电磁场基础

吴万春　赵玉书 编

1974

西 北 电 讯 工 程 学 院

电磁场基础

吴万春　赵玉书 编

西 北 电 讯 工 程 学 院

1974.6.

列 宁 语 录

世界是运动着的物质，力学反映这一物质的缓慢运动的规律，电磁理论反映这一物质的迅速运动的规律。

毛 主 席 语 录

我们的教育方针，应该使受教育者在德育、智育、体育几方面都得到发展，成为有社会主义觉悟的有文化的劳动者。

教育必须为无产阶级政治服务，必须同生产劳动相结合。

无产阶级认识世界的目的，只是为了改造世界，此外再无别的目的。

理论的基础是实践，又转过来为实践服务。

必须提倡思索，学会分析事物的方法，养成分析的习惯。

主 要 符 号 表

$\vec{A}$	磁矢位
A	(1)常数(2)面积(3)功
a	一般常数
$\vec{B}$	磁感应强度矢量
B	常数
b	一般常数
C	(1)常数(2)电容
c	真空中的光速
$\vec{D}$	电感应强度矢量
$\vec{E}$	电场强度矢量
E_i	入射波电场
E_r	反射波电场
E_t	(1)电场切线分量(2)透射波电场
e	电动势
$\vec{F}$	力的矢量
f	(1)函数(2)频率
$\vec{H}$	磁场强度矢量
H_i	入射波磁场
H_r	反射波磁场
H_t	(1)磁场切线分量(2)透射波磁场
h	高度
I	电流
I_a	分子电流
i	电流强度的瞬时值
i_c	传导电流的瞬时值
i_d	位移电流的瞬时值
$\vec{J}$	电流密度矢量
$\vec{J}_s$	面电流密度矢量
$\vec{J}_c$	传导电流密度矢量
$\vec{J}_d$	位移电流密度矢量
j	$\sqrt{-1}$
$\vec{K}$	动量矩
K	(1)比例常数(2)波数
$\tilde{K}$	复波数
k	常数
L	(1)自感(2)长度
l	长度
$\vec{M}$	磁化强度
N	(1)电力线数目
	(2)分子磁矩数目
	(3)去磁系数
$\vec{n}$	法线单位矢
n	(1)线圈匝数
	(2)单位体积中分子磁矩的数目
	(3)单位体积中电子数目
	(4)折射率
$\vec{P}$	极化强度矢量
$\vec{P}_m$	磁化强度矢量
P	功率
$\vec{p}$	电矩
$\vec{p}_m$	磁矩
p	功率密度
Q,q	电荷
Q_i,q_i	束缚电荷
R	(1)电阻(2)距离
R_s	表面电阻
r	距离
$\vec{S}$	坡印亭矢量
S_{av}	坡印亭矢量的平均值
S	面积
T	周期
$\vec{t}$	切线单位矢

t 时间

U 电位差、电压

u 电压的瞬时值

V 体积

v 波速

v_P 相速

W 能量

w 能量密度

w_e 电能密度

w_m 磁能密度

X_C 容抗

X_s 表面电抗

Z 阻抗

Z_L 负载阻抗

Z_s 表面阻抗

α (1)相位常数(2)极化角

β 衰减常数

Γ 反射系数

Δ 穿透深度

δ 损耗角

ϵ 介电常数

ϵ_o 真空的介电常数

ϵ_r 相对介电常数

$\tilde{\epsilon}$ 复介电常数

η 波阻抗

η_0 空气的波阻抗

$\tilde{\eta}$ 复数波阻抗

θ 角度

θ_c 临界角

θ_p 布鲁斯特角

λ 波长

λ_0 自由空间波长

μ 导磁率

μ_0 真空中的导磁率

μ_r 相对导磁率

ρ (1)电荷密度(2)电阻率(3)椭园率

ρ_s 面电荷密度

ρ_l 线电荷密度

σ 电导率

φ (1)电位(2)磁通(3)磁标位

φ_m 磁位

χ 相对电极化率

χ_m 相对磁化率

ω 角频率

x,y,z 直角坐标

$\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ 直角坐标系各坐标方向的单位矢

r,θ,z 柱面坐标

$\vec{r}^0,\vec{\theta}^0,\vec{k}$ 柱面坐标系各坐标方向的单位矢

r,θ,Ψ 球面坐标

$\vec{r}^0,\vec{\theta}^0,\vec{\Psi}^0$ 球面坐标系各坐标方向的单位矢

目　　录

前　　言

我们已经知道，两个带电物体虽互不接触，却能相互吸引或排斥，这是因为，带电物体能够激发一种物质弥漫于空间，通过这种物质的交换使两个带电物体发生相互作用。这种弥漫于空间的物质称为电场。与此相似，带磁性物体也能激发一种弥漫于空间的物质，称为磁场。电场和磁场是紧密联系着的，并且在运动过程中可以相互转化，它们具有能量和动量，同时也具有质量，因此将它们统称之为电磁场。

