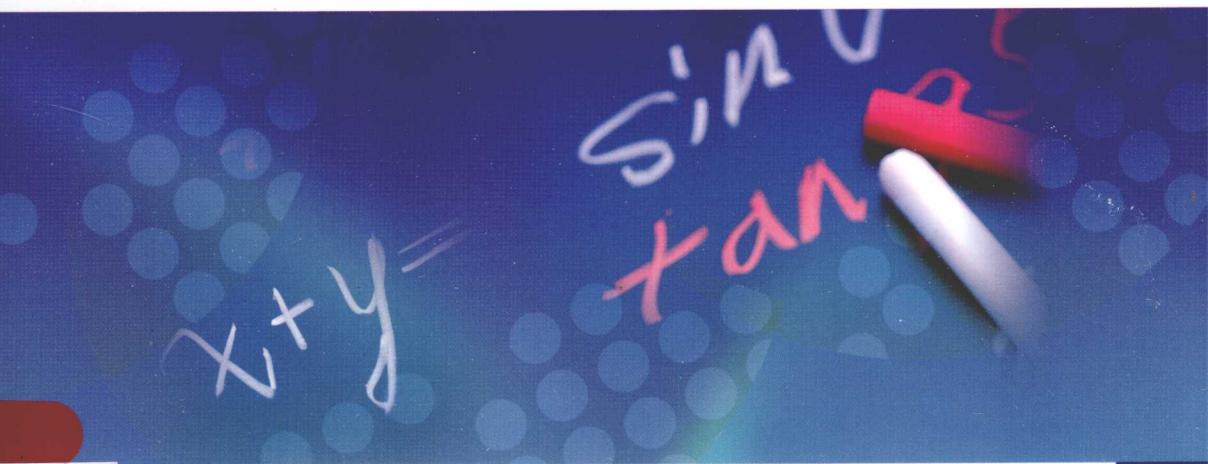




普通高等教育“十二五”规划教材

# 高等数学



主 编 朱福臣

副主编 李继连 鲁炎夏 付 晶



中国水利水电出版社  
[www.waterpub.com.cn](http://www.waterpub.com.cn)

013032645

013-43

323

## 要 目 容 内

## 普通高等教育“十二五”规划教材

## 高等数学

主编 朱福臣

副主编 李继连 鲁炎夏 付晶

最矮(只10)目錄題名牛图

一、数学基础 ① 二、求 ① 三、高 ① 四、数 ①  
 五、数 ① 六、数 ①



各 种	毒 品
書	書
卷	卷
號	號
013-43	323

中国水利水电出版社  
www.waterpub.com.cn

北航 C1640180

013035842

## 内 容 提 要

高等数学主要研究非匀变量问题，研究内容具有较强的深刻性和抽象性。本书是编者结合多年教学经验、相关研究编写而成的，在内容上重点突出，叙述准确，条理清楚，解释透彻，化繁为简，易于理解。

全书主要研究一元函数微积分学，共六章，分为四个部分。其中，第1章研究的是函数、极限与连续；第2、3章研究函数的微分学及其应用，主要内容包括函数的导数与微分、中值定理、洛必达法则、泰勒公式、函数的单调性及曲线的凹凸性等；第4、5章研究函数的积分学及其应用，主要包括函数的不定积分、定积分以及定积分在几何与物理学中的应用。第6章研究常微分方程，介绍了常微分方程的相关概念以及常微分方程的解法，并介绍了常微分方程的简单应用。

## 图书在版编目（C I P）数据

高等数学 / 朱福臣主编. — 北京 : 中国水利水电出版社, 2013.3  
普通高等教育“十二五”规划教材  
ISBN 978-7-5170-0705-0

I. ①高… II. ①朱… III. ①高等数学—高等学校—教材 IV. ①013

中国版本图书馆CIP数据核字(2013)第050454号

策划编辑：石永峰      责任编辑：李炎      封面设计：李佳

书名	普通高等教育“十二五”规划教材 高等数学
作者	主编 朱福臣 副主编 李继连 鲁炎夏 付晶
出版发行	中国水利水电出版社 (北京市海淀区玉渊潭南路1号D座 100038) 网址: www.waterpub.com.cn E-mail: mchannel@263.net (万水) sales@waterpub.com.cn
经售	电话: (010) 68367658 (发行部)、82562819 (万水) 北京科水图书销售中心 (零售) 电话: (010) 88383994、63202643、68545874 全国各地新华书店和相关出版物销售网点
排版 印刷 规格 版次 印数 定价	北京万水电子信息有限公司 北京泽宇印刷有限公司 170mm×240mm 16开本 17印张 302千字 2013年3月第1版 2013年3月第1次印刷 0001—3000册 30.00元

