=(a_1-a_2,\ b_1-b_2)$。

由驗算得知，確能滿足條件（1）:

$$(a_2b_2)+(a_1-a_2\ b_1-b_2)=(a_2+a_1-a_2,b_2+b_1-b_2)=(a_1\ b_1),$$

故 $Z_1-Z_2=Z_3$。

這就証明了減法是可以唯一地實施。

除法 設序偶$Z_1=(a_1,\ b\ )$，$Z_2=(a_2,\ b_2)$，且$(a_2,\ b_2)\pm 0$。因a_2b_2爲實數且至少有一個不爲零，故$a_2^2+b^2>0$。

現在求一序偶$Z_3=(x,y)$，使之滿足條件:

$$(a_2b_2)(x,\ y)=(a_1,b_1)。$$

我們假定這樣的序偶是存在的，于是

$$(a_2x-b_2y,\ a_2y+b_2x)=(a_1,\ b\ ),$$

由此得方程組: $a_2x-b_2y=a_1$與$a_2y+b_2x=b_1$。

對于$x\,y$解方程組得:

$$x=\frac{a_1a_2+b_1b_2}{a_2{}^2+b_2{}^2},\quad y=\frac{b\ a_2-a_1b_2}{a_2{}^2+b_2{}^2}$$

即 $Z_3=\left(\dfrac{a_1 a_2+b_1 b_2}{a_2^2+b_2^2},\ \dfrac{b_1 a_2-a_1 b_2}{a_2^2+b_2^2}\right)$。

由驗算得知，Z_3 確能滿足條件（2）這就証明了除法是可以唯一地施行。

（註：對于序偶的相等，正如對于任意集合的元素一樣，我們理解爲恒等。當且僅當$a_1=a_2$，$b_1=b_2$時，$(a_1, b_1)=(a_2, b_2)$。）

因此，這個集合備具了體的性質，故成爲一個體，我們用K來表示。至于K裡序偶的零元、單位元、負元、逆元以及這些元素的性質，我們不難由所定義的運算推出。

現在研究，這個體K具有什麼性質。

在K內選取形如$(a,0)$的一切序偶爲K的部分集合，用$\overline{D}$來表示。我們可以在$\overline{D}$和實數D之間建立一一對應關係。令實ab與$(a,0)$ $(b,0)$對應：$a\longleftrightarrow(a,0)$；$b\longleftrightarrow(b,0)$。由相應的加法和乘法得到：

$$a+b\longleftrightarrow(a+b,0)=(a,0)+(b,0);$$

$$ab\longleftrightarrow(ab,0)=(a,0)(b,0)。$$

因此，實數體D和集合$\overline{D}$是一一同構（關于乘法和加法一一同構），所以集合$\overline{D}$也是一個體（這個論斷，從同構意義上來說是正確的，當然，亦不難由所定義的運算來直接驗証）。D和$\overline{D}$已然是同構，我們就可以把序偶$(a,0)$與實數a看做是一樣，換句話說，對于任意的實數a，可令$(a,0)=a$。如此同樣看待的話，$\overline{D}$就轉化爲實數體D，從而得出體K是實數體的擴體。卽是說，體K包括了所有實數。

現在再來看一看體K究竟是什麼。

在K內任取一序偶$Z=(a,b)$，由加法定義，這個序偶可以寫成如下形式：

$$Z=(a,b)=(a,0)+(0,b)$$

因爲$(a,0)=a$，$(b,0)(0,1)=(b\cdot0-0\cdot1, b\cdot1+0\cdot0)=(0,b)$卽$(0,b)=(b,0)(0,1)=b(0,1)$，

所以 $$Z=a+b(0,1)$$

令 (0,1) 記作$Z^{\cdot}$，得到$z=a+bi$

序偶$(0,1)$代表什麼？假如把它平方，由乘法定義得出：

$$(0,1)^2=(0,1)(0,1)=(0-1,0)=(-1,0)=-1。$$

即 $i=\sqrt{-1}$ 亦即 i 正是方程 $x^2+1=0$ 的根。

因此，體K並不是什麼，正是形如$a+bi$爲元素的集合，這裡ab爲實數，而 $i=\sqrt{-1}$。

這樣一來，由剛才所構成的體K與§52教材中所論述的複數體，按同構意義來說，是完全一樣的。因此，我們完全可以相信。複數 $a+bi$ 可以代表平面上的點或平面上由原點所引起向量。