本书的任务就是讨论电磁场的基本运动规律，它是英国物理学家麦克斯韦建立的，是反映宏观电磁场的理论，是我们今后学习雷达天线和微波工程的理论基础。本书先从比较简单的静电场和恒定电流磁场开始，依次讨论交变电磁场、电磁波、电磁波的辐射与传播，以及电磁波的反射和折射。

电磁场理论是经过比较长期的实践验证和理论概括而成的一门科学，它描述的电磁现象比较复杂，使用的数学工具较多。因此，在学习时必须明确了解其基本概念，牢牢掌握其基本规律。对于数学推导，必须理解它所揭示的新的概念，以及由它所得到的定量结论。只有这样，才能学得深透，才能为后续课程打好理论基础。

第一章 静 电 场

不随时间变化的电场称为静电场。绝对不随时间变化的静电场是没有的，只不过是在宏观上相对不变而已。例如有些良好的绝缘体，其漏电很小，可以认为在较短的时间内其上所带的电荷不随时间变化，因而这种不变的电荷所激发的电场，就可以看成是静电场。

静电场是交变场的特例，是其极限情况，研究它对于理解交变电磁场是大有帮助的。为此，我们从静电场开始。毛主席说，**“人们总是首先认识了许多不同事物的特殊的本质，然后才有可能更进一步地进行概括工作，认识诸事物的共同本质。”**我们分别研究了电场和磁场后，再去研究交变电磁场。

§1.1 电场和电场强度

对观察者相对静止的电荷称为静电荷，简称电荷，它所激发的电场称为静电场。在通常的情况下，人的感觉器官不能直接感觉到电场的存在，但可以通过带电体的受力来检验它。为此，我们先讨论带电体间的相互作用力，然后再讨论分布电荷以及与其相关的电场。

一、库仑定律

库仑于1785年由实验结果总结出：“在真空中，两个点电荷间的相互作用力，与两个点电荷的电量之积成正比，与其间距离平方成反比，力的方向在两点电荷的联线上，同性相斥，异性相吸”。这个规律通常称为库仑定律，其数学表示式为

$$\vec{F}_{12}=\frac{q_1q_2\vec{r}_{12}}{4\pi\epsilon_0 r^3} \qquad (1.1\text{-}1)$$

式中，q_1和q_2为两个点电荷的电量，单位为库仑。$\vec{r}_{12}$是由q_1到q_2的矢径，$r=|\vec{r}_{12}|$是其间的距离，单位为[米]。ϵ_0是个比例常数，叫做真空的介电常数，其值为$\frac{1}{36\pi}\times10^{-9}=8.85\times10^{-12}$[法/米]。

图1.1-1示出矢径$\vec{r}_{12}$和$\vec{F}_{12}$与$\vec{F}_{21}$的方向。由图可见，$\vec{F}_{12}$是作用在q_2上的力，$\vec{F}_{21}$是作用在q_1上的力，两者大小相等方向相反。$\vec{F}_{12}$和$\vec{F}_{21}$的指向与q_1和q_2的符号有关，当q_1和q_2的符号相同时（同性电荷），两者的指向如图1.1-1所示，是为排斥力；当q_1和q_2的符号相反时（异性电荷），两者的指向与图1.1-1所示的相反，是为吸引力。所有这些概念都在（1·1-1）式中表示出来。