凡购买我社图书，如有缺页、倒页、脱页的，本社发行部负责调换  
版权所有·侵权必究

# 前　　言

本书基于编者多年教学所使用的讲义编写，多数内容都曾在本科教学中进行过试讲。此次出版时，编者对讲义做了全面的整理和较大的扩充。

近年来，我国高等教育逐渐从精英教育过渡到大众化教育，编者在编写本书的时候注意到了新时代学生的特点，适应了新的社会要求，在追求逻辑的严密性和理论体系的完整性基础之上，更加注重了理论与实践相结合，注重了概念、原理和范例的融合，做到让教师更容易讲解，学生更容易理解。

本书包括函数、极限、连续、一元函数微积分学以及常微分方程。本书可作为本科理工类和财经类各专业的通用教材，也可以作为其他专业的参考资料。

本书由朱福臣任主编，李继连、鲁炎夏、付晶任副主编。其中第1章“函数与极限”由徐新荣编写，第2章“导数与微分”由鲁炎夏编写，第3章“微分中值定理与导数的应用”和第6章“常微分方程初步”由李继连编写，第4章“不定积分”及习题参考答案由付晶编写，第5章“定积分及其应用”由张静编写。

本书由周洪玉主审，审稿同志认真阅读了全稿，并提出了不少宝贵的改进意见，我们对此表示衷心的感谢。

由于我们水平有限，编写时间又较匆促，一定还存在不少缺点和错误，殷切期待读者给予批评指正，以祈不断改进完善。

编　者

2012年11月

前言	.....
<b>第1章 函数与极限</b>	.....
1.1 函数	..... 1
1.1.1 集合	..... 1
1.1.2 函数	..... 3
习题 1.1	..... 15
1.2 数列的极限	..... 17
1.2.1 数列极限的概念	..... 17
1.2.2 收敛数列的性质	..... 20
习题 1.2	..... 22
1.3 函数的极限	..... 22
1.3.1 $x \rightarrow \infty$ 时函数的极限	..... 22
1.3.2 $x \rightarrow x_0$ 时函数 $f(x)$ 的极限	..... 24
1.3.3 函数极限的性质	..... 27
习题 1.3	..... 27
1.4 无穷小量与无穷大量	..... 28
1.4.1 无穷小量	..... 28
1.4.2 无穷大量	..... 29
1.4.3 无穷小与无穷大的关系	..... 30
习题 1.4	..... 30
1.5 极限的运算法则	..... 30
1.5.1 极限的四则运算法则	..... 30
1.5.2 复合函数的极限法则	..... 33
习题 1.5	..... 34
1.6 极限存在准则 两个重要极限	..... 34
1.6.1 夹逼准则	..... 35
1.6.2 单调有界收敛准则	..... 37
习题 1.6	..... 40
1.7 无穷小的比较	..... 41

习题 1.7 .....	43
1.8 函数的连续性与间断点 .....	44
1.8.1 函数的连续性 .....	44
1.8.2 函数的间断点及其分类 .....	45
1.8.3 连续函数的运算法则 .....	48
1.8.4 初等函数的连续性 .....	49
习题 1.8 .....	49
1.9 闭区间上连续函数的性质 .....	51
1.9.1 最大值最小值与有界性定理 .....	51
1.9.2 零点定理与介值定理 .....	52
习题 1.9 .....	53
总习题一 .....	54
<b>第 2 章 导数与微分 .....</b>	<b>57</b>
2.1 导数的概念 .....	57
习题 2.1 .....	63
2.2 函数的求导法则 .....	64
习题 2.2 .....	81
2.3 隐函数及由参数方程所确定的函数的导数 .....	82
习题 2.3 .....	86
2.4 函数的微分 .....	87
习题 2.4 .....	95
总习题二 .....	96
<b>第 3 章 微分中值定理与导数的应用 .....</b>	<b>98</b>
3.1 微分中值定理 .....	98
3.1.1 罗尔 (Roller) 定理 .....	98
3.1.2 拉格朗日 (Lagrange) 定理 .....	99
3.1.3 柯西 (Cauchy) 定理 .....	102
定理 3.3 .....	102
习题 3.1 .....	104
3.2 洛必达法则 .....	105
3.2.1 $\frac{0}{0}$ , $\frac{\infty}{\infty}$ 型未定式 .....	105
3.2.2 其他型未定式 .....	109
习题 3.2 .....	110
*3.3 泰勒公式 .....	111

