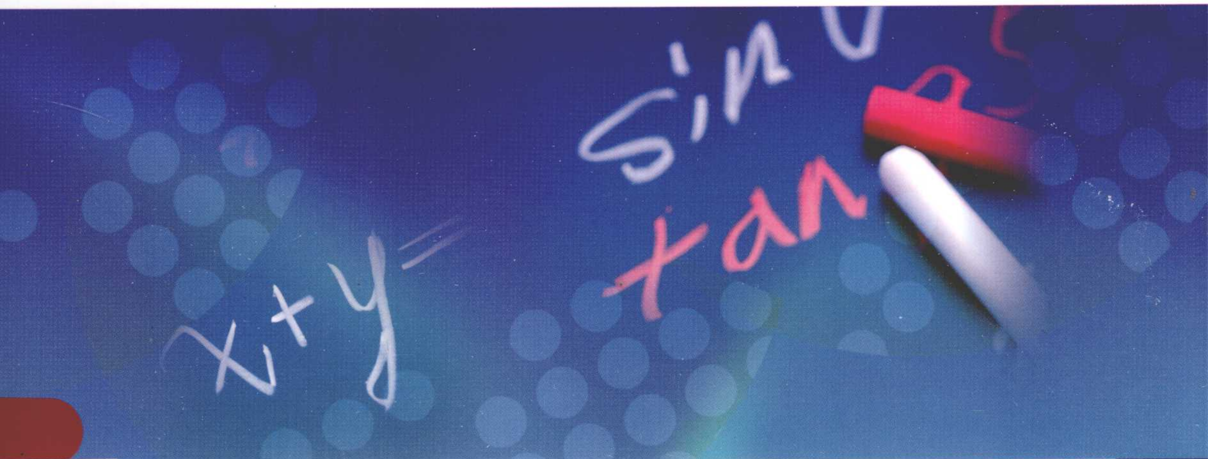
普通高等教育“十二五”规划教材

高等数学



主　编　朱福臣
副主编　李继连　鲁炎夏　付　晶

中国水利水电出版社
www.waterpub.com.cn

普通高等教育“十二五”规划教材

高等数学

主 编 朱福臣

副主编 李继连 鲁炎夏 付 晶

中国水利水电出版社
www.waterpub.com.cn

内 容 提 要

高等数学主要研究非匀变量问题，研究内容具有较强的深刻性和抽象性。本书是编者结合多年的教学经验、相关研究编写而成的，在内容上重点突出，叙述准确，条理清楚，解释透彻，化繁为简，易于理解。

全书主要研究一元函数微积分学，共六章，分为四个部分。其中，第1章研究的是函数、极限与连续；第2、3章研究函数的微分学及其应用，主要内容包括函数的导数与微分、中值定理、洛必达法则、泰勒公式、函数的单调性及曲线的凹凸性等；第4、5章研究函数的积分学及其应用，主要包括函数的不定积分、定积分以及定积分在几何与物理学中的应用。第6章研究常微分方程，介绍了常微分方程的相关概念以及常微分方程的解法，并介绍了常微分方程的简单应用。

图书在版编目（CIP）数据

高等数学 / 朱福臣主编. -- 北京 : 中国水利水电出版社, 2013.3
普通高等教育“十二五”规划教材
ISBN 978-7-5170-0705-0

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①朱… Ⅲ. ①高等数学－高等学校－教材 Ⅳ. ①013

中国版本图书馆CIP数据核字(2013)第050454号

策划编辑：石永峰　　责任编辑：李　炎　　封面设计：李　佳

书　名	普通高等教育“十二五”规划教材 **高等数学**
作　者	主　编　朱福臣 副主编　李继连　鲁炎夏　付　晶
出版发行	中国水利水电出版社 （北京市海淀区玉渊潭南路1号D座　100038） 网址：www.waterpub.com.cn E-mail：mchannel@263.net（万水） sales@waterpub.com.cn 电话：（010）68367658（发行部）、82562819（万水）
经　售	北京科水图书销售中心（零售） 电话：（010）88383994、63202643、68545874 全国各地新华书店和相关出版物销售网点
排　版	北京万水电子信息有限公司
印　刷	北京泽宇印刷有限公司
规　格	170mm×240mm　16开本　17印张　302千字
版　次	2013年3月第1版　2013年3月第1次印刷
印　数	0001—3000册
定　价	30.00元