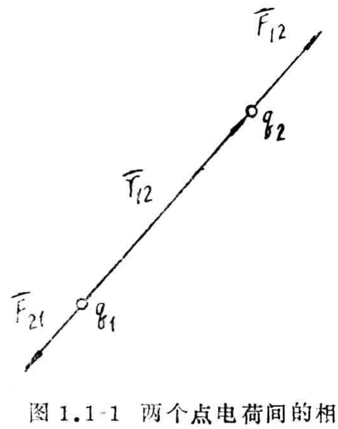


图1.1-1 两个点电荷间的相互作用力

如果空间有n个点电荷，它们的电量分别为q_1，q_2，……q_n，它们间的矢径分别为$\vec{R}_{21}$，$\vec{R}_{31}$……，$\vec{R}_{n1}$，则q_1所受的作用力是其余各电荷分别作用在q_1上的作用力之和，即

$$\vec{F}_1 = \frac{q_1 q_2 \vec{R}_{21}}{4\pi\epsilon_0 R^3_{21}} + \frac{q_1 q_3 \vec{R}_{31}}{4\pi\epsilon_0 R^3_{31}} + \cdots\cdots + \frac{q_1 q_n \vec{R}_{n1}}{4\pi\epsilon_0 R^3_{n1}} \tag{1.1-2}$$

应该指出，（1.1-2）式不是（1.1-1）式的直接推论，而是一个新的实验定律，称为迭加定律，这是电磁场理论的十分重要的根本定律。

［例题 1］ 如图 1.1-2，在每边长 1 米的等边三角形的顶点上分别放有点电荷 q_1，q_2，q_3，已知$q_1 = q_2 = 10^{-8}$库仑，$q_3 = -10^{-12}$库仑，求 q_3 所受的力。

［解］ 由图 1.1-2 知：

$$\vec{R}_{13} = \vec{i}\,0.5 + \vec{j}\,0.866$$

$$\vec{R}_{23} = -\vec{i}\,0.5 + \vec{j}\,0.866$$

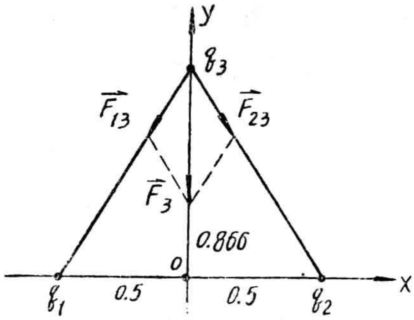


图1.1-2 例题 1 用图

因此，q_1和q_2对q_3的作用力分别是

$$\vec{F}_{13} = \frac{q_1 q_3 \vec{R}_{13}}{4\pi\epsilon_0 R_{13}{}^3}$$

$$= -9\times 10^{-9}(\vec{i}\,0.5 + \vec{j}\,0.866)$$

$$= -\vec{i}\,4.5\times 10^{-9} - \vec{j}\,7.79\times 10^{-9}$$

（牛顿）

$$\vec{F}_{23} = \frac{q_2 q_3 \vec{R}_{23}}{4\pi\epsilon_0 R_{23}{}^3} = -9\times 10^{-9}(-\vec{i}\,0.5 + \vec{j}\,0.866)$$

$$= \vec{i}\,4.5\times 10^{-9} - \vec{j}\,7.79\times 10^{-9} \quad （牛顿）$$

故q_3所受的力是

$$\vec{F}_3 = \vec{F}_{13} + \vec{F}_{23} = -\vec{j}\,(7.79\times 10^{-9} + 7.79\times 10^{-9})$$

$$= -\vec{j}\,1.56\times 10^{-8} \quad （牛顿）$$

二、电场强度

既然电场这种物质可以通过带电物体间的相互作用来检验它，当然也可以通过带电物体间的相互作用来量度它。量度电场强弱的物理量叫做电场强度，定义为单位正电荷所受的作用力。设有一个试探点电荷q_0放在电场中间的某一点上，其所受的作用力为 $\vec{F}$，则电场中该点的电场强度 $\vec{E}$为

$$\vec{E} = \vec{F}/q_0 \qquad [伏/米] \tag{1.1-3}$$

电场强度 $\vec{E}$是个矢量，也是个位置函数，它的大小表示该点电场的分布密度，它的方向就是该点正电荷受力的方向。电场强度的单位是[伏/米]。

对于空间只有一个点电荷 q 来说，其所激发的电场的电场强度是

$$\vec{E} = \frac{q\,\vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3} \tag{1.1-4}$$

式中 $\vec{r}$ 是点电荷q到欲求电场强度的点（观察点）的矢径，r为其间距离。

如果空间有几个点电荷，它们的电量分别为 q_1，q_2，……，q_n，它们到观察点的矢径分别是 $\vec{r}_1$，$\vec{r}_2$，…… $\vec{r}_n$，则这些点电荷在观察点所激发的电场强度是

$$\vec{E}=\frac{q_1\vec{r}_1}{4\pi\epsilon_0 r_1{}^3}+\frac{q_2\vec{r}_2}{4\pi\epsilon_0 r_2{}^3}+\cdots\cdots+\frac{q_n\vec{r}_n}{4\pi\epsilon_0 r_n{}^3} \tag{1.1-5}$$