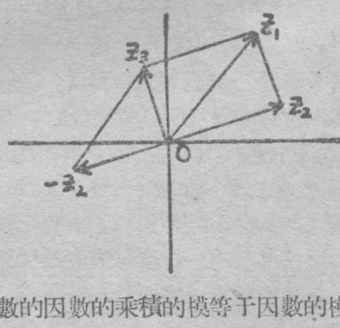
從以上的解釋中，我們已經看出，複數並沒有什麼奇幻而是有其實際意義。在這裡我們又一次看到，§52中的定義4°5°並不是偶然的，而是不能改變的，這個複數理論的基礎，我們應好好掌握它。

(3)在§52複數的減法中提到；"減法可用加上與減數相反的數來代替"。在那裡"相反數"的意義不够明確，應作如下定義；

複數 $a+bi$ 與$(-a)+(-b)i$ 互稱爲反數。

複數的相反數以及命題；"減法可用加上與減數相反的數來代替"的幾何意義如下圖:

$$Z_1-Z_2=Z_1+(-Z_2)=Z_3$$



(4)第§54中的定理: 何任個數的因數的乘積的模等于因數的模的乘積，"而積的幅角等于因數的幅角的和"，在証法上提到了用數學歸納法來推証，但教材中未曾列出，現作如下補充:

對于两個複數的乘積，教材中已有証明。今設對于 n, 個複數的積，定理成立，即

$$|Z_1\cdot Z_2\cdot Z_3\cdots\cdots Z_n|=|Z_1|\cdot|Z_2|\cdot|Z_3|\cdots\cdots|Z_n|;$$

及 $$\arg(Z_1Z_2Z_3\cdots\cdots Z_n)=\arg Z_1+\arg Z_2+\arg Z_3+\cdots\cdots\arg Z_n。$$

以是，對于 $n+1$ 個複數的積，我們有；

$$|Z_1\cdot Z_2\cdot Z_3\cdots\cdots Z_n\cdot Z_{n+1}|=|(Z_1\cdot Z_2\cdot Z_3\cdots\cdots Z_n)Z_{n+1}|$$

$$=|Z_1\cdot Z\ \ \cdot Z_3\cdots\cdots Z_n|\cdot|Z_{n+1}|$$
$$=|Z_1|\cdot|Z_2|\cdot|Z_3|\cdots\cdots|Z_n|\cdot|Z_{n+1}|;$$

及 $$\arg(Z_1Z_2Z_3\cdots\cdots Z_nZ_{n+1})=\arg[(Z_1Z_2Z_3\cdots\cdots Z_n)Z_{n+1}]$$
$$=\arg(Z_1Z_2Z_3\cdots\cdots Z_n)+\arg Z_{n+1}$$
$$=\arg Z_1+\arg Z_2+\arg Z_3+\cdots\cdots+\arg Z_n+\arg Z_{n+1}。$$

由此，定理對于 n 個複數成立時，則對于 $n+1$ 個複數也成立。但已知定理對于兩個複數時成立，所以，定理對于多于兩個的任意個數的複數亦成立。（証完）

（5）§54 第 170 頁的例了，對于 $\sin nx$ 及 $\cos nx$ 的展開式，教材中的証明過于簡畧，今補充如下：

由牛頓二項式定理公式：

$$(a+b)^n=a^n+C_n^1a^{n-1}b+C_n^2a^{n-2}b^2+\cdots\cdots C_n^ka^{n-k}b^k+\cdots\cdots+b^n$$

式中 $C_n^k=\dfrac{n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-K+1)}{K!}\ (K!=1\cdot2\cdot3\cdot4\cdots\cdots K)$。

當 $a=\cos\alpha$ 及 $b=\sin\alpha$ 時，我們有：

$$(\cos\alpha+i\sin\alpha)^n=\cos^n\alpha+C_n^1\cos^{n-1}\alpha(i\sin\alpha)+C_n^2\cos^{n-2}\alpha(i\sin\alpha)^2$$
$$+\cdots\cdots+C_n^k\cos^{n-k}\alpha(i\sin\alpha)^k+\cdots\cdots+(i\sin\alpha)^n\cdots①$$

按照 i 的乘方：$i^1=i,i^2=-1,i^3=-i,i^4=1,\cdots\cdots i^{4n+k}=i^k(K=1,2,3)$

並將①整理後，我們有：

$$(\cos\alpha+i\sin\alpha)^n=(\cos^n\alpha-C_n^2\cos^{n-2}\alpha\sin^2\alpha+C_n^4\cos^{n-4}\alpha\sin^4\alpha-\cdots\cdots)$$
$$+i(C_n^1\cos^{n-1}\alpha\sin\alpha-C_n^3\cos^{n-3}\alpha\sin^3\alpha+\cdots)\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