前　　言

本书基于编者多年教学所使用的讲义编写，多数内容都曾在本科教学中进行过试讲。此次出版时，编者对讲义做了全面的整理和较大的扩充。

近年来，我国高等教育逐渐从精英教育过渡到大众化教育，编者在编写本书的时候注意到了新时代学生的特点，适应了新的社会要求，在追求逻辑的严密性和理论体系的完整性基础之上，更加注重了理论与实践相结合，注重了概念、原理和范例的融合，做到让教师更容易讲解，学生更容易理解。

本书包括函数、极限、连续、一元函数微积分学以及常微分方程。本书可作为本科理工类和财经类各专业的通用教材，也可以作为其他专业的参考资料。

本书由朱福臣任主编，李继连、鲁炎夏、付晶任副主编。其中第 1 章“函数与极限”由徐新荣编写，第 2 章“导数与微分”由鲁炎夏编写，第 3 章“微分中值定理与导数的应用”和第 6 章“常微分方程初步”由李继连编写，第 4 章“不定积分”及习题参考答案由付晶编写，第 5 章“定积分及其应用”由张静编写。

本书由周洪玉主审，审稿同志认真阅读了全稿，并提出了不少宝贵的改进意见，我们对此表示衷心的感谢。

由于我们水平有限，编写时间又较匆促，一定还存在不少缺点和错误，殷切期待读者给予批评指正，以祈不断改进完善。

编　者

2012 年 11 月

目　录

第 1 章　函数与极限

函数是高等数学的一个最基本概念，是高等数学的主要研究对象．而极限是高等数学中最重要的概念之一，是各种概念和计算方法建立的基础．本章将介绍函数的概念及极限的概念、性质、计算方法，并在此基础上讨论函数的连续性．

1.1　函数

1.1.1　集合

1．集合

集合是数学中最基本的概念之一，具有某种共同特性的事物全体称为集合．组成这个集合的每一个事物称为该集合的元素，习惯上用大写字母 A、B、C、X、Y…表示集合，用小写字母 a、b、c、x、y…表示元素．如果 a 是集合 A 的元素，则记为 $a\in A$（读作 a 属于 A），如果 a 不是集合 A 的元素，则记为 $a\notin A$（读作 a 不属于 A）．

集合的表示法一般有两种，一种是列举法，即把集合中所有元素列举出来，例如，方程 $x^2-5x+6=0$ 的所有根的集合 A 可表示为 $A=\{2,3\}$．另一种方法是描述法，是指将集合中元素的共同特性描述出来，用形式 $A=\{x \mid x$ 所具有的特征$\}$表示．例如上述集合 A 可表示为 $A=\{x|x^2-5x+6=0\}$．又如，集合 $M=\{(x,y) \mid x^2+y^2\leqslant 1\}$表示 xOy 面上圆周 $x^2+y^2=1$ 及其内的点．

2．集合与集合的关系

设 A、B 是两个集合，若对任意 $a\in A\Rightarrow a\in B$，则称 A 是 B 的子集，记作 $A\subset B$．

若 $A\subset B$ 且 $B\subset A$，则称集合 A 与 B 相等，记作 $A=B$．

不含任何元素的集合称为空集，记为 Φ，规定空集是任何集合的子集．

若集合的元素都是数，则称其为数集，常用的数集有

（1）自然数集（或非负整数集），记作 N，即

$$N=\{0,1,2,\ldots,n,\cdots\}.$$

（2）正整数集记作 N^+，即

$$N^+=\{1,2,3,\cdots,n,\cdots\}.$$

（3）整数集记作 Z，即

$$Z=\{\cdots,-n,\cdots,-2,-1,0,1,2,\cdots,n,\cdots\}.$$

（4）有理数集记作 Q，即

$$Q=\{\frac{p}{q}\mid p\in Z,\ q\in N^{+}，且 p、q 互质\}.$$

（5）实数集记作 R，正实数集记作 R^{+}．显然

$$N\subset Z\subset Q\subset R.$$

3. 集合的运算规律

设 A、B、C 及 A_i（i=1，2，3…）为全集Ω中的集合．则

（1）$A\cup B=B\cup A$，$A\cap B=B\cap A$.