习题 3.3 .....	115
3.4 函数的单调性和极值 .....	115
3.4.1 函数的单调性 .....	115
3.4.2 函数的极值 .....	117
习题 3.4 .....	120
3.5 函数的凹凸性及拐点 .....	121
习题 3.5 .....	124
3.6 函数图形的描绘 .....	125
3.6.1 曲线的渐近线 .....	125
3.6.2 函数图形的描绘 .....	126
习题 3.6 .....	128
3.7 最大(小)值及其在经济分析中的应用 .....	129
3.7.1 闭区间上连续函数的最大值、最小值 .....	129
3.7.2 实际问题中的最大值、最小值 .....	129
习题 3.7 .....	132
<b>总习题三 .....</b>	<b>133</b>
<b>第4章 不定积分 .....</b>	<b>135</b>
4.1 不定积分的概念与性质 .....	135
习题 4.1 .....	139
4.2 换元积分法 .....	140
习题 4.2 .....	147
4.3 分部积分法 .....	148
习题 4.3 .....	151
4.4 有理函数的积分 .....	151
习题 4.4 .....	154
<b>总习题四 .....</b>	<b>154</b>
<b>第5章 定积分及其应用 .....</b>	<b>158</b>
5.1 定积分的概念与性质 .....	158
习题 5.1 .....	164
5.2 微积分基本公式 .....	165
习题 5.2 .....	170
5.3 定积分的换元法与分部积分法 .....	171
习题 5.3 .....	177
5.4 广义积分 .....	178
习题 5.4 .....	182

5.5 定积分的应用 .....	182
习题 5.5 .....	192
总习题五 .....	194
<b>第 6 章 常微分方程初步 .....</b>	<b>198</b>
6.1 微分方程的基本概念 .....	198
6.2 一阶线性微分方程 .....	201
6.2.1 可分离变量的微分方程 .....	202
6.2.2 齐次方程 .....	208
6.2.3 一阶线性微分方程 .....	212
6.3 二阶线性微分方程简介 .....	215
6.3.1 二阶线性微分方程概念 .....	215
6.3.2 二阶线性微分方程解的结构 .....	216
6.4 二阶常系数线性微分方程 .....	216
6.4.1 二阶常系数线性齐次微分方程的解 .....	217
6.4.2 二阶常系数线性非齐次微分方程 .....	218
6.5 全微分方程 .....	220
6.6 微分方程应用举例 .....	223
总习题六 .....	228
<b>习题参考答案 .....</b>	<b>237</b>

# 第1章 函数与极限

函数是高等数学的一个最基本概念，是高等数学的主要研究对象。而极限是高等数学中最重要的概念之一，是各种概念和计算方法建立的基础。本章将介绍函数的概念及极限的概念、性质、计算方法，并在此基础上讨论函数的连续性。

## 1.1 函数

### 1.1.1 集合

#### 1. 集合

集合是数学中最基本的概念之一，具有某种共同特性的事物全体称为集合。组成这个集合的每一个事物称为该集合的元素，习惯上用大写字母  $A, B, C, X, Y \dots$  表示集合，用小写字母  $a, b, c, x, y \dots$  表示元素。如果  $a$  是集合  $A$  的元素，则记为  $a \in A$ （读作  $a$  属于  $A$ ），如果  $a$  不是集合  $A$  的元素，则记为  $a \notin A$ （读作  $a$  不属于  $A$ ）。

集合的表示法一般有两种，一种是列举法，即把集合中所有元素列举出来，例如，方程  $x^2 - 5x + 6 = 0$  的所有根的集合  $A$  可表示为  $A = \{2, 3\}$ 。另一种方法是描述法，是指将集合中元素的共同特性描述出来，用形式  $A = \{x \mid x \text{ 所具有的特征}\}$  表示。例如上述集合  $A$  可表示为  $A = \{x \mid x^2 - 5x + 6 = 0\}$ 。又如，集合  $M = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$  表示  $xOy$  平面上圆周  $x^2 + y^2 = 1$  及其内的点。

#### 2. 集合与集合的关系

设  $A, B$  是两个集合，若对任意  $a \in A \Rightarrow a \in B$ ，则称  $A$  是  $B$  的子集，记作  $A \subset B$ 。

若  $A \subset B$  且  $B \subset A$ ，则称集合  $A$  与  $B$  相等，记作  $A = B$ 。

不含任何元素的集合称为空集，记为  $\emptyset$ ，规定空集是任何集合的子集。

若集合的元素都是数，则称其为数集，常用的数集有：

(1) 自然数集（或非负整数集），记作  $N$ ，即

$$N = \{0, 1, 2, \dots, n, \dots\}.$$

(2) 正整数集记作  $N^+$ ，即

$$N^+ = \{1, 2, 3, \dots, n, \dots\}.$$

(3) 整数集记作  $Z$ ，即

$$Z = \{\dots, -n, \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots, n, \dots\}.$$

(4) 有理数集记作  $Q$ , 即

$$Q = \left\{ \frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}^+, \text{且 } p, q \text{ 互质} \right\}.$$