必须注意，电场强度是表示电场强弱的物理量，它丝毫不依赖于试探电荷的大小和正负。例如，在电场中某点放一电荷 q'，若此点的电场强度为 $\vec{E}$，则此电荷 q' 的受力将是 $q'\vec{E}$，因此不能把它们混淆起来。

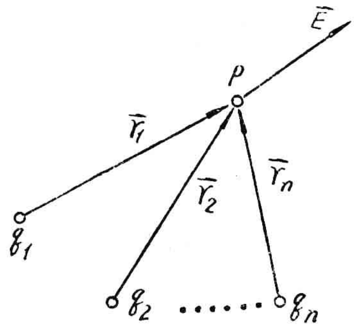


图 1.1-3　诸点电荷的电场

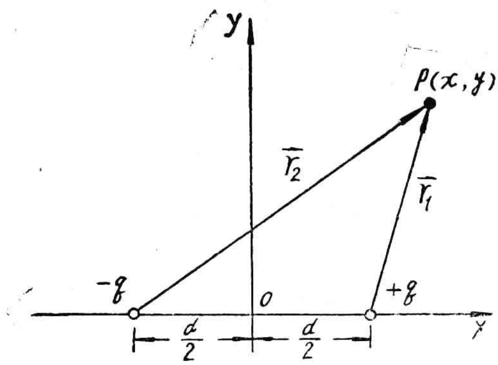


图 1.1-4　例题 2 用图

［例题 2］　如图1.1-4所示，两个带有相等相反电量的点电荷q和－q，它们间相距为d，求空间任一点 P的电场强度。

［解］　由图 1.1-4 知，

$$\vec{r}_1=\vec{i}\left(x-\frac{d}{2}\right)+\vec{j}\,y$$

$$\vec{r}_2=\vec{i}\left(x+\frac{d}{2}\right)+\vec{j}\,y$$

以及

$$r_1=\sqrt{\left(x-\frac{d}{2}\right)^2+y^2}$$

$$r_2=\sqrt{\left(x+\frac{d}{2}\right)^2+y^2}$$

于是

$$\vec{E}=\frac{q\vec{r}_1}{4\pi\epsilon_0 r_1{}^3}-\frac{q\vec{r}_2}{4\pi\epsilon_0 r_2{}^3}$$

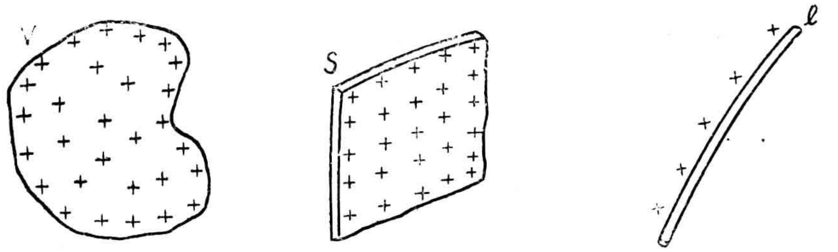
$$=\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_1{}^3}\left[\vec{i}\left(x-\frac{d}{2}\right)+\vec{j}\,y\right]-\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_2{}^3}\left[\vec{i}\left(x+\frac{d}{2}\right)+\vec{j}\,y\right]$$

$$= \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left[\vec{i}\left(\frac{x-\frac{d}{2}}{r_1^3}-\frac{x+\frac{d}{2}}{r_2^3}\right)+\vec{j}\left(\frac{y}{r_1^3}-\frac{y}{r_2^3}\right)\right]$$

三、分布电荷及其电场

在讨论宏观静电现象时，带电体总是具有一定的尺寸。前面所谓的点电荷，只不过其所占据的体积尺寸，比所研究的距离要小得多罢了。对于占据一定尺寸的电荷，我们可以认为它连续地分布在带电物体之内或其表面上，称之为分布电荷。研究电荷分布情况时，首先须了解电荷是大量带电粒子的总合，因而分布是不连续的。但在研究其宏观性质时，由于宏观仪器所能观察到的最小电荷，至少也包含亿万个带电粒子，观察结果总是这些大量带电粒子所产生的平均效果。因此我们可以完全不考虑带电粒子的结构，而用电荷连续地、不间断地分布在带电区域内这一概念来代替，这样可以大大地简化我们所研究的问题，并且能很好地反映客观实在，不致引起很大误差。

