



临沂大学优秀校本教材

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots \cdots \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

姜同松 编著

高等代数方法与技巧

Methods and Skills for Higher Algebra

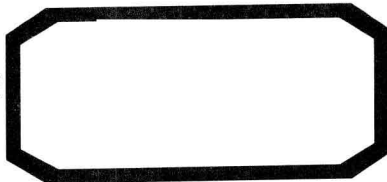
山东人民出版社

Shandong People's Publishing House

全国百佳图书出版单位 国家一级出版社



临沂大学优秀校本教材



高等代数方法与技巧

Methods and Skills for Higher Algebra

姜同松 编著



山东人民出版社

Shandong People's Publishing House

图书在版编目 (CIP) 数据

高等代数方法与技巧/姜同松编著. —济南: 山东人民出版社, 2012. 4
ISBN 978-7-209-05840-7

I. ①高… II. ①姜… III. ①高等代数—高等学校—教学参考资料 IV. ①015

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 157968 号

责任编辑:王 晶

封面设计:彭 路

高等代数方法与技巧

姜同松 编著

山东出版集团

山东人民出版社出版发行

社 址:济南市经九路胜利大街 39 号 邮 编:250001

网 址:<http://www.sd-book.com.cn>

发行部:(0531)82098027 82098028

新华书店经销

山东临沂新华印刷物流集团印装

规 格 16 开(184mm×260mm)

印 张 24.25

字 数 500 千字 插 页 2

版 次 2012 年 4 月第 1 版

印 次 2012 年 4 月第 1 次

ISBN 978-7-209-05840-7

定 价 42.00 元

如有质量问题,请与印刷单位联系调换。电话:(0539)2925659

临沂大学教材建设指导委员会

主 任：韩延明

副主任：姜同松

成 员：（以姓氏笔画为序）

王统永 毛红旗 孔繁金 申洪源 朱晓德 任世忠 江兆林
许长谭 许汝贞 孙成通 李 琳 李洪忠 吴 峰 张立富
张问银 张根柱 陈学营 陈建国 林光哲 周光亮 郑秀文
赵 勇 赵光怀 徐东升 奚凤兰 谢 楠

君子务本,本立而道生

——《临沂大学优秀校本教材》总序

校长 韩延明

孔子曰:“君子务本,本立而道生。”大学是育人之本,大学是科学之根,大学是文化之魂。大学教师的根本,乃在于“静下心来读书求真,俯下身去教书育人”。换言之,培养高质量人才始终是大学责无旁贷的基本目标和根本任务,而人才培养的主渠道又相对集中于课堂教学。课堂教学的基本要素是教师、学生和教材。教材又称“教本”,“教本教本,教学之本”,因此,校本教材建设,是大学教学基本建设、学校品牌创建的重要内容,是固化教师教学成果、实现教师科研成果向教学内容转化的重要步骤,也是创新课堂教学、提升教学质量的重要举措。2006年8月,由我校教师主编的首批立项资助的《香樟书库》系列校本教材(10本),由山东大学出版社正式出版。2010年8月,第二批教材(10本)在多方努力和帮助下,也已顺利付梓面世。两批教材熔铸古今、博采众长,体例新颖、内容丰富,发疑锐敏、释理清晰,开阔了学生视野,拓展了教学内容,优化了课程结构,提升了学校内涵,得到了师生的普遍认可和同行专家的高度评价,为后续校本教材的编撰和出版工作奠定了坚实的基础,积累了宝贵的经验。

“十二五”时期,是该校全面建设高质量综合性品牌大学的关键时期。2010年11月26日,国家教育部正式发文批准该校由临沂师范学院更名为临沂大学;12月8日,该校隆重、热烈地举行了临沂大学揭牌庆典。2011年6月12日,该校又隆重举行了声势浩大、影响深远的临沂大学70周年校庆。2011年是该校在综合性大学办学平台上谋划新发展、实现新突破、开创新局面的关

键一年。为此,学校党委组织开展了为期四个月的“办一所什么样的大学”和“怎样办好这所大学”的解放思想、更新观念大讨论活动,提出了建设“高质量综合性品牌大学”的奋斗目标,确定了“实”的校风和“明义、锐思、弘毅、致远”的校训。在办学理念上,我们提出了要办“有德性、有实力、有创新、有特色”的大学,要办“有规律、有规划、有规矩、有规模”的大学,要办“有理念、有理论、有理想、有理性”的大学,要办“强配置、高质量、有核心竞争力、有社会美誉度、学生满意、家长放心”的受人尊重的大学。在办学实践上,我们提出要遵循三条规律、进行三个转变、实施三大战略和突出三项重点。三条规律是:高等教育发展规律、人才成长发展规律和市场经济发展规律;三个转变是:由外延发展为主向内涵发展为主转变,由教学型大学向教学研究型大学转变,由师范类学院向综合性大学转变;三大战略是:质量立校战略、开放强校战略、特色亮校战略;三项重点是:全面加强人才队伍建设、全面提高学术科研水平、全面提升社会服务能力,以期真正使临沂大学办出水平、办出活力、办出特色。