(5) 实数集记作  $R$ , 正实数集记作  $R^+$ . 显然

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset Q \subset R.$$

### 3. 集合的运算规律

设  $A, B, C$  及  $A_i$  ( $i=1, 2, 3\dots$ ) 为全集  $\Omega$  中的集合. 则

$$(1) A \cup B = B \cup A, A \cap B = B \cap A.$$

$$(2) (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C), (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C).$$

$$(3) A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C), A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

$$(4) (A \cup B)^c = A^c \cap B^c, (A \cap B)^c = A^c \cup B^c.$$

$$(5) \left( \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \right)^c = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i^c, \quad \left( \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \right)^c = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i^c.$$

### 4. 区间与邻域

设  $a, b$  都是实数, 且  $a > b$ , 称数集  $\{x | a < x < b\}$  为开区间, 记作  $(a, b)$ , 即  $(a, b) = \{x | a < x < b\}$ . 类似的, 有以下定义与记法:

闭区间:  $[a, b] = \{x | a \leq x \leq b\}$ ;

半开区间:  $[a, b) = \{x | a \leq x < b\}$ ;  $(a, b] = \{x | a < x \leq b\}$ .

以上区间称为有限区间,  $a, b$  称为区间端点, 数  $(b-a)$  称为这些区间的区间长度, 从几何上看区间是指数轴上介于两个点之间的一条线段, 可用图 1-1 表示出来.

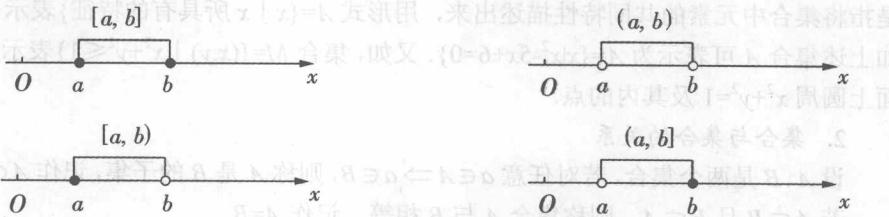


图 1-1

此外引入记号  $+\infty$  (读作正无穷大) 及  $-\infty$  (读作负无穷大), 则无限的半开或开区间表示如下:

$$[a, +\infty) = \{x \mid x \geq a\}, \quad (-\infty, b] = \{x \mid x \leq b\};$$

$$(a, +\infty) = \{x \mid x > a\}, \quad (-\infty, b) = \{x \mid x < b\};$$

$$(-\infty, +\infty) = R.$$

前四个区间在数轴上的表示如图 1-2 所示, 而  $(-\infty, +\infty)$  是整个实数轴.

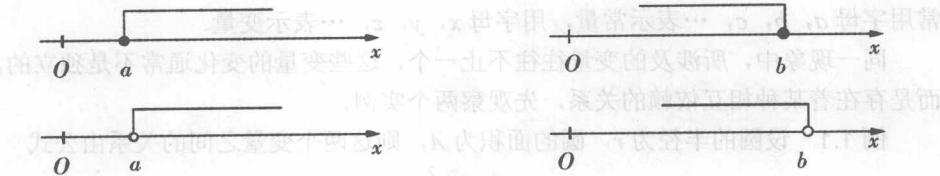


图 1-2

在几何上, 前四个区间表示长度为无限的半直线.

如果不需要特别强调区间是开区间还是闭区间, 是有限区间还是无限区间, 则简单的称之为区间, 通常用  $I$  表示.

邻域是高等数学常用的一个概念, 设  $\alpha$  与  $\delta$  是两个实数, 且  $\delta > 0$ , 称以  $\alpha$  为中心的开区间  $(\alpha - \delta, \alpha + \delta)$  为点  $\alpha$  的  $\delta$  邻域, 记作  $U(\alpha, \delta)$ , 即

$$U(\alpha, \delta) = (\alpha - \delta, \alpha + \delta) = \{x | \alpha - \delta < x < \alpha + \delta\} = \{x | |x - \alpha| < \delta\}$$

称  $\delta$  为邻域的半径,  $U(\alpha, \delta)$  可以在数轴上表示为图 1-3.