（2）$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$，$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$.

（3）$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$，$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$.

（4）$(A\cup B)^C=A^C\cap B^C$，$(A\cap B)^C=A^C\cup B^C$.

（5）$(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i)^c=\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}A_i^c$，$(\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}A_i)^c=\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i^c$.

4. 区间与邻域

设 a，b 都是实数，且 $a>b$，称数集$\{x|a<x<b\}$为开区间，记作(a,b)，即$(a,b)=\{x|a<x<b\}$．类似的，有以下定义与记法：

闭区间：$[a,b]=\{x|a\leqslant x\leqslant b\}$;

半开区间：$[a,b)=\{x|a\leqslant x<b\}$; $(a,b]=\{x|a<x\leqslant b\}$.

以上区间称为有限区间，a、b 称为区间端点，数$(b-a)$称为这些区间的区间长度，从几何上看区间是指数轴上介于两个点之间的一条线段，可用图 1-1 表示出来.

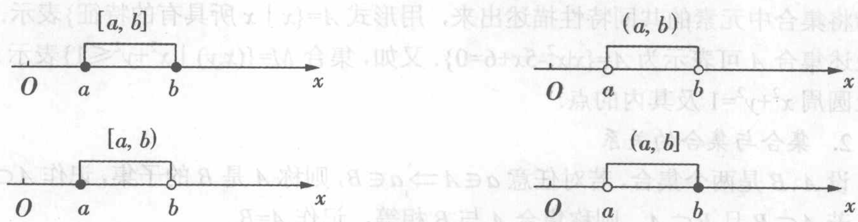


图 1-1

此外引入记号 $+\infty$（读作正无穷大）及 $-\infty$（读作负无穷大），则无限的半开或开区间表示如下：

$[a,+\infty)=\{x\mid x\geqslant a\}$，$(-\infty,b]=\{x\mid x\leqslant b\}$；

$(a,+\infty)=\{x\mid x>a\}$，$(-\infty,b)=\{x\mid x<b\}$；

$(-\infty,+\infty)=R$.

前四个区间在数轴上的表示如图 1-2 所示，而$(-\infty,+\infty)$是整个实数轴.

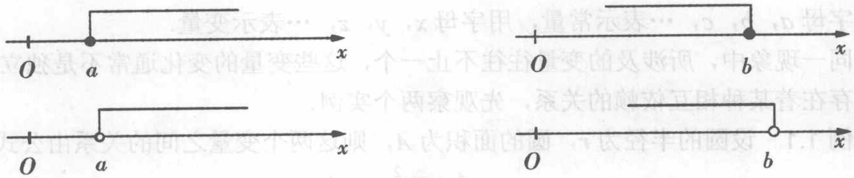


图 1-2

在几何上，前四个区间表示长度为无限的半直线.

如果不需要特别强调区间是开区间还是闭区间，是有限区间还是无限区间，则简单的称之为区间，通常用 I 表示.

邻域是高等数学常用的一个概念，设 α 与 δ 是两个实数，且 $\delta>0$，称以 α 为中心的开区间 $(\alpha-\delta,\alpha+\delta)$ 为点 α 的 δ 邻域，记作 $U(\alpha,\delta)$，即

$$U(\alpha,\delta)=(\alpha-\delta,\alpha+\delta)=\{x|\alpha-\delta<x<\alpha+\delta\}=\{x||x-\alpha|<\delta\}$$

称 δ 为邻域的半径，$U(\alpha,\delta)$ 可以在数轴上表示为图 1-3.

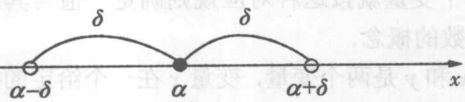


图 1-3

有时需要把邻域的中心去掉，邻域 $U(\alpha,\delta)$ 去掉中心 α 后，称为点 α 的去心 δ 邻域，记作 $\overset{o}{U}(\alpha,\delta)$，即

$$\overset{o}{U}(\alpha,\delta)=(\alpha-\delta,\alpha)\cup(\alpha,\alpha+\delta)=\{x|0<|x-\alpha|<\delta\}.$$

是两个区间的并集，见图 1-4.