采用电荷连续分布的概念后，如果电荷分布在一个体积 V内，则称之为体电荷；如果电荷分布在一个表面 S上，则称之为面电荷；如果电荷分布在一根线 l 上，则称之为线电荷。图1.1-5 示出电荷这三种分布情况。



(a) 体电荷　　(b) 面电荷　　(c) 线电荷

图 1.1-5　分布电荷的三种形式

对于带有分布电荷的物体，在研究其激发电场时，除了要知道其所带的总电荷外，还需要知道此电荷分布的疏密程度，即电荷密度。设电荷分布在体积 V中，若在此体积内任取一个小体积元 dV，其中所带的电量为dq，则此分布电荷的体密度 ρ 为

$$\rho = \frac{dq}{dV}[库/米^3] \tag{1.1-6}$$

体电荷密度 ρ是空间的点函数。如果把dq看成点电荷，则其在观察点激发的电场强度是

$$d\vec{E} = \frac{dq\vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3} = \frac{\rho dV\vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3}$$

利用迭加定律，则分布在体积 V内所有电荷在观察点激发的电场强度是

$$\vec{E} = \int_V \frac{\rho\vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3}dV \tag{1.1-7}$$

式中$\vec{r}$是体积元 dV到观察点的矢径。

如果电荷分布在表面S的薄层上，在表面 S上任取一面积元dS，其上所带的电量为 dq，则此面电荷密度 ρ_s 是

$$\rho_s = \frac{dq}{dS} \qquad [\text{库/米}^2] \tag{1.1-8}$$

若把 $dq = \rho_s dS$ 看成点电荷，则其在观察点激发的电场强度是

$$d\vec{E} = \frac{dq\,\vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3} = \frac{\rho_s dS\,\vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3}$$

利用迭加定律，可得整个面电荷在观察点所激发的电场强度是

$$\vec{E} = \int_s \frac{\rho_s dS\,\vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3} \tag{1.1-9}$$

设电荷分布在很细的线 l 上，若在线上任取一长度元 dl，其上所带的电量为 dq，则此线电荷密度 ρ_l 是

$$\rho_l = \frac{dq}{dl} \qquad [\text{库/米}] \tag{1.1-10}$$

如果把$dq = \rho_l dl$看成点电荷，则其在观察点上激发的电场强度是

$$d\vec{E} = \frac{dq\,\vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3} = \frac{\rho_l dl\,\vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3}$$

于是整个线电荷激发的电场强度是

$$\vec{E} = \int_l \frac{\rho_l dl\,\vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3} \tag{1.1-11}$$

［例题 3］ 设有一电荷均匀分布于无限长线上，线电荷密度为ρ_l，如图 1.1-6 所示。试求距线为 d 的观察点上的电场强度。

［解］ 首先取坐标如图 1.1-6所示，长线和 y 轴重合，P 点在 x 轴上，距原点为 d 。然后在长线上任取一长度元$dl = dy$，其上电量为$dq = \rho_l dy$，于是此线电荷激发的电场强度为

$$\vec{E} = \int_l \frac{\rho_l dy\,\vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3}$$

由于$\vec{r} = \vec{i}\,d - \vec{j}\,y$，$r = \sqrt{d^2 + y^2}$，故得

$$\vec{E} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\rho_l dy}{4\pi\epsilon_0 (d^2+y^2)^{3/2}} (\vec{i}\,d - \vec{j}\,y)$$

$$= \vec{i}\,\frac{\rho_l d}{4\pi\epsilon_0}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dy}{(d^2+y^2)^{3/2}}$$

$$- \vec{j}\,\frac{\rho_l}{4\pi\epsilon_0}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{y\,dy}{(d^2+y^2)^{3/2}}$$

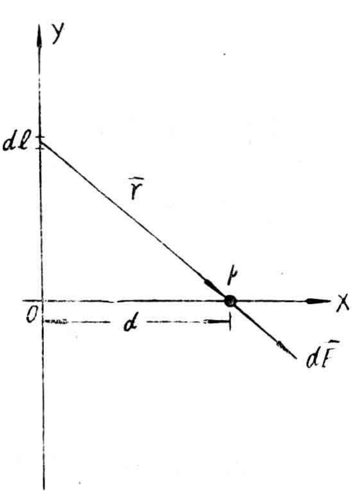


图1.1-6 例题 3 用图

上式右边第一项积分可写为

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dy}{(d^2+y^2)^{3/2}}=2\int_0^{\infty}\frac{dy}{(d^2+y^2)^{3/2}}=\frac{2y}{d^2\sqrt{d^2+y^2}}\bigg|_0^{\infty}=\frac{2}{d^2}$$