邻域是高等数学常用的一个概念, 设  $\alpha$  与  $\delta$  是两个实数, 且  $\delta > 0$ , 称以  $\alpha$  为中心的开区间  $(\alpha - \delta, \alpha + \delta)$  为点  $\alpha$  的  $\delta$  邻域, 记作  $U(\alpha, \delta)$ , 即

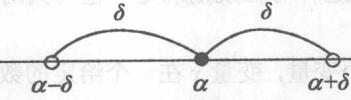


图 1-3

有时需要把邻域的中心去掉, 邻域  $U(\alpha, \delta)$  去掉中心  $\alpha$  后, 称为点  $\alpha$  的去心  $\delta$  邻域, 记作  $\overset{\circ}{U}(\alpha, \delta)$ , 即

$$\overset{\circ}{U}(\alpha, \delta) = (\alpha - \delta, \alpha) \cup (\alpha, \alpha + \delta) = \{x | 0 < |x - \alpha| < \delta\}.$$

是两个区间的并集, 见图 1-4.

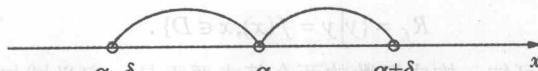


图 1-4

为表达方便, 把  $(\alpha - \delta, \alpha)$  称为点  $\alpha$  的左邻域, 把  $(\alpha, \alpha + \delta)$  称为  $\alpha$  的右邻域, 如果无需指明  $\alpha$  的某邻域(去心邻域)的半径, 此时记为  $U(\alpha)$  (或  $\overset{\circ}{U}(\alpha)$ ), 读作  $\alpha$  的邻域(或去心邻域).

## 1.1.2 函数

当我们观察自然现象或生产过程时, 常常遇到各种不同的量, 有些量在进程中始终保持同一数值, 称为常量; 有些量在进程中取不同的数值, 称为变量. 通

### 1. 函数的概念

常用字母  $a, b, c, \dots$  表示常量, 用字母  $x, y, z, \dots$  表示变量.

同一现象中, 所涉及的变量往往不止一个, 这些变量的变化通常不是独立的, 而是存在着某种相互依赖的关系, 先观察两个实例.

**例 1.1** 设圆的半径为  $r$ , 圆的面积为  $A$ , 则这两个变量之间的关系由公式

$$A = \pi r^2$$

给出, 当变量  $r$  在  $(0, +\infty)$  内任取一值时, 变量  $A$  就由上式确定一值与其对应.

**例 1.2** 商店在销售某种商品的过程中, 销量总收入  $R$  与该商品销售量  $Q$  之间的关系

$$R = PQ$$

其中,  $P$  是该商品单价, 上式表明了销量总收入  $R$  与销售量  $Q$  之间的相互依存关系, 即  $R$  与  $Q$  成正比.

以上两个例子反映的问题虽然不同, 但却具有相同的特点, 那就是反映了两个变量之间的相依关系, 即一种对应规则. 当其中一个变量在其变化范围内任意取定一值时, 另一个变量就按这种对应规则确定一值与其对应, 两个变量的这种对应关系, 就是函数的概念.

**定义 1.1** 设  $x$  和  $y$  是两个变量, 变量  $x$  在一个给定的数域  $D$  中取值, 如果对于  $D$  中每个确定的变量  $x$  的取值, 变量  $y$  按照一定的法则总有唯一确定的数值与之对应, 则称  $y$  是  $x$  的函数, 记作  $y = f(x), x \in D$ .

其中  $x$  称为自变量,  $y$  称为因变量,  $D$  称为定义域, 记作  $D_f$ , 即  $D_f = D$ .

函数定义中, 对每个取定的  $x_0 \in D$ , 按照对应法则  $f$ , 总有唯一确定的值  $y$  与之对应, 这个值称为函数  $y = f(x)$  在点  $x_0$  处的函数值, 记作  $f(x_0)$  或  $y|_{x=x_0} = f(x_0)$ .

当  $x$  取遍  $D$  的各个数值时, 对应的函数值全体组成的集合称为函数的值域, 记作  $R_f$ , 即

$$R_f = \{y | y = f(x), x \in D\}.$$

由函数的定义可知, 构成函数的两个基本要素是: 定义域与对应法则, 而值域是由以上二者派生出来的, 若两个函数的对应法则和定义域都相同, 则我们认为这两个函数相同, 与自变量及因变量用何字母表示无关.

函数  $y = f(x)$  中表示对应关系的记号  $f$  也可用其他字母表示, 例如 “ $g$ ”、“ $\varphi$ ”, “ $F$ ”, “ $G$ ”, “ $\Phi$ ” 等, 相应的函数记为  $y = g(x)$ ,  $y = \varphi(x)$ ,  $y = F(x)$  等.

函数定义域的确定, 取决于两种不同的研究背景: 一是有实际应用背景的函数, 其定义域取决于变量的实际意义; 二是抽象的用算式表达的函数, 其定义域是使算式有意义的一切实数组成的集合, 这种定义域称为自然定义域. 例如, 数  $y = \pi r^2$ , 若  $x$  表示圆的半径,  $y$  表示圆的面积, 则此时定义域  $D = [0, +\infty)$ ; 若不考虑  $x$  的实际意义, 则其自然定义域为  $D = (-\infty, +\infty)$ .