《国家中长期教育改革和发展规划纲要(2010~2020年)》明确提出:“提高质量是高等教育发展的核心任务,是建设高等教育强国的基本要求。”我认为,就今天的高校而言,思路决定出路,就业决定专业,能量决定质量,质量决定力量。办学质量始终是一所高校的声誉之源、立校之本、发展之基,是高校命脉之所在。提高教学质量,理应是高校矢志不渝追求的永恒主题和永远高奏的主旋律,这就是我们多年来常讲的“教学为本,质量立校”。而办学质量又始终贯穿于实现“培养人才、发展科学、服务社会和文化遗产创新”四项大学基本职能的各个具体环节之中,其中既有人才培养的质量问题,也有科技成果转化和社会服务的质量问题,但人才培养质量是核心和旨归。为适应我校在综合性大学办学平台上提高人才培养质量的实际需要和21世纪信息时代对教材提出的新的更高要求,根据我校人才培养方案和精品课程建设规划,我们又很快启动了第三批立项教材的编撰工作。在临沂大学教材建设指导委员会的组织、指导与协调下,教材编著者们在多年知识积累和教学经验的基础上夜以继日地辛勤劳作,如今第三批教材(15本)的编辑工作已顺利完成,即将出版面世。这批教材是我校由临沂师范学院更名为临沂大学后的首批立项资助教材,既是我校校本教材建设工作步入规范化、系列化、制度化、科学化轨道的一个重要标志,也是认真贯彻落实国家教育部、山东省教育厅关于高等院校教学质量建设工程精神,促进学校内涵发展的一项重大举措,为中国共产党成立

90周年和临沂大学建校70周年献上了一份厚重的贺礼。

教材即教学材料的简称。广义言之，它是指依据教学大纲和教学实际需要为师生选编的教科书、讲义、讲授提纲、参考书目、自学手册、课外练习、网络课程、图片、教学影片、唱片、录音、录像以及计算机软件等；狭义言之，它是指一门课程的核心教学材料——教科书。教材是教学内容和教学方法的载体，是教师实施课堂教学的依据和工具，是学生最基本的学习参考资料，是师生互动、教学相长、顺利完成教学任务的必要基础，也是教学内容和课程体系改革成果的具体体现。教材建设水平是衡量一所高校教学质量与学术水平的重要标志之一。教材质量影响教学质量，教学质量影响人才培养质量。深化教育教学改革、全面推进素质教育，必须大力加强高校教材建设。临沂大学历来十分重视教材建设工作。几年前，为了督导教师选用优质教材、提高教学质量、强化教学管理、优化教学环境，学校曾严格规定：全部本科教材必须使用国家教育部、山东省教育厅统编教材或获奖教材，禁止使用教师自编教材，从而保证了教材质量，为规范、提升、完善本科教学工作奠定了良好的基础。

古人云：“临渊羡鱼，不如退而结网。”近年来，伴随着我国高等教育大众化的迅猛发展和高校本科教学工作水平评估的深入推进，临沂大学实现了超常规、跨越式、突破性发展，其中之一便是卓有成效地开展了“四大建设”，即“深化课程建设，优化专业建设，亮化学科建设，强化师资队伍建设”，使专业学科建设水平与教师教学水平不断提高，课程开发能力不断增强，课堂教学改革与课外实践革新不断深入，相继涌现出一大批质量上乘、优势明显、特色突出的优质课程和爱岗敬业、教书育人、乐于奉献的优秀教师，因而启动校本教材编写的条件日渐成熟。

在教材编写程序上，我们要求：严格按申报、立项、审批、编撰、出版发行、推广使用、论证评价等环节和程序进行。明确了教材建设的重点和选题范围：解决教学急需的，填补学科、专业、课程空白的新教材；体现我校教师在某一学科、专业领域独具优势或特色的专业基础课和选修课教材；针对我校作为沂蒙老区唯一一所本科高校这一特点，结合地方社会政治、经济、科技、文化需求所开设的地方课程教材，并高度重视红色文化的育人价值和教材建设。