右边第二项积分可写为

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{ydy}{(d^2+y^2)^{3/2}}=\int_0^{\infty}\frac{ydy}{(d^2+y^2)^{3/2}}+\int_{-\infty}^{0}\frac{ydy}{(d^2+y^2)^{3/2}}$$

$$=\int_0^{\infty}\frac{ydy}{(d^2+y^2)^{3/2}}-\int_0^{\infty}\frac{ydy}{(d^2+y^2)^{3/2}}=0$$

这是因为上式积分中的被积函数是奇函数，故积分结果为零。最后得出无限长线电荷的电场强度是

$$\vec{E}=\vec{i}\,\frac{\rho_1 d}{4\pi\epsilon_0}\cdot\frac{2}{d^2}=\vec{i}\,\frac{\rho_1}{2\pi\epsilon_0 d}$$

若选圆柱面坐标并令无限长线电荷在圆柱面坐标轴上，于是其电场强度可改写为

$$\vec{E}=\vec{r}^{\circ}\frac{\rho_1}{2\pi\epsilon_0 r}=\frac{\rho_1\vec{r}}{2\pi\epsilon_0 r^2}$$

式中 $\vec{r}$ 是圆柱坐标的辐射矢径，$\vec{r}^{\circ}$是其单位矢量，r 是其长度。

§1.2 电力线与高斯定理

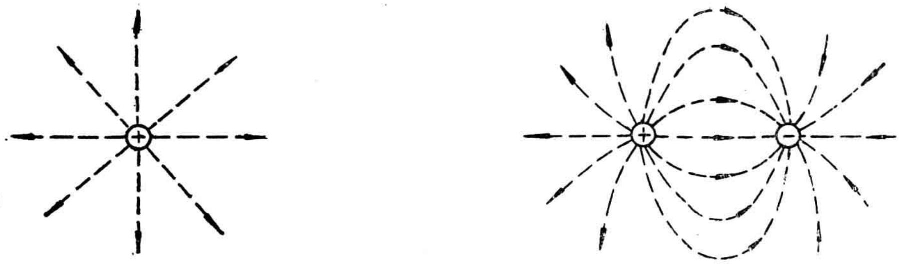
电场强度是电场中各观察点的位置函数，它能很确切地表示各点的电场的强弱和方向，但它不能很直观地说明整个电场的分布情况，所以常采用假想的电力线来形象地描绘电场分布。引用电力线后，再把电力线数目与激发电场的电荷联系起来，从而得出静电场的一个基本性质——高斯定理。下面我们分别讨论之。

一、电 力 线

在电场中各点沿电场强度方向画一些小箭头，并把相邻的方向几乎一致的小箭头连接成连续的曲线，叫做电力线。所以电力线上任一点的切线方向表示该点的电场强度方向。为了能用电力线的疏密程度来表示电场的强弱，我们规定以下的绘制电力线根数的方法：在电场中某一点取一面积元 dS，并使其与该点的电场强度方向垂直，如果该点的电场强度为$\vec{E}$，则穿过 dS 画 dN 根电力线，并令

$$|\vec{E}|=\frac{dN}{dS} \qquad (1.2\text{-}1)$$

这就是说，电场中某点的电力线密度等于该点电场强度的数值，因此电场强的地方电力线密，电场弱的地方电力线疏。根据以上法则画出电场的电力线图，就可以一目了然地看出电场的分布情况。图 1.2-1 示出一个孤立点电荷和两个等值异性点电荷的电力线分布图。



(a) 点电荷的电场分布 (b) 两个等值异性点电荷的电场分布

图 1.2-1 电力线图

由电力线定义和图 1.2-1 可知，电力线有如下特点：

(1) 电力线是一族从正电荷出发而终止于负电荷的非闭合曲线。

(2) 在无电荷区域内电力线互不相交，因为在一点上电场强度不能同时有两个方向。上述第一个特点说明电荷激发电场；第二个特点说明电场强度是位置的单值函数。

电力线可以根据电场强度的函数关系画出来。例如孤立点电荷的电场强度的关系式是

$$\vec{E}=\frac{q\vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3}$$

由于$\vec{E}$的方向就是$\vec{r}$方向，因而电力线就是以点电荷 q 为中心向空间发散的径向辐射线〔如图1.2-1(a)〕。如果电场的函数复杂，电力线的分布情况可以由测量方法确定出来。

