理 论 力 学

徐渭彬 编

无锡教育学院

目　　录

第一章　静力学

静力学是研究物体平衡时，作用在物体上的各种力系所应满足的条件。所谓力系，是指作用在物体上的一群力。静力学中的所谓平衡是指物体相对于地球处于静止或作匀速直线运动的状态。为了建立各种力系的平衡条件，首先应研究物体的受力分析和力系的简化问题。

§1—1静力学基本概念

1.力的概念

力的概念是人们从生产劳动和日常生活中，由于肌肉的紧张收缩，产生了对力的感性认识。通过长期的生产实践和科学实验，才逐步建立了力的概念：*力是物体间的相互作用，这种作用使物体的运动状态发生改变或产生变形。*

力对物体的作用效果决定于力的大小、方向和作用点。实践证明，力是可以按照平行四边形法则进行合成的，因此，力是矢量。

力$\mathbf{F}$的大小和方向，在直角坐标系$oxyz$中可由它在坐标轴上的三个分量F_x、F_y、F_z来确定，设$\mathbf{i}$、$\mathbf{j}$、$\mathbf{k}$为沿x、y、z轴方向的单位矢量，则

$$\mathbf{F}=F_x\mathbf{i}+F_y\mathbf{j}+F_z\mathbf{k} \tag{1—1}$$

其中$F_x\mathbf{i}$、$F_y\mathbf{j}$、$F_z\mathbf{k}$分别表示$\mathbf{F}$沿x、y、z轴方向的三个分

力。**F**的大小为

$$F=\sqrt{F_x^2+F_y^2+F_z^2} \tag{1—2}$$

F的方向余弦为

$$\cos(\mathbf{F},\ \mathbf{i})=\frac{F_x}{F}$$

$$\cos(\mathbf{F},\ \mathbf{j})=\frac{F_y}{F} \tag{1—3}$$

$$\cos(\mathbf{F},\ \mathbf{k})=\frac{F_z}{F}$$

F在物体上的作用点M，可由原点O至点M的位置矢量$\mathbf{r}=\overrightarrow{om}$确定，当然，M点也可由它的坐标x、y、z确定，它们间有关系

$$\mathbf{r}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k} \tag{1—4}$$

2.刚体的概念

力对物体的作用效果，除了使物体的运动状态发生变化外，还使物体发生不同程度的变形。如果在所研究的问题中，物体的大小和形状的变化可以忽略不计时，我们为了使问题的研究简化，可以把物体看作是不变形的。这种在力的作用下，内部任意两点间的距离始终保持不变的物体称为**刚体**。

3.等效力系

如果两个力系对刚体产生的力学效果相同，则称为**等效力系**。特别当作用于刚体上的力系如果能和一个力等效，那末，

这个力称为力系的**合力**，而力系中的各个力称为**分力**。例如作用在刚体上同一点的力系可连续使用平行四边形法则或三角形法则，也可用多边行法则求得其合力（图１—１）。但必须注意，一个力系不一定总有合力。

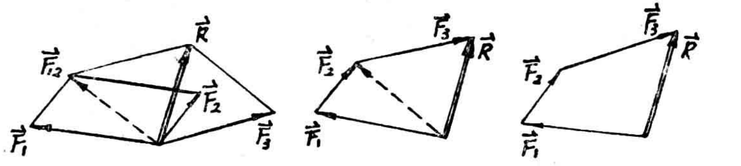

图１—１

平衡力系　　当物体在力系的作用下处于平衡状态，这种力系称为平衡力系，平衡力系所满足的条件称为平衡条件。作用于刚体上的平衡力系的效果就同不受到任何力一样，与零力系等效，亦即合力为零，例如二个等值、反向且共线的力就是一个最简单的平衡力系。所以对于受力的刚体可以加上或去掉一个平衡力系，而不改变原来力系对刚体的作用效果。

力的可传性原理　　作用于刚体上某点的力，可以沿着它的作用线移到刚体内任意一点，并不改变该力对刚体的作用。

设力F作用在刚体的点A，在力F的作用线上取任一点B，加上等值、反向、共线的一对平衡力F_1和F_2，并使$F_1=-F_2=F$（图１—２）然后又去掉一对平衡力F和F_2，最终得到力F_1与力F等效。这一结果表明作用在刚体上的力是滑移矢量。