在函数的定义中, 我们用“唯一确定”表明所讨论的函数是单值函数. 当  $D$

中的某些  $x$  值有多于一个  $y$  值与之对应时，我们称之为多值函数。例如，变量  $x$  和  $y$  之间的对应法则由  $x^2 + y^2 = 1$  给出，显然对任意  $x \in (-1, 1)$ ，对应着  $y$  有两个值，所以方程确定了一个多值函数，我们往往根据问题的性质或研究的需要取其单值分支  $y = \sqrt{1-x^2}$  或  $y = -\sqrt{1-x^2}$  进行分析和讨论。

函数的表示方法主要有三种：表格法、图形法、解析法（公式法）。将图形法与解析法相结合研究函数，可以将抽象问题直观化。一方面可以借助几何方法研究函数的有关特性，另一方面可以借助函数的理论研究几何问题。函数  $y = f(x)$  的图形，指的是坐标平面上的点集  $\{(x, y) | y = f(x)\}$ ，一个函数的图形通常是平面内的一条曲线。

**例 1.3** 确定下列函数的定义域。

$$(1) y = \sqrt{1-x}; (2) y = \frac{1}{x}; (3) y = \sqrt{x} + \ln(x^2 - 4x + 3)$$

解 (1) 定义域  $D = [1, +\infty)$ ；

(2) 定义域  $D = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

$$(3) \text{ 定义域应满足 } \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 - 4x + 3 > 0 \end{cases}$$

得定义域为  $D = [0, 1) \cup (3, +\infty)$ 。

**例 1.4** 设函数  $f(x) = \begin{cases} 2+x, & x \leq 0 \\ 2^x, & x > 0 \end{cases}$ ，求(1)函数的定义域；(2)  $f(0)$ ,  $f(-1)$ ,

$f(3)$ ,  $f(\alpha)$ ,  $f[f(-1)]$ 。

解 (1) 定义域  $D = (-\infty, +\infty)$ 。

$$(2) f(0) = 2, \quad f(-1) = 1, \quad f(3) = 2^3 = 8.$$

当  $\alpha \leq 0$  时,  $f(\alpha) = 2 + \alpha$ ; 当  $\alpha > 0$  时,  $f(\alpha) = 2^\alpha$ 。

$$f[f(-1)] = f(1) = 2^1 = 2.$$

**例 1.5** 绝对值函数  $y = |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$ ，定义域  $D = (-\infty, +\infty)$ ，值域

$R = [0, +\infty)$ ，图形如图 1-5 所示。

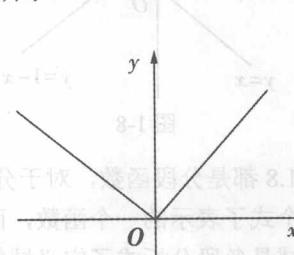


图 1-5

### 例 1.6 符号函数

$y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$

其定义域  $D = (-\infty, +\infty)$ , 值域  $R = \{-1, 0, 1\}$ , 图形如图 1-6 所示, 显然对任意  $x \in (-\infty, +\infty)$ , 有  $|x| = x \operatorname{sgn} x$ .

### 例 1.7 取整函数

$$y = [x]$$

其中  $[x]$  表示不超过  $x$  的最大整数.

例如  $[-3.2] = -4$ ,  $[0] = 0$ ,  $[2.6] = 2$ . 该函数的定义域  $D = (-\infty, +\infty)$ , 值域  $R = \mathbb{Z}$ , 图形如图 1-7 所示.

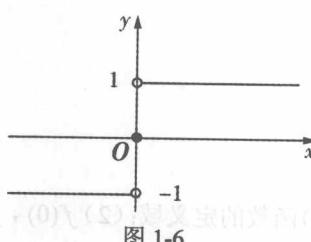


图 1-6

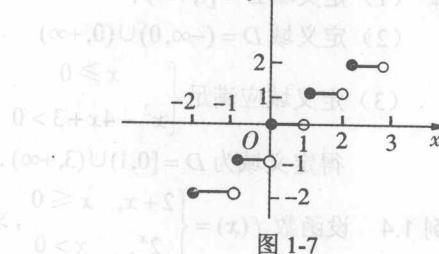


图 1-7

### 例 1.8 分段函数

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \leq 0 \\ 1-x, & x > 0 \end{cases}$$

定义域为  $(-\infty, +\infty)$ , 值域为  $(-\infty, 1)$ , 图形如图 1-8 所示.