在教材编写原则上，我们强调：一是注重知识性与思想性相辅相成；二是注重学术性与可读性融为一体；三是注重科学性与学科性彼此糅合；四是注重理论性与实践性相得益彰；五是注重统一性与多样性有机结合；六是注重现实

性与前瞻性有效拓展。我国著名教育家张楚廷教授曾提出教材编写“五最准则”，即最佳容量准则、最广泛效用准则、最持久效应准则、最适于发展准则、最宜于传授准则，我深表赞同。

在教材编写内容上，我们提出：既重视对国内外该课程领域经典的基本理论问题进行透彻的解析，又对当前教育所面临的新现象、新理论、新方法给予必要的回应；既考虑如何有利于教师的课堂教学与辅导，又兼顾如何有助于学生的课后复习和思考；既能反映我校特色和课程体系改革的基本方向，又要展示我校教材建设及学术研究的最新成果，适应我校创建精品课程、优质课程和品牌课程的实际需要。

在教材教法改革上，我们倡导：秉持综合素质教育理念，坚持课堂讲授与讨论相结合、教师讲授与学生自学相结合、理论学习与案例分析相结合、文本学习与网络学习相结合，“优化课内，强化课外”。既重视教师启发式、研讨式、合作式、案例式等教学方式方法的科学运用，又重视学生学习能力、实践能力、创新能力与创业能力的培养和训练，力图为学生知识、能力、素质的全面协调发展创造条件。可喜的是，这些方面都在教材编写中得到了充分体现。所有教材都是在试用了多年的成熟讲义的基础上经编著者们精心修改和指导委员会严格审定后出版的，确保了教材的思想性、科学性、系统性、适用性、启发性和相对稳定性。

临沂大学系列“优秀校本教材”的编撰出版，包含了编著者们的辛勤劳作和指导委员会成员的认真审阅。然而，由于此项工作尚处于尝试、探索阶段，又是我校成为综合性大学后的首批立项教材，因而疏漏、偏颇甚或错误之处在所难免，正所谓“始生之物，其形必丑”，敬请各位同仁和同学批评指正，以期再版时予以修订。

古人云：“书山有路勤为径，学海无涯苦作舟。”在漫漫求学路途上，千辛万苦、呕心沥血，“书”总会一直忠诚地陪伴着学习者，承前启后、继往开来，输送知识、启迪智慧，成为学习者解疑释难的知心朋友和指点迷津的人生导师，引领学习者最终进入学与习、学与思、学与行、学与创相结合的学人境界。在此，摘录俄国著名文学家托尔斯泰的一句名言与同学们共勉：“选择你爱的，爱你选择的！”选择你爱的教材，爱你选择的教材；选择你爱的专业，爱你选择的专业；选择你爱的母校，爱你选择的母校！衷心希望同学们像《临沂大学校歌》中所唱的那样，“笃奉明义锐思，抱负致远弘毅”，“德为重，才为本，弘道为要义”，

“明朝家国天下，我们一肩担起”。

恰逢我国第 27 个教师节来临，心潮澎湃、感慨万千！教师是光荣的：今岁种明岁栽岁岁育松柏，春开花秋结果年年献桃李；教师是辛苦的：滴滴汗水诚滋桃李芳天下，点点心血乐育英才泽神州。衷心感谢老师们多年来对学校建设和发展作出的重大贡献，深情祝福老师们身体健康、工作顺利、生活幸福、事业大成！

草于临沂大学明静轩

2011 年 9 月 10 日

前 言

高等代数是大学数学专业的一门重要的基础课,也是理工科大学各专业的课程。高等代数课程的特点是内容抽象性强,逻辑推论严谨。大学生在学习该课程时,总感到课程内容抽象,方法多变,做题困难,在对课程内容的理解以及方法的领会和运用上只是停留在表面,抓不住课程内容和方法的关键和实质,总有一种不得要领之感,很难做到举一反三,融会贯通。

高等代数由线性代数和多项式理论两部分组成,作为高等代数的重要组成部分,线性代数实际上就是矩阵代数,矩阵的思想方法贯穿于整个线性代数。

本书以矩阵为主线,对高等代数的内容和方法进行了梳理和归纳。全书共分行列式、矩阵、特殊矩阵、线性方程组、多项式、向量空间、线性变换、欧氏空间和二次型等九章,每一章节的结构均以知识点定义、性质定理、典型例题、方法和习题等模块组成。本书在编写过程中,尽量做到以下几点:

1. 突出矩阵方法的中心地位,强化矩阵思想在课程内容与方法上的主导作用,培养和提高应用矩阵思想方法解决问题的能力;

2. 注重对高等代数解题方法和技巧的研究与剖析,做到抽象问题具体化,复杂问题简单化,习题解答方法化;