但由棣美弗公式 $(\cos\alpha+i\sin\alpha)^n=\cos n\alpha+i\sin n\alpha$。$\cdots\cdots\cdots\cdots(2')$

比較(2)(2')右端實部及 i 的係數，我們有：

$$\cos n\alpha=\cos^n\alpha-C_n^2\cos^{n-2}\alpha\sin^2\alpha+C_n^4\cos^{n-4}\alpha\sin^4\alpha-\cdots$$
$$\sin n\alpha=C_n^1\cos^{n-1}\alpha\sin\alpha-C_n^3\cos^{n-3}\alpha\sin^3\alpha+C_n^5\cos^{n-5}\alpha\sin^5-\cdots\cdots$$

（註牛頓二項式定理公式，對于複數來說是成立的。因爲通常這個公式的証明，是根據加法與乘法的一些性質。而這些性質，對于複數來說顯然是成立的。）

（6）§55 定理後半部："在 W_k 的值中只有 n 個彼此相異的數"的証明，較爲費解；又當 $Z=0$ 時的情况，教材中亦未作說明。現作補述如下：

教材中，已經給出複數 $Z=\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ 的求 n 次根公式：

$$W_k=\sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{\varphi+2K\pi}{n}+i\sin\frac{\varphi+2K\pi}{n}\right),$$

其中 $K=0,\pm1,\pm2\pm3,\cdots\cdots$

現在我們証明，W_k 的無窮多個值中，有 n 個值是彼此不同的。令 $K=0,1,2,3\cdots\cdots,n-1$，得根的 n 個值 $W_0,W_1,W_2\cdots\cdots W_n$。在這些 n 個值中，任取兩個 W_r 和 W_s，其中 $O\geq\gamma<n$，$O\leq S<n$，則

$$\arg W_r-\arg W_s=\frac{\varphi+\gamma2\tau}{n}-\frac{\varphi+2S\pi}{n}=\frac{2\pi(\gamma-S)}{n}。$$

因爲 γ,S 都比 n 小，故 $|\gamma-S|\angle n$，卽 $\left|\frac{\gamma-S}{n}\right|\angle1$，所以 $\arg W_r$ 與 $\arg W_s$ 的差不是 2π 的整倍數。由是 $\arg W\ \neq\arg W_s$，又因 $\sqrt[n]{\rho}\neq0$，故 $W_r\neq W_s$。所以 $W_0W_1W_2\cdots\cdots W_{n-1}$ 是 n 個不同的數。

再來証明，在 W_k 的無窮多個值中，只有 n 個是不同的。如果在 $W_0W_1W_2,\cdots\cdots W_{n-1}$ 外再取 W_n，我們有：

$$\arg W_n=\frac{\varphi+2n\pi}{n}=\frac{\varphi}{n}+2\pi=\arg W_0+2\pi$$

但 $\cos\frac{\varphi}{n}=\cos(\frac{\varphi}{n}+2\pi)$ 及 $\sin\frac{\varphi}{n}=\sin(\frac{\varphi}{n}+2\pi)$，由此得

$$W_0=W_n。$$

同理可証 $W_0=W_n=W_{2n}=W_{3n}=\cdots\cdots=W_{-n}=W_{1-2n}=\cdots\cdots$

$W_1=W_{n+1}=W_{2n+1}=\cdots\cdots=W_{-n+1}=W_{-2n+1}=\cdots\cdots$

一般地，如果 $K-l$ 是 n 的倍數時，則

$$W_k=W_{ee}。$$

因此，在 W_k 的無窮多個值中有 n 個且只有 n 個是不同的。

最後，當 $Z=0$ 時，由于 0 的 n 次⌐等于 0，故 0 是它的口住一的 n 次根。如果還有不是零的複數 α 是它的 n 次根，則 $\alpha^n=0$、但是根校 §52 第 161 定理；"答乘積等于零，則因數中至少有一爲零"，這是不可能的，所以，當 $Z=0$ 時，它的 n 次根只有一個值等于零。（証完）