二、电场强度通量

在电场中任取一面积 S，则穿过此面积的电力线总数，称为该面积的电场强度通量，简称为电通量，用 N 表示之。在前面我们定义电力线时，已经引出了垂直穿过面积元 dS 的电力线数目是

$$dN=EdS$$

若电力线与面积元 dS 不垂直，可以将 dS 投影到与电力线垂直方向（如图 1.2-2），从而得出穿过 dS 的电通量是

$$dN=EdS\cos\theta=\vec{E}\cdot d\vec{S}$$

于是穿过面积 S 的电通量是

$$N=\int_s\vec{E}\cdot d\vec{S} \qquad (1.2\text{-}2)$$

式中 θ 为面积元$d\vec{S}$与该点电场强度$\vec{E}$间的夹角。

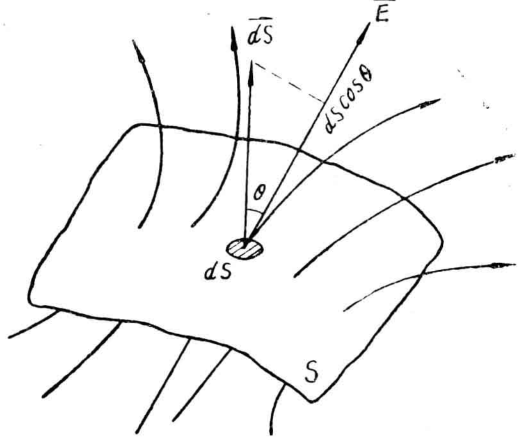


图 1.2-2 计算电通量用图

三、真空中的高斯定理

既然电荷在它的周围空间激发电场，而我们又用电力线的密度来表示电场强度，故电通量必然与激发电场的电荷有一定的关系。现在我们来找出这个关系——高斯定理。

为了明确了解高斯定理的内容，我们首先看看一个特例。设空间只有一个点电荷 q，我们以 q 为球心，以 r 为半径作一球面 S 包围着点电荷 q，如图 1.2-3 所示，我们来计算穿过球面 S 的电通量。由于

$$\vec{E}=\frac{q\vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3}$$

故穿过球面 S 的电通量为

$$N=\oint_s \vec{E}\cdot\vec{dS}=\oint_s \frac{q\vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3}\cdot\vec{dS}$$

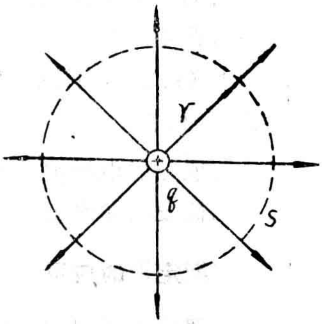


图 1.2-3 点电荷电通量的计算

式中 $\vec{r}$ 为矢径，其方向垂直球面，因而 $\vec{r}$ 和 $\vec{dS}$ 平行，故得

$$N=\oint_s \frac{qrdS}{4\pi\epsilon_0 r^3}=\oint_s \frac{qdS}{4\pi\epsilon_0 r^2}=\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\oint_s dS$$

$$=\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}4\pi r^2=\frac{q}{\epsilon_0}$$

这就是说，在点电荷的电场中以点电荷为球心，取一包围点电荷的球面 S，则穿过该面积的电力线数目等于其所包围的电量的 $1/\epsilon_0$ 倍，即

$$\oint_s \vec{E}\cdot\vec{dS}=q/\epsilon_0 \qquad (1.2\text{-}3)$$

由于球面半径 r 是任意取的，取大取小都不影响这一结论，因此点电荷 q 发出的电力线总共是 q/ϵ_0 根，在空间没有电荷的区域内既不增加也不减少，只不过其密度发生变化罢了。这个特例，我们可以把它推广到任意分布电荷的电场和任意封闭面的情况中。为此我们来考虑如下问题：