3. 突破课程内容编排上的逻辑顺序,突出问题解决方法这一主体,培养综合运用代数思想分析问题和解决问题的能力;

4. 借鉴和引进一些新成果、新方法和新题目,力求推陈出新。书中的例题和练习题大多是近年来大学硕士研究生入学试题。

作者长期从事高等代数课程的讲授和研究,本书即是作者 30 多年来教学与研究经验成果的积累和总结。1987 年,作者根据高等代数课程教学和

学生的需要,首先编写了讲义《高等代数复习与提高》;经过多年的使用和修改,于2003年又对讲义进行修订,编写了《高等代数方法与技巧》黄皮书。

本书通过高等代数的知识点及近年来研究生入学试题进行分析和研究,把高等代数的解题方法归纳为50类,以此帮助读者进一步理解和把握高等代数的思想内涵,掌握并学会高等代数的证题方法和技巧。

本书作为临沂大学优秀校本教材,经学校立项并由山东人民出版社正式出版发行。本书既可作为大学数学专业高等代数后继课程的教材、作为数学专业研究生考试的辅导教材,也可作为理工科各专业讲授线性代数教学和学生自学的辅导参考书。

本书的出版得到了华东师范大学数学系魏木生教授和同仁们的大力支持,周厚春教授、刁科凤教授、姚金江教授、孙洪春教授以及王建勇、王树艳和刘靖国等老师做了大量的工作,在此表示感谢!

由于作者水平所限,不当之处,在所难免,诚恳希望读者提出宝贵意见。谢谢!

编著者

2012年2月于临沂大学

符 号

$\in$	元素属于
$\notin$	元素不属于
$\subset$	集合含于
$\subseteq$	集合真含于
$\cup$	集合的并
$\cap$	集合的交
$\forall$	任意的
$\mathbb{Z}$	整数集
$\mathbb{Q}$	有理数域
$\mathbb{R}$	实数域
$\mathbb{C}$	复数域
F	数域
F^n	数域 F 上的 n 维行(列)向量空间
$F[x]$	数域 F 上的全体多项式
$F_n[x]$	数域 F 上的全体次数不超过 n 的多 项式及 0 多项式构成的线性空间
$M_{m \times n}(F), F^{m \times n}$	数域 F 上的全体 $m \times n$ 矩阵
$M_n(F)$	数域 F 上全体 n 阶矩阵
$\text{rank}(A)$, 秩 A	矩阵 A 的秩
I	单位矩阵
I_n	n 阶单位阵
A^T	矩阵 A 的转置
A^H	矩阵 A 的共轭转置
A^{-1}	矩阵 A 的逆
A^*	矩阵 A 的伴随矩阵
$\text{tr}(A)$	矩阵 A 的迹
$ A $	矩阵 A 的行列式
$R(A)$	矩阵 A 的列空间

$N(A)$	$AX=0$ 的解空间
$A \begin{pmatrix} i_1 & \cdots & i_k \\ j_1 & \cdots & j_l \end{pmatrix}$	矩阵 A 的 $i_1, \cdots, i_k$ 行与 $j_1, \cdots, j_l$ 列构成的子矩阵
$A \begin{pmatrix} i_1 & \cdots & i_k \\ i_1 & \cdots & i_k \end{pmatrix}$	矩阵 A 的 k 阶主子阵
$A \begin{pmatrix} 1 & \cdots & k \\ 1 & \cdots & k \end{pmatrix}$	矩阵 A 的 k 阶顺序主子阵
$A \leftrightarrow B$	A 与 B 等价
$A \simeq B$	A 与 B 合同
$A \sim B$	A 与 B 相似
$V(F)$	数域 F 上的向量空间
$V_n(F)$	数域 F 上的 n 维向量空间
$V \cong W$	向量空间 V 与 W 同构
$L(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$	由向量组 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 生成的子空间
$L(V_n(F))$	F 上的 n 维线性空间 V 上的全体线性变换
$\sigma(V), \text{Im}(\sigma)$	线性变换的值域或象
$\text{Ker}(\sigma), \sigma^{-1}(0)$	线性变换的核
$\dim V$	线性空间 V 的维数
$W^\perp$	W 的正交补
$\sigma _V$	σ 在 V 上的限制
$\sigma(\alpha)$	向量 α 在线性变换 σ 下的象
ϵ	线性空间 V 上的恒等变换
$V_1 + V_2$	V_1 与 V_2 的和
$V_1 \oplus V_2$	V_1 与 V_2 的直和
E_{ij}	第 i 行第 j 列交叉点上的元素为 1, 其余全为 0 的矩阵
ϵ_i	第 i 个标准单位向量, $\epsilon_i = (0, \cdots, 0, \overset{i}{1}, 0, \cdots, 0)^T$
$f_A(\lambda)$	矩阵 A 的特征多项式
$f_\sigma(\lambda)$	线性变换 σ 的特征多项式
V_λ	特征值 λ 的特征子空间
$\text{diag}(a_1, a_2, \cdots, a_n)$	$\begin{pmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n \end{pmatrix}$