（7）§59 第一個定理，教材中的証明過于簡畧，玆補充如下：

設實係數多項式 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x_{n-1}+\cdots\cdots+a_0$。
首先用 $\xi+\eta i$ 代替 $f(x)$ 中的 x 得

$$f(\xi+\eta i)+a_n(\xi+\eta i)^n+a_{n-1}(\xi+\eta i)^{n-1}+\cdots\cdots+a_0,$$

依牛頓二項式公式層開這恒等式右端各項，並集其實部得 P，集其虛部得 Q，于是

$$f(\xi+\eta i)=P+Qi。$$

其次，用 $\xi-\eta i$ 代替 $f(x)$ 中的 x 得

$$f(\xi-\eta i)=a_n(\xi-\eta i)^n+a_{n-1}(\xi-\eta i)^{n-1}+\cdots\cdots+a_0,$$

因爲係數 $a_na_{n-1}a_{n-2}\cdots a_0$ 是實數與其身自共軛，而$(\xi+\eta i)^k$與$(\xi-\eta i)^k$ $(K=1,2,3,\cdots\cdots n)$ 共軛。同樣用牛頓二項式公式層開各項，並分別集其實部與虛部，按 §52 定理：當我們把組成部分中的每一個換成與它共軛的數時，算術運算的結果也換成共軛的數’，因此得 $f(\xi-\eta i)=P-Qi$（以後的証明，與教材中的相同。）

（8）在 §60 中提到基本對稱函數，教材中未曾解釋，今補述如次：

在第二章 §20 中說到對稱多項式。對稱多項式，有時也稱之爲由式中變數所確定的對稱函數。對稱函數的例子很多，如

$$f(x_1,x_2)=(Ax_1+x_2)+B$$

$$f(x_1,x_2,x_3)=(Ax_1{}^2+x_2{}^2+x_3{}^2)+B(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)$$
$$+C(x_1+x_2+x_3)+D$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

等等。此外還有：

$$(1)\left\{\begin{array}{l}f_1(x_1,x_2,x_3,\cdots x_n)=x_1+x_2+x_3+\cdots+x_n,\\ f_2(x_1,x_2,x_3,\cdots x_n)=x_1x_2+x_1x_3+\cdots+{}_{n-1}x_n,\\ f_3(x_1,x_2,x_3,\cdots x_n)=x_1x_2x_3+x_1x_2x_4+\cdots+x_{n-2}x_{n-1}x_n\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ f_{n-1}(x_1,x_2,x_3,\cdots x_n)=x_1x_2r_3\cdots x_{n-1}+x_1x_2\cdots x_{n-2}x_n+\\ \qquad\cdots+x_2x_3\cdots x_n,\\ f_n(x_1,x_2,x_3,\cdots xn=x_1x_2x_3\cdots x_n。\end{array}\right.$$

（1）式中所示的各個對稱函數，稱之爲基本對稱函數。

4.學習方法

本章的學習方法，大體上可以參考第四章所提出的方法。但是，在

§53 — 55的教材中，涉及三角知識較多，因此，在學習前必須複習高中三角的有關部分，這樣，對于該部分教材才能有更好的理解。

5.學習要求

第一單元的要求　本單元的特點，是在實際的基礎上用定義的方式規定各個概念，從概念出發，推證其他定理。因此，對于定義的掌握，占有首要地位。下列各個定義必須理解和記憶：複數，複數的相等，複數爲零，兩個複數的和與積，共軛複數，複數的模和輻角，同構對應（參看要點提示1）。在理解這些定義的基礎上，搞清下列問題：

(1)複數體是怎樣的？

(2)爲什麼要建立複數體？如何建立？

(3)複數體中的元素，具有怎樣的性質？這些元素的實際意是怎樣的？

(4)在怎樣的情況下，兩個集合才算做是同構對應（要能舉出例子：a.同構的；b.元素間雖然一一對應，但又不是同構的）？

(5)爲什麼在複數體內，開方運算是永遠可能？它的方法是怎樣？

(6)棣美弗公式及其證明。

(7)複數的三角式以及複數的三角式與代數式的互化。（以上(1)，(2)，(3)，(4)可進行小組討論）

第二單元的要求　本單元的特點，是在複數體上概括有理數體和實數體中多項式的理論，借代數基本定理爲基礎，推證出若干定理。這些定理，在研究數值係數多項式時起着重要作用。因此，下列問題，必須深入理解和記憶，並要熟悉其推證方法：

(1)對于有理數體上的多項式，有理函數及線綫方程組的理論，何以能推廣到複數體上去的理由，

(2)代數基本定理（只須記憶，若要證明，可參考奧庫涅夫著"高等代數"第八章第§45），

(3)在複數體上多項式的因子分解，可約性，根的個數以及實係數多項式的特點——虛根成偶數，

(4)實數體上多項式的可約性，