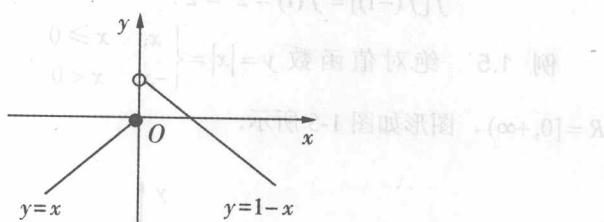


图 1-8

需要指出, 例 1.4 至例 1.8 都是分段函数, 对于分段函数强调以下两点.

- (1) 分段函数是用几个式子表示的一个函数, 而不是几个函数.
- (2) 分段函数的定义域是各段分析式子定义域的“并”.

## 2. 函数的几种特性

### (1) 函数的单调性

设函数  $y = f(x)$  的定义域为  $D$ ,  $X \subset D$ , 若对  $\forall x_1, x_2 \in X$ , 且  $x_1 < x_2$  有

$$f(x_1) < f(x_2) \quad (\text{或 } f(x_1) > f(x_2)),$$

则称  $f(x)$  在  $X$  上单调增加 (或单调减少); 若对  $\forall x_1, x_2 \in X$ , 且  $x_1 < x_2$  有

$$f(x_1) \leq f(x_2) \quad (\text{或 } f(x_1) \geq f(x_2)),$$

则称  $f(x)$  在  $X$  上单调不减 (或单调不增), 在  $X$  内单调增加和单调减少的函数称为单调函数,  $X$  称为单调区间.

从几何直观上看, 单调增加函数的图形是随  $x$  的增加而上升的曲线, 单调减少函数的图形是随  $x$  的增加而下降的曲线, 分别见图 1-9, 图 1-10.

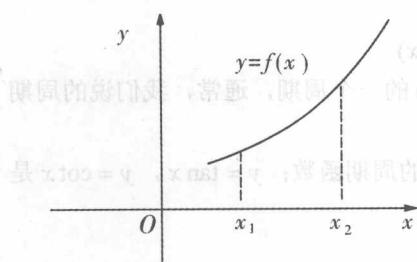


图 1-9

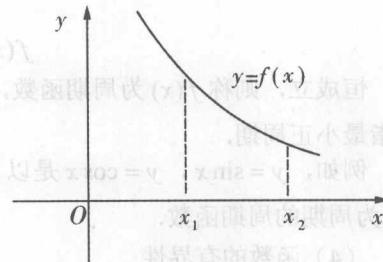


图 1-10

例如  $y = x^2$  在  $(-\infty, 0)$  内单调减少, 在  $[0, +\infty)$  内单调增加, 在定义域  $(-\infty, +\infty)$  内却不具有单调性.

如  $y = \frac{1}{x}$  在  $(-\infty, 0)$ ,  $(0, +\infty)$  内都单调减少, 但在定义域  $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$  内却

不具单调性.

### (2) 函数的奇偶性

设  $y = f(x)$  的定义域  $D$  关于原点对称 (即若  $x \in D$ , 则  $-x \in D$ ), 如果对任一  $x \in D$ , 都有

$$f(-x) = f(x) \quad (\text{或 } f(-x) = -f(x))$$

恒成立, 则称  $f(x)$  为偶函数 (或奇函数).

从几何直观上看, 偶函数的图形关于  $y$  轴对称 (见图 1-11), 奇函数的图形关于原点对称 (见图 1-12).

例如  $y = x^3$  是奇函数,  $y = \sin x$ ,  $y = \tan x$  是奇函数.

又例如  $y = x^2$ ,  $y = \cos x$  均是偶函数, 而  $y = \sin x + \cos x$  不是奇函数也不是偶函数, 称此类函数为非奇非偶函数.

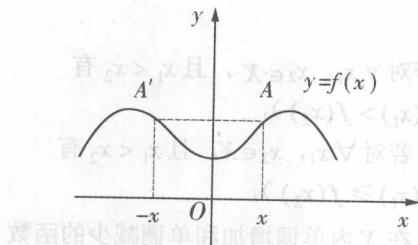


图 1-11

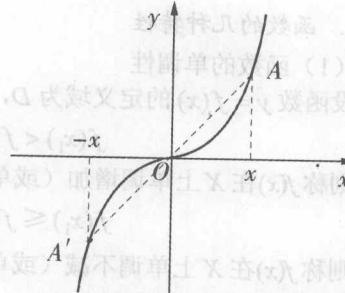


图 1-12

### (3) 函数的周期性

设函数  $y = f(x)$  的定义域为  $D$ , 如果存在正数  $T$ , 使得对  $\forall x \in D$ , 有  $x+T \in D$ , 且

$$f(x+T) = f(x)$$

恒成立, 则称  $f(x)$  为周期函数,  $T$  为  $f(x)$  的一个周期, 通常, 我们说的周期是指最小正周期.