CONTENTS | 目 录

君子务本,本立而道生

——《临沂大学优秀校本教材》总序 韩延明 /1

前 言 /1

第一章 行列式 /1

-
- 1.1 行列式定义的方法 /1
 - 1.2 行列式性质的方法 /5
 - 1.3 行列式乘积的方法 /11
 - 1.4 行列式降阶的方法 /15
 - 1.5 矩阵积与和的行列式的方法 /19

第二章 矩 阵 /22

-
- 2.1 矩阵定义及其运算的方法 /22
 - 2.2 可逆矩阵与伴随矩阵的方法 /26
 - 2.3 标准单位向量的方法 /32
 - 2.4 矩阵分块的方法 /34
 - 2.5 初等变换与初等矩阵的方法 /39
 - 2.6 矩阵特征根的方法 /45
 - 2.7 降阶与升阶的方法 /50
 - 2.8 齐次线性方程组的方法 /54
 - 2.9 构造连续函数的方法 /56
 - 2.10 可交换矩阵的方法 /58
 - 2.11 矩阵若当标准形的方法 /62

第三章 特殊矩阵 /69

- 3.1 准对角矩阵的方法 /69
- 3.2 k 对称矩阵的方法 /70
- 3.3 k 正交矩阵的方法 /76
- 3.4 正规矩阵的方法 /80
- 3.5 多项式零化矩阵的方法 /82
- 3.6 正定矩阵的方法 /89

第四章 线性方程组 /101

- 4.1 线性方程组有解的判定方法 /101
- 4.2 线性方程组的向量方法 /104
- 4.3 线性方程组的克莱姆方法 /107
- 4.4 齐次线性方程组基础解系的方法 /110
- 4.5 线性方程组解结构的方法 /115
- 4.6 线性方程 $AXB=C$ 解结构的方法 /119

第五章 多项式 /124

- 5.1 多项式的整除性方法 /124
- 5.2 多项式的最大公因式方法 /127
- 5.3 不可约多项式的方法 /134
- 5.4 多项式函数与多项式根的方法 /139

第六章 向量空间 /143

- 6.1 向量空间定义的方法 /143
- 6.2 向量线性关系的方法 /147
- 6.3 基、维数和坐标的方法 /152
- 6.4 子空间的交与和的方法 /159
- 6.5 向量空间同构的方法 /167

第七章 线性变换 /171

- 7.1 线性变换定义及运算的方法 /171
- 7.2 线性变换与矩阵的方法 /178
- 7.3 求解线性变换特征根与特征向量的方法 /186
- 7.4 线性变换与矩阵对角化的方法 /194
- 7.5 线性变换不变子空间的方法 /200

第八章 欧氏空间 /207

- 8.1 欧氏空间定义的方法 /207
- 8.2 欧氏空间正交向量组的方法 /213
- 8.3 正交变换与正交矩阵的方法 /223
- 8.4 对称变换与对称矩阵的方法 /232

第九章 二次型 /238

- 9.1 二次型定义的方法 /238
- 9.2 二次型标准形的方法 /242
- 9.3 正定二次型的方法 /252
- 9.4 Hermite 型与 Hermite 矩阵的方法 /258

习题解答与提示 /264

主要参考文献 /373

行列式

1.1 行列式定义的方法

1. 定义

定义 1 n 阶行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

定义为 $n!$ 项的代数和, 这些项是一切可能的取自 D_n 的不同行与不同列的 n 个元素的积 $a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$, 且此项的符号是 $(-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)}$ 。即

$$D_n = \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}.$$

n 阶行列式还可定义为

$$\text{定义 2 } D_n = \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{j_1 1} a_{j_2 2} \cdots a_{j_n n}.$$

$$\text{定义 3 } D_n = \sum (-1)^{\tau(i_1 i_2 \cdots i_n) + \tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} \cdots a_{i_n j_n},$$

其中行列式 D_n 中项 $a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} \cdots a_{i_n j_n}$ 的符号是

$$(-1)^{\tau(i_1 i_2 \cdots i_n) + \tau(j_1 j_2 \cdots j_n)}.$$

2. 典型例题

例 1 计算