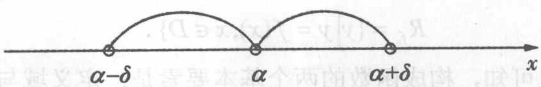


图 1-4

为表达方便，把 $(\alpha-\delta,\alpha)$ 称为点 α 的左邻域，把 $(\alpha,\alpha+\delta)$ 称为 α 的右邻域，如果无需指明 α 的某邻域（去心邻域）的半径，此时记为 $U(\alpha)$（或 $\overset{o}{U}(\alpha)$），读作 α 的邻域（或去心邻域）.

1.1.2 函数

1. 函数的概念

当我们观察自然现象或生产过程时，常常遇到各种不同的量，有些量在进程中始终保持同一数值，称为常量；有些量在进程中取不同的数值，称为变量．通

常用字母 a，b，c，…表示常量，用字母 x，y，z，…表示变量.

同一现象中，所涉及的变量往往不止一个，这些变量的变化通常不是独立的，而是存在着某种相互依赖的关系，先观察两个实例.

例 1.1 设圆的半径为 r，圆的面积为 A，则这两个变量之间的关系由公式

$$A=\pi r^2$$

给出，当变量 r 在 $(0,+\infty)$ 内任取一值时，变量 A 就由上式确定一值与其对应.

例 1.2 商店在销售某种商品的过程中，销量总收入 R 与该商品销售量 Q 之间的关系

$$R=PQ$$

其中，P 是该商品单价，上式表明了销量总收入 R 与销售量 Q 之间的相互依存关系，即 R 与 Q 成正比.

以上两个例子反映的问题虽然不同，但却具有相同的特点，那就是反映了两个变量之间的相依关系，即一种对应规则. 当其中一个变量在其变化范围内任意取定一值时，另一个变量就按这种对应规则确定一值与其对应，两个变量的这种对应关系，就是函数的概念.

定义 1.1 设 x 和 y 是两个变量，变量 x 在一个给定的数域 D 中取值，如果对于 D 中每个确定的变量 x 的取值，变量 y 按照一定的法则总有唯一确定的数值与之对应，则称 y 是 x 的函数，记作 $y=f(x)$，$x\in D$.

其中 x 称为自变量，y 称为因变量，D 称为定义域，记作 D_f，即 $D_f=D$.

函数定义中，对每个取定的 $x_0\in D$，按照对应法则 f，总有唯一确定的值 y 与之对应，这个值称为函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的函数值，记作 $f(x_0)$ 或 $y|_{x=x_0}=f(x_0)$.

当 x 取遍 D 的各个数值时，对应的函数值全体组成的集合称为函数的值域，记作 R_f，即

$$R_f=\{y|y=f(x),x\in D\}.$$

由函数的定义可知，构成函数的两个基本要素是：定义域与对应法则，而值域是由以上二者派生出来的，若两个函数的对应法则和定义域都相同，则我们认为这两个函数相同，与自变量及因变量用何字母表示无关.

函数 $y=f(x)$ 中表示对应关系的记号 f 也可用其他字母表示，例如“g”、“φ”，“F”，“G”，“Φ”等，相应的函数记为 $y=g(x)$，$y=\varphi(x)$，$y=F(x)$ 等.

函数定义域的确定，取决于两种不同的研究背景：一是有实际应用背景的函数，其定义域取决于变量的实际意义；二是抽象的用算式表达的函数，其定义域是使算式有意义的一切实数组成的集合，这种定义域称为自然定义域. 例如，数 $y=\pi r^2$，若 x 表示圆的半径，y 表示圆的面积，则此时定义域 $D=[0,+\infty)$；若不考虑 x 的实际意义，则其自然定义域为 $D=(-\infty,+\infty)$.