三力平衡汇交定理　　刚体受不平行的三个力作用而平衡时，这三个力一定在同一平面内，且作用线汇交于一点。

如果三力平衡，则三力作用线一定共面这一点参阅习题

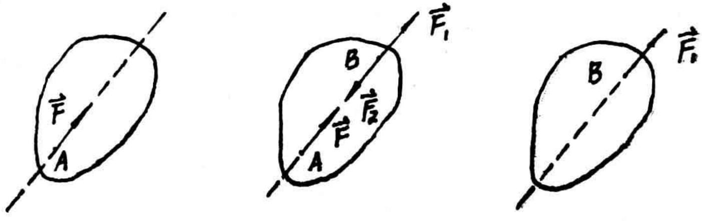

图 1 — 2

1.3。今设三力F_1、F_2、F_3中有两个力F_1、F_2的作用线相交于某点O，将F_1和F_2分别沿作用线移到O点，求出它们的合力R，则R应与F_3相平衡。由二力平衡条件，R与F_3必须共线，所以F_1、F_2、F_3的作用线汇交于O点。

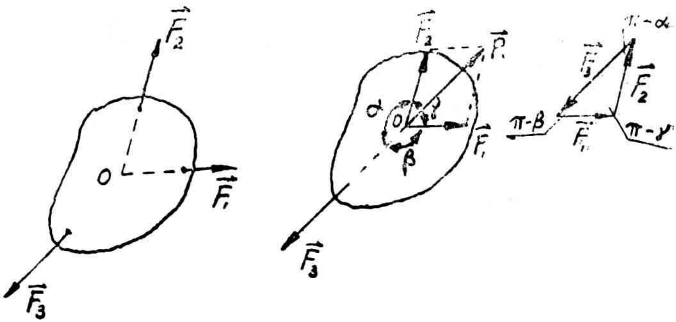

图 1 — 3

图 1 — 3 (c)所示，F_1、F_2、F_3的合力为零，所以三个力应构成自行封闭的力三角形，由正弦定理得

$$\frac{F_1}{sin(\pi-\alpha)}=\frac{F_2}{sin(\pi-\beta)}=\frac{F_3}{sin(\pi-\gamma)}$$

即

$$\frac{F_1}{\sin\alpha}=\frac{F_2}{\sin\beta}=\frac{F_3}{\sin\gamma} \qquad (1—5)$$

上式中α、β、γ表示力F_2、F_3、F_1两两间的夹角。

三力平衡汇交定理，在解决平衡问题时经常被用到。

§1—2约束　物体的受力分析

在研究的具体问题中，有些物体的空间位置常常受到周围物体的限制，例如，用长度为l的刚性杆悬挂的小球，若悬点固定，则小球只能在半径为l的球面上运动。我们把那些限制物体运动的条件，称为**约束**。约束物体（如刚杆）与被约束物体（如小球）之间通过接触点相互作用有力，我们把约束物在被约束物体上的作用力叫做**约束力**。当约束被人为地解除时，必须在接触点上用一个适当的约束力来代替。

常见的约束和约束力的性质主要有以下几种。

1.光滑接触面　若两物间的接触面是光滑的，则物体可以自由地沿接触面滑动，或沿接触面在接触点的公法线方向脱离接触，但不能沿公法线方向压入接触面。因此光滑接触面给被约束物体的力沿公法线方向，并且只能是压力（图1—4），它有一个未知量，就是力的大小。

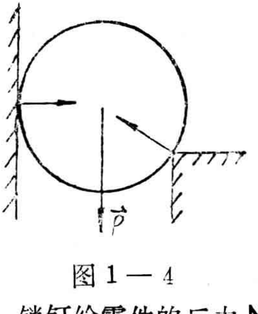

图1—4

光滑铰链是使物体上一点不动的约束，实际上是两个光滑圆柱面的接触，销钉给零件的反力N作用在接触点K，接触点是变动的。因此，沿公法线通过轴心，反力的大小和方向都是未知量。在平面情况叫做柱铰链，

有两个未知量。这两个未知量可取反力的大小N及其与某个固定方向如水平方向的夹角θ；或者取直角坐标系中的两个分量N_x和N_y。在空间情况叫做球铰链，有三个未知量。

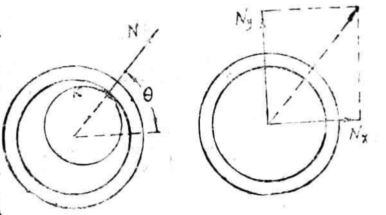

图1—5

2.柔索　它对物体的反力是一个拉力，其作用线沿绳索。它包含一个未知量。

在解决具体力学问题时，首先要弄清楚作用在物体上有哪些力，这叫做受力分析，受力分析的步骤是：

1)明确研究对象　对象可以是单个物体，也可以是几个物体的组合体或者是整体。

2)作出受力图　首先画出作用在物体上的场力及给定的力。然后正确地画出周围接触物体作用的约束反力。相互接触物体间的作用应按作用和反作用定律（牛顿第三运动定律）来分析。当画整个系统或组合体的受力图时，由于内力成对出现，组成平衡力系，因此不必画出，只须画出全部外力。