例如,  $y = \sin x$ ,  $y = \cos x$  是以  $2\pi$  为周期的周期函数;  $y = \tan x$ ,  $y = \cot x$  是以  $\pi$  为周期的周期函数.

### (4) 函数的有界性

设函数  $y = f(x)$  的定义域为  $D$ ,  $X \subset D$ , 如果存在数  $K_1$ , 使得对  $\forall x \in X$  都有  $f(x) \leq K_1$  成立, 则称函数  $f(x)$  在  $X$  上有上界, 而  $K_1$  称为  $f(x)$  在  $X$  上的一个上界. 如果存在数  $K_2$ , 使得对  $\forall x \in X$  都有

$$f(x) \geq K_2$$

成立, 则称函数  $f(x)$  在  $X$  上有下界, 而  $K_2$  称为  $f(x)$  在  $X$  上的一个下界. 如果存在正数  $M$ , 使得对  $\forall x \in X$  都有

$$|f(x)| \leq M$$

成立. 则称  $f(x)$  在  $X$  上有界, 如果这样的  $M$  不存在, 则称  $f(x)$  在  $X$  上无界; 即对  $\forall M > 0$ ,  $\exists x_1 \in X$ , 使得  $|f(x_1)| > M$ , 则称  $f(x)$  在  $X$  上无界.

例如, 函数  $y = \sin x$ , 对一切  $x \in (-\infty, +\infty)$ , 恒有  $|\sin x| \leq 1$ , 故  $y = \sin x$  在  $(-\infty, +\infty)$  内有界.

**例 1.9** 讨论函数  $f(x) = \frac{1}{x}$ , 分别在区间  $(0,1)$ ,  $(1,2)$ ,  $(2,+\infty)$  上的有界性 (见图 1-13).

解

(1) 在  $(0,1)$  上,  $f(x)$  没有上界, 有下界. 数 1 就是  $f(x)$  的一个下界,  $f(x)$  在

(0,1)区间内是无界的. 因为不存在这样的正数  $M$ , 使  $\left|\frac{1}{x}\right| \leq M$ , 对于(0,1)内的一切  $x$  都成立.

(2)  $f(x) = \frac{1}{x}$  在(1,2)内有界, 可取  $M=1$ , 而使  $\left|\frac{1}{x}\right| \leq 1$  对一切  $x \in (1,2)$  都成立.

(3)  $f(x)$  在  $(2,+\infty)$  内有界, 可取  $M = \frac{1}{2}$ , 而使  $\left|\frac{1}{x}\right| \leq \frac{1}{2}$  对一切  $x \in (2,+\infty)$  都成立.

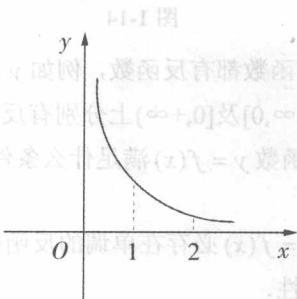


图 1-13

### 3. 反函数与复合函数

一般来说, 在函数关系中自变量和因变量是相对的. 例如圆的面积  $A$  与其中半径  $r$  的关系  $A = \pi r^2$  ( $r \geq 0$ ), 也可以把半径  $r$  表示为面积  $A$  的函数  $r = \sqrt{\frac{A}{\pi}}$ , 对这两个函数而言, 可以把后一个函数看作是前一个函数的反函数, 也可以把前一个函数看作是后一个函数的反函数.

**定义 1.2** 已知  $y = f(x)$  的定义域为  $D$ , 值域为  $R$ , 如果对于  $R$  中的每一个  $y$ ,  $D$  中总有唯一的  $x$ , 使  $f(x) = y$ , 则在  $R$  上确定了以  $y$  为自变量,  $x$  为因变量的函数  $x = \varphi(y)$ , 称为  $y = f(x)$  的反函数, 记作  $x = f^{-1}(y)$ ,  $y \in R$ , 或称  $y = f(x)$  与  $x = f^{-1}(y)$  互为反函数.

习惯上用  $x$  表示自变量, 用  $y$  表示因变量, 则函数  $y = f(x)$ ,  $x \in D$  的反函数表示为:

$$y = f^{-1}(x), \quad x \in R.$$

相对于反函数  $y = f^{-1}(x)$  来说, 函数  $y = f(x)$  称为直接函数. 从几何直观上看, 若点  $A(x, y)$  是函数  $y = f(x)$  图形上的点, 则  $A'(y, x)$  是反函数  $y = f^{-1}(x)$  的图形上的点. 反之亦然.

因此  $y = f(x)$  和  $y = f^{-1}(x)$  的图形关于直线  $y = x$  对称 (见图 1-14).