在函数的定义中，我们用“唯一确定”表明所讨论的函数是单值函数. 当 D

中的某些 x 值有多于一个 y 值与之对应时，我们称之为多值函数．例如，变量 x 和 y 之间的对应法则由 $x^2+y^2=1$ 给出，显然对任意 $x\in(-1,1)$，对应着 y 有两个值，所以方程确定了一个多值函数，我们往往根据问题的性质或研究的需要取其单值分支 $y=\sqrt{1-x^2}$ 或 $y=-\sqrt{1-x^2}$ 进行分析和讨论．

函数的表示方法主要有三种：表格法、图形法、解析法（公式法）．将图形法与解析法相结合研究函数，可以将抽象问题直观化．一方面可以借助几何方法研究函数的有关特性，另一方面可以借助函数的理论研究几何问题．函数 $y=f(x)$ 的图形，指的是坐标平面上的点集 $\{(x,y)\,|\,y=f(x)\}$，一个函数的图形通常是平面内的一条曲线．

例 1.3 确定下列函数的定义域．

（1）$y=\sqrt{1-x}$；（2）$y=\dfrac{1}{x}$；（3）$y=\sqrt{x}+\ln(x^2-4x+3)$

解 （1）定义域 $D=[1,+\infty)$；

（2）定义域 $D=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$

（3）定义域应满足 $\begin{cases} x\geqslant 0 \\ x^2-4x+3>0 \end{cases}$

得定义域为 $D=[0,1)\cup(3,+\infty)$．

例 1.4 设函数 $f(x)=\begin{cases} 2+x, & x\leqslant 0 \\ 2^x, & x>0 \end{cases}$，求（1）函数的定义域；（2）$f(0)$，$f(-1)$，$f(3)$，$f(\alpha)$，$f[f(-1)]$．

解 （1）定义域 $D=(-\infty,+\infty)$．

（2）$f(0)=2$，$f(-1)=1$，$f(3)=2^3=8$．

当 $\alpha\leqslant 0$ 时，$f(\alpha)=2+\alpha$；当 $\alpha>0$ 时，$f(\alpha)=2^\alpha$

$f[f(-1)]=f(1)=2^1=2$．

例 1.5 绝对值函数 $y=|x|=\begin{cases} x, & x\geqslant 0 \\ -x, & x<0 \end{cases}$，定义域 $D=(-\infty,+\infty)$，值域 $R=[0,+\infty)$，图形如图 1-5 所示．

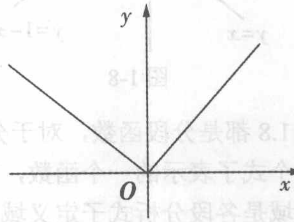


图 1-5

第1章 函数与极限

例 1.6 符号函数

$$Y=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}-1, & x<0\\ 0, & x=0\\ 1, & x>0\end{cases}$$

其定义域 $D=(-\infty,+\infty)$，值域 $R=\{-1,0,1\}$，图形如图 1-6 所示，显然对任意 $x\in(-\infty,+\infty)$，有 $|x|=x\operatorname{sgn}x$.

例 1.7 取整函数

$$y=[x]$$

其中 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数.

例如 $[-3.2]=-4$，$[0]=0$，$[2.6]=2$. 该函数的定义域 $D=(-\infty,+\infty)$，值域 $R=Z$，图形如图 1-7 所示.

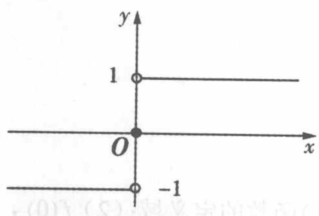


图 1-6

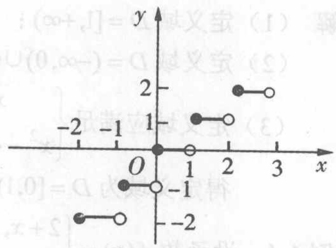


图 1-7

例 1.8 分段函数

$$f(x)=\begin{cases}x, & x\leqslant 0\\ 1-x, & x>0\end{cases}$$

定义域为 $(-\infty,+\infty)$，值域为 $(-\infty,1)$，图形如图 1-8 所示.