例1—1　如图1—6所示的三铰拱桥，由左右两拱铰接而成。设各拱自重不计，在拱AC上作用有载荷P。试分别画出拱AC和CB的受力图。

解：

（1）先分析拱BC的受力。由于拱BC的自重不计，且只在B、C两处受到铰链的约束反力S_B和S_C的作用，方向暂时不能确定。如果进一步考虑到拱BC只在S_B和S_C两个力作用下处于平衡，则根据二力平衡条件，这两个力必定沿同一直线，且等值、反向。由此可确定S_B和S_C的作用线应沿B与C的连线（由经验判断，此处拱BC受压力。但在一般情况下，力的指向不

能定出，需根据平衡条件才能确定）。即$S_B = -S_C$（图1＝6（b））。

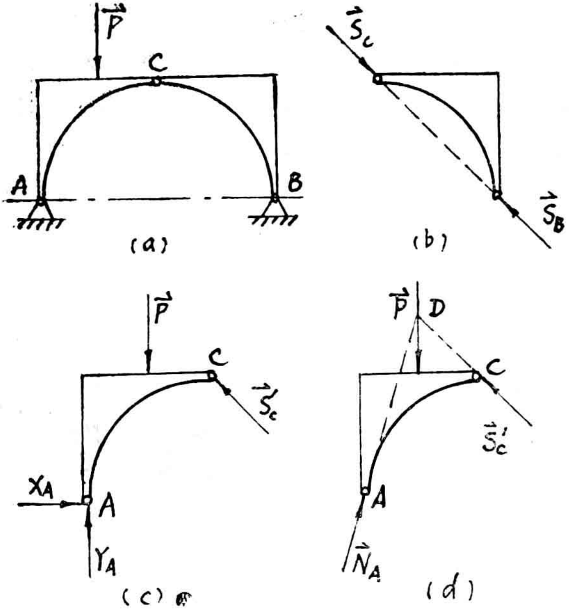

图1—6

（2）取拱AC为研究对象。由于自重不计，因此只有载荷**P**。拱在铰链C处受有拱BC给它的约束反力S'_C的作用，根据作用和反作用定律，$S'_C = -S_C$。拱在A处受有铰链给它的约束反力**N**的作用，由于方向未定，可用两个大小未知的正交分力X_A和Y_A代替（图1—6（c））。

再进一步分析可知，由于拱AC在**P**、S'_C和**N**三个力作用下平衡，故可根据三力平衡汇交定理，确定铰链A处约束反力**N**的方向。点D为力S'_C和**P**作用线的交点，当拱AC平衡时，反力**N**的作用线必通过点D（图1—6（d））；至于**N**的指向，以

后由平衡条件确定。

例1—2，如图1—7(a)所示，梯子的两部份AB和AC在A铰接，又在D、E两点用水平绳连接。梯子放在光滑水平面上，若其自重不计，但在AB的中点H处作用一铅直载荷P。试分别画出绳子DE和梯子的AB、AC部分以及整个系统的受力图。

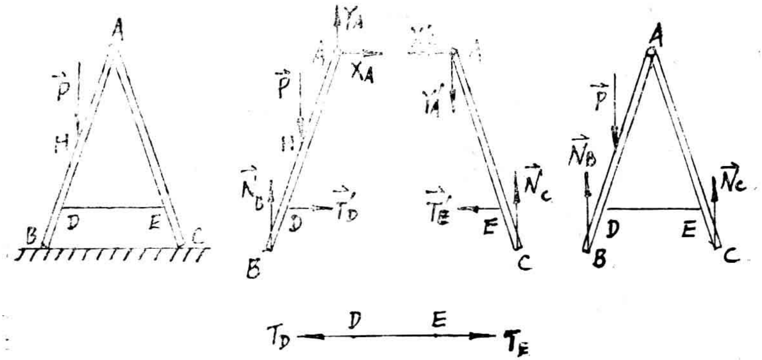

图1—7

解：

(1)绳子DE的受力分析。绳子两端D、E分别受到梯子对它的拉力T_D、T_E的作用(图1—7(b))。

(2)梯子AB部分的受力分析。它在H处受到载荷**P**的作用，在铰链A受到AC部分给它的约束反力X_A和Y_A的作用，在点D受到绳子对它的拉力T'_D(与T_D互为作用力和反作用力)的作用。在点B受到光滑地面对它的法向反力N_B的作用。