(1) 对于图 1.2-3，如果球心不在 q 上，但球面还是包围着 q，结果如何？

(2) 对于图 1.2-3，如果封闭面不是球面，但还包围着 q，结果如何？

(3) 对于图 1.2-3，如果封闭面不包围着 q，结果如何？

(4) 如果空间有许多电荷分布，结果如何？

回答前两个问题是比较直接的，因为点电荷激发的电场不随我们选取封闭面 S 而变，故从点电荷发出的电力线数目也是不随我们选取 S 面而变的，因此只要封闭面 S 包围着点电荷 q，不管 S 面的形状如何，穿过 S 面的电通量总是 q/ϵ_0。如果封闭面 S 不包围着点电荷 q，则由于在没有电荷的区域中电力线不会增加或减少，因此进入封闭面的电力线等于穿出封闭面的电力线。进入封闭面的电通量为负，穿出封闭面的电通量为正，因而穿过封闭面的总电通量为零。即当封闭面 S 不包围着点电荷 q 时，

$$\oint_s \vec{E}\cdot\vec{dS}=0 \qquad (1.2\text{-}4)$$

对于第四个问题，我们可应用电场中的迭加定律，把分布电荷看成许多点电荷，由于每个点电荷都满足(1.2-3)或(1.2-4)式，于是它们对分布电荷也成立。

综合以上讨论，我们得出真空中的高斯定理是："在电场中任取一个封闭面 S，穿过此封闭面的电通量，等于它所包围着的电荷的 $1/\epsilon_0$ 倍"即

$$\oint_S \vec{E}\cdot\vec{dS} = Q/\epsilon_0 \qquad (1.2\text{-}5)$$

式中电荷 Q 是 S 面包围着的电荷的代数和，S 面未包围着的电荷不计在内。例如在图1.2-4中 S 面只包围着 q_1，q_2，q_3，而 q_4，q_5 未包围在内，故应用 (1.2-5) 式时，$Q = q_1 + q_2 + q_3$，而不计算 q_4 和 q_5。

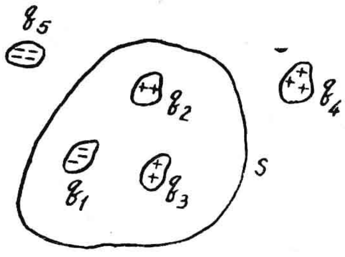


图 1.2-4 高斯定理

高斯定理是静电场中一个重要定理，它说明了静电场是个有源场，电荷是电场之源。电力线从正电荷发出而终止于负电荷，每单位正电荷发出 $1/\epsilon_0$ 根电力线。

四、高斯定理的应用

高斯定理除了说明静电场是个有源场这个基本性质外，对于某些高度对称的电场，还可以应用它来计算电场强度。下面我们讨论如何应用高斯定理计算电场强度。

电场呈现出高度对称应该是什么样子呢？要解决这个问题，必须从(1.2-5)式去寻找。我们知道，要想从 $\oint_S \vec{E}\cdot\vec{dS} = Q/\epsilon_0$ 中计算出电场强度 E 来，这只有在极端特殊情况下才有可能：

(1) 在S 面上 $\vec{E}$必须处处与$\vec{dS}$方向一致；或 $\vec{E}$在 S 面的一部分S′上与$\vec{dS}$方向一致，而在另一部分S″上与$\vec{dS}$方向相垂直或等于零，于是

$$\oint_S \vec{E}\cdot\vec{dS} = \int_{S'} \vec{E}\cdot\vec{dS} + \int_{S''} \vec{E}\cdot\vec{dS} = \int_{S'} EdS$$

其中S″上$\vec{E}$和$\vec{dS}$相垂直或$\vec{E} = 0$，则 $\vec{E}\cdot\vec{dS} = 0$，因而通量为零。

(2) 在S′面上$\vec{E}$的数值必须处处相等，于是

$$\int_{S'} EdS = E\int_{S'} dS = E\cdot S' = Q/\epsilon_0$$

从而得出

$$E = \frac{Q}{\epsilon_0 S'} \qquad (1.2\text{-}6)$$

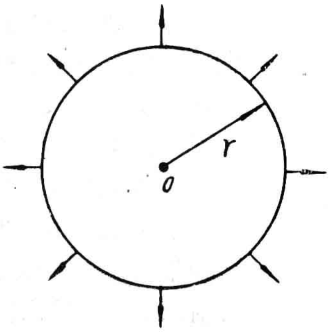


图 1.2-5 球面对称的电场

下面我们就几种高度对称的电场来说明如何选封闭面？如何求电场强度？

(1) 球面对称的电场

在球面对称的电场中，以对称原点为球心的任何球面上，各点电场强度的大小相等，方向与球面垂直，如图 1.2-5 所示。激发这样电场的电荷分布也必须是球面对称的，例如点电荷、在球面上均匀分布的面电荷以及球体内均匀分布的体电荷等的电场，都是球面对称的电场。