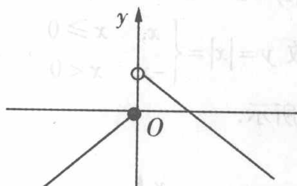


图 1-8

需要指出，例 1.4 至例 1.8 都是分段函数，对于分段函数强调以下两点.

（1）分段函数是用几个式子表示的一个函数，而不是几个函数.

（2）分段函数的定义域是各段分析式子定义域的“并”.

2. 函数的几种特性

（1）函数的单调性

设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D，$X\subset D$，若对 $\forall x_1$，$x_2\in X$，且 $x_1<x_2$ 有

$$f(x_1)<f(x_2)\text{（或}f(x_1)>f(x_2)\text{）},$$

则称 $f(x)$ 在 X 上单调增加（或单调减少）；若对 $\forall x_1$，$x_2\in X$，且 $x_1<x_2$ 有

$$f(x_1)\leqslant f(x_2)\text{（或}f(x_1)\geqslant f(x_2)\text{）},$$

则称 $f(x)$ 在 X 上单调不减（或单调不增），在 X 内单调增加和单调减少的函数称为单调函数，X 称为单调区间.

从几何直观上看，单调增加函数的图形是随 x 的增加而上升的曲线，单调减少函数的图形是随 x 的增加而下降的曲线，分别见图 1-9，图 1-10.

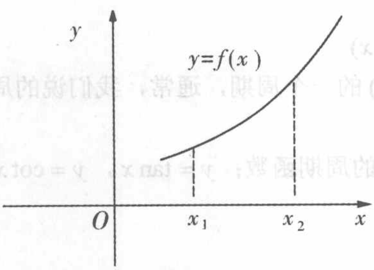


图 1-9

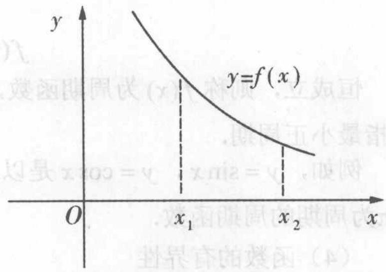


图 1-10

例如 $y=x^2$ 在 $(-\infty,0)$ 内单调减少，在 $[0,+\infty)$ 内单调增加，在定义域 $(-\infty,+\infty)$ 内却不具有单调性.

如 $y=\dfrac{1}{x}$ 在 $(-\infty,0)$，$(0+\infty)$ 内都单调减少，但在定义域 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ 内却不具单调性.

（2）函数的奇偶性

设 $y=f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称（即若 $x\in D$，则 $-x\in D$），如果对任一 $x\in D$，都有

$$f(-x)=f(x)\text{（或}f(-x)=-f(x)\text{）}$$

恒成立，则称 $f(x)$ 为偶函数（或奇函数）.

从几何直观上看，偶函数的图形关于 y 轴对称（见图 1-11），奇函数的图形关于原点对称（见图 1-12）.

例如 $y=x^3$ 是奇函数，$y=\sin x$，$y=\tan x$ 是奇函数.

又例如 $y=x^2$，$y=\cos x$ 均是偶函数，而 $y=\sin x+\cos x$ 不是奇函数也不是偶函数，称此类函数为非奇非偶函数.

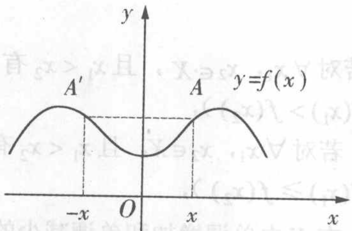


图 1-11

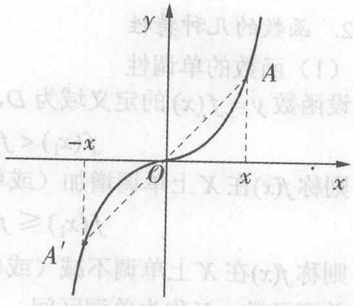


图 1-12

（3）函数的周期性

设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D，如果存在正数 T，使得对 $\forall x\in D$，有 $x+T\in D$，且

$$f(x+T)=f(x)$$

恒成立，则称 $f(x)$ 为周期函数，T 为 $f(x)$ 的一个周期，通常，我们说的周期是指最小正周期.