梯子AB部分的受力图如图1—7(c)。

(3)梯子AC部分的受力分析。在铰链A处受到AB部分对它的作用力X'_A和Y'_A(分别与X_A和Y_A互为作用力和反作用

力）的作用。在点E受到绳子对它的拉力T'_E（与T_E互为作用力和反作用力）的作用。在C处受到光滑地面对它的法向反力N_C的作用。

梯子AC部分的受力图如图1—7(d)所示。

（4）整个系统的受力分析。当选整个系统为研究对象时，由于铰链A处所受的力、绳子与梯子连接点D和E处所受的力都是内力，它们对系统的作用效果相互抵消，因此可以除去，并不影响整个系统的平衡。故内力在受力图上不必画出。在受力图上只需画出系统以外的物体给系统的作用力即外力。

整个系统的受力图如图1—7(e)

必须指出，内力与外力的区分不是绝对的，它们在一定条件下，可以互相转化。例如在例1—2中，对梯子的AB部分作为研究对象时，X_A、Y_A和T'_D均属外力，但取整体为研究对象时，X_A、Y_A和T'_D又成为内力了。可见，内力与外力的区分，只有相对于某一确定的研究对象才有意义。

§1—3　汇交力系的合成和平衡

1.汇交力系的合成

各力的作用线相交于一点的力系称为汇交力系。设在刚体上作用有汇交力系F_1、F_2、……F_n。根据力的可传性原理，将力系中各力分别沿其作用线移到汇交点，则力系便转换成共点力系，可连续应用三角形法则或多边形法则求得合力R，也就是整个汇交力系的合力，即

$$R=\sum_{i=1}^{n} F_i$$

或简写为

$$\mathbf{R}=\Sigma\mathbf{F} \tag{1—6}$$

在具体计算合力的大小和确定合力的方向时，可选取直角坐标系。设力$\mathbf{F}_1$、$\mathbf{F}_2$、……$\mathbf{F}_n$在x、y、z轴上的分量分别为F_{1x}、F_{1y}、F_{1z}、F_{2x}、F_{2y}、F_{2z}……F_{nx}、F_{ny}、F_{nz}，于是

$$\mathbf{R}=\sum_{i=1}^{n}(F_{ix}\mathbf{i}+F_{iy}\mathbf{j}+F_{iz}\mathbf{k})=(\sum_{i=1}^{n}F_{ix})\mathbf{i}+(\sum_{i=1}^{n}F_{iy})\mathbf{j}+(\sum_{i=1}^{n}F_{iz})\mathbf{k}$$

即：

$$R_x=\sum_{i=1}^{n}F_{ix},\quad R_y=\sum_{i=1}^{n}F_{iy},\quad R_z=\sum_{i=1}^{n}F_{iz}$$

或简写为

$$R_x=\Sigma F_x,\quad R_y=\Sigma F_y,\quad R_z=\Sigma F_z \tag{1—7}$$

由此可求得合力的大小和方向为

$$R=\sqrt{R_x^2+R_y^2+R_z^2}=\sqrt{(\Sigma F_x)^2+(\Sigma F_y)^2+(\Sigma F_z)^2} \tag{1—8}$$

$$\cos(\mathbf{R},\ \mathbf{i})=\frac{R_x}{R},\quad \cos(\mathbf{R},\ \mathbf{j})=\frac{R_y}{R},$$

$$\cos(\mathbf{R},\ \mathbf{k})=\frac{R_Z}{R} \tag{1—9}$$

2.汇交力系的平衡条件

汇交力系平衡的充分必要条件是力系的合力等于零，即

$$\mathbf{R}=\Sigma\mathbf{F}=0$$

由式（1—8）应有

$$\left.\begin{array}{l}\Sigma F_x = 0\\ \Sigma F_y = 0\\ \Sigma F_z = 0\end{array}\right\} \qquad (1—10)$$

且式（1—10）称为空间汇交力系的平衡方程。这是三个独立的方程，可以求解三个未知量。

如果是平面汇交力系，则平衡方程只有二个：

$$\Sigma F_x = 0, \quad \Sigma F_y = 0 \qquad (1—11)$$

因此只能求解二个未知量

例1—3有一密度不均匀的细棒AB重P，其重心离棒端的距离分别为a及b（$a<b$），如果将它放在一半径为r的半球形光滑碗内（$a+b<2r$），求棒在平衡状态时与水平面的夹角θ和杆端所受的约束反力。

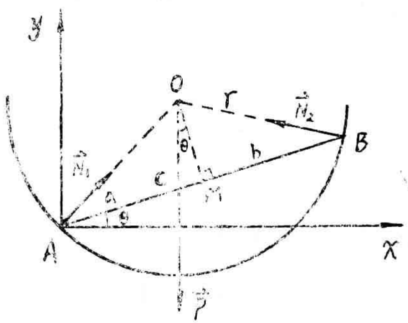

图1—8

解：

棒A、B两端系光滑接触，反力N_1和N_2的作用线通过球心O。棒受三力而平衡，故重力P的作用线也必通过球心（图1—8）。已知$AC=a, BC=b$。经球心作棒AB的垂线OM，垂足M应是AB的中点，故$AM=BM=\frac{a+b}{2}$

$$OM=\sqrt{r^2-(\frac{a+b}{2})^2}$$

$$CM=AM-AC=\frac{a+b}{2}-a=\frac{b-a}{2}$$

由于∠COM的两边与θ角两边互相垂直，所以∠COM＝θ从而有

$$\operatorname{tg}\theta=\frac{CM}{OM}=\frac{\dfrac{b-a}{2}}{\sqrt{r^2-\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2}}=\frac{b-a}{\sqrt{4r^2-(a+b)^2}} \quad (1)$$

从上式可求出θ。

设∠OAB＝∠OBA＝α，α可由几何关系求出：$\cos\alpha=\frac{BM}{OB}=\frac{a+b}{2r}$。沿水平和铅直方向分别取x 轴 和 y 轴如图 1—8 所示，于是

$$\sum F_x=0 \quad N_1\cos(\alpha+\theta)-N_2\cos(\alpha-\theta)=0 \quad (2)$$

$$\sum F_y=0 \quad N_1\sin(\alpha+\theta)+N_2\sin(\alpha-\theta)-P=0 \quad (3)$$

由(2)、(3)两式解出

$$N_1=\frac{\cos(\alpha-\theta)}{\sin 2\alpha}P$$

$$N_2=\frac{\cos(\alpha+\theta)}{\sin 2\alpha}P$$

例 1—4，重Q＝1764牛顿的物体悬在起重机绳索AB与撑杆AC、AD的支点，已知AB＝1.7米，AC＝AD＝1米，CD＝1.2米，且CO＝OD，求绳索AB、杆AC和AD内所受的力

解：

取坐标如图(1—9)所示，设绳索AB、杆AC、AD受拉力，它们作用在A点的力分别为**T**、**S**、**R**；设∠CAO＝

$\angle DAO=\alpha$，$\angle BAO=\beta$

$$\Sigma F_x=0 \quad S\sin\alpha - R\sin\alpha = 0 \qquad (1)$$

$$\Sigma F_y=0 \quad -T\cos\beta - S\cos\alpha - R\cos\alpha = 0 \qquad (2)$$

$$\Sigma F_z=0 \quad T\sin\beta - Q = 0 \qquad (3)$$

从(1)、(2)、(3)三式解得

$$T=\frac{Q}{\sin\beta} \qquad (4)$$

$$S=R=-\frac{\mathrm{ctg}\beta}{2\cos\alpha}Q \qquad (5)$$

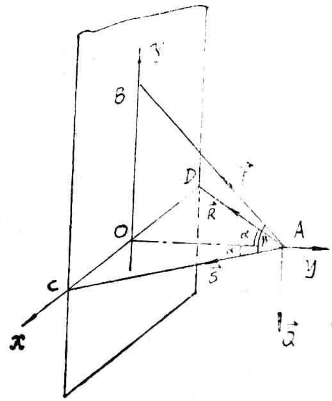

图1—9

由几何关系可得

$$AO=\sqrt{AC^2-OC^2}=\sqrt{1^2-(0.6)^2}=0.8\text{米}$$

$$BO=\sqrt{AB^2-AO^2}=\sqrt{(1.7)^2-(0.8)^2}=1.5\text{米}$$

$$\therefore \cos\alpha=0.8,\ \mathrm{ctg}\beta=\frac{8}{15},\ \sin\beta=\frac{15}{17}$$

代入式(4)及(5)，得

$$T=\frac{17}{15}\times1764=1999.2\text{牛顿}$$

$$S=R=-\frac{8}{15}\cdot\frac{1}{2\times0.8}\times1764=-588\text{牛顿}$$

S、R的量值为负表示AC和AD杆内受到的不是拉力而是压力。