例如，$y=\sin x$，$y=\cos x$ 是以 2π 为周期的周期函数；$y=\tan x$，$y=\cot x$ 是以 π 为周期的周期函数.

（4）函数的有界性

设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D，$X\subset D$，如果存在数 K_1，使得对 $\forall x\in X$ 都有

$$f(x)\leqslant K_1$$

成立，则称函数 $f(x)$ 在 X 上有上界，而 K_1 称为 $f(x)$ 在 X 上的一个上界．如果存在数 K_2，使得对 $\forall x\in X$ 都有

$$f(x)\geqslant K_2$$

成立，则称函数 $f(x)$ 在 X 上有下界，而 K_2 称为 $f(x)$ 在 X 上的一个下界．如果存在正数 M，使得对 $\forall x\in X$ 都有

$$|f(x)|\leqslant M$$

成立．则称 $f(x)$ 在 X 上有界，如果这样的 M 不存在，则称 $f(x)$ 在 X 上无界；即对 $\forall M>0$，$\exists x_1\in X$，使得 $|f(x_1)|>M$，则称 $f(x)$ 在 X 上无界.

例如，函数 $y=\sin x$，对一切 $x\in(-\infty,+\infty)$，恒有 $|\sin x|\leqslant 1$，故 $y=\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有界.

例 1.9 讨论函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$，分别在区间 $(0,1)$，$(1,2)$，$(2,+\infty)$ 上的有界性（见图 1-13）.

解

（1）在 $(0,1)$ 上，$f(x)$ 没有上界，有下界．数 1 就是 $f(x)$ 的一个下界，$f(x)$ 在

$(0,1)$区间内是无界的．因为不存在这样的正数 M，使$\left|\dfrac{1}{x}\right| \leqslant M$，对于$(0,1)$内的一切 x 都成立．

（2）$f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在$(1,2)$内有界，可取 $M=1$，而使$\left|\dfrac{1}{x}\right| \leqslant 1$ 对一切 $x \in (1,2)$都成立．

（3）$f(x)$ 在 $(2,+\infty)$ 内有界，可取 $M=\dfrac{1}{2}$，而使$\left|\dfrac{1}{x}\right| \leqslant \dfrac{1}{2}$ 对一切 $x \in (2,+\infty)$ 都成立．

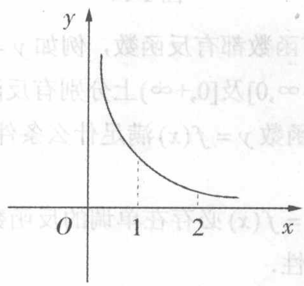


图 1-13

3．反函数与复合函数

一般来说，在函数关系中自变量和因变量是相对的．例如圆的面积 A 与其中半径 r 的关系 $A=\pi r^2$（$r \geqslant 0$），也可以把半径 r 表示为面积 A 的函数 $r=\sqrt{\dfrac{A}{\pi}}$，对这两个函数而言，可以把后一个函数看作是前一个函数的反函数，也可以把前一个函数看作是后一个函数的反函数．

定义 1.2 已知 $y=f(x)$ 的定义域为 D，值域为 R，如果对于 R 中的每一个 y，D 中总有唯一的 x，使 $f(x)=y$，则在 R 上确定了以 y 为自变量，x 为因变量的函数 $x=\varphi(y)$，称为 $y=f(x)$ 的反函数，记作 $x=f^{-1}(y)$，$y \in R$，或称 $y=f(x)$ 与 $x=f^{-1}(y)$ 互为反函数．

习惯上用 x 表示自变量，用 y 表示因变量，则函数 $y=f(x)$，$x \in D$ 的反函数表示为：

$$y=f^{-1}(x),\quad x \in R.$$

相对于反函数 $y=f^{-1}(x)$ 来说，函数 $y=f(x)$ 称为直接函数．从几何直观上看，若点 $A(x,y)$ 是函数 $y=f(x)$ 图形上的点，则 $A'(y,x)$ 是反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图形上的点．反之亦然．

因此 $y=f(x)$ 和 $y=f^{-1}(x)$ 的图形关于直线 $y=x$ 对称（见图 1-14）．