SHUZHIFENXI

QUANZHENSHITIJIEXI

数值分析
全真试题解析

（2007—2012）

孙志忠 吴宏伟 曹婉容／编著

东南大学出版社
SOUTHEAST UNIVERSITY PRESS

数值分析全真试题解析

（2007 — 2012）

孙志忠　吴宏伟　曹婉容　　编著

东 南 大 学 出 版 社
·南京·

前 言

计算机的迅速发展为人们提供了强有力的计算工具. 使用计算机进行科学计算已成为科学研究、工程设计中越来越不可缺少的一个环节, 而数值模拟已成为继理论研究、实验研究之后的一种新的科学研究方法, 它有时甚至代替或超过了实验所起的作用. 因此, 科学计算应该成为高级科技人员必须掌握的一种研究手段. 作为科学计算的核心 —— 数值分析 (Advanced Numerical Analysis) 课程或计算方法 (Elementary Numerical Analysis) 课程, 已被许多理工科专业研究生、本科生作为必修课程.

本书对东南大学近 6 年来工学硕士研究生和工程硕士研究生学位课程考试、工学博士研究生入学考试"数值分析"以及理学博士研究生入学考试"高等数值分析"的试题作了较详细的解答, 部分题目还给出了多种解法. 内容包括误差分析、非线性方程求根、线性方程组数值解法、函数插值与逼近、数值微分与数值积分、常微分方程初值问题的数值解法、偏微分方程数值解法以及求矩阵特征值的幂法. 硕士生学位课程考试时间为 150 分钟, 博士生入学考试时间为 180 分钟.

本书是东南大学出版社出版的《数值分析》和《计算方法和实习》两本教材的配套参考书. 虽然本书内容选自东南大学考试试卷, 但对所有学习这门课程的学生都有重要的参考价值.

工学硕士研究生学位课程考试的试题是由承担该课程的诸位同事共同讨论确定的, 在此向他们表示谢意. 同时感谢计算数学专业部分研究生为该书的排版校对付出的辛勤劳动.

作者衷心期望使用本书的老师、同学以及其他广大读者对本书提出宝贵意见. 电子邮箱: zzsun@seu.edu.cn.

作 者

2012 年 5 月

目 录

试题部分

1

2007 年秋季工学硕士研究生学位课程考试试题

1. 填空 (每题 3 分, 共 21 分)
   1) 设 $x_1 = 0.2008$ 和 $x_2 = 0.1809$ 是具有 4 位有效数字的近似值, 则 x_1x_2 至少具有__________位有效数字.
   2) 给定方程 $x = 1 + \sin 2x$, 求该方程根的 Newton 迭代格式是______.
   3) 设 $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, 则 $\|\boldsymbol{A}\|_2 =$______.
   4) 设 $f(x) = x(x-1)(x-2)$, 则 $f[0,1,2,3] =$______.
   5) 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上 2 阶连续可导, 则 $f(0.5) - \frac{1}{2}[f(0) + f(1)] =$______.
   6) 求积分 $\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x$ 的 Simpson 公式是__________.
   7) 求常微分方程初值问题

$$\begin{cases} 3y' - xy = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

   的改进的 Euler 公式是________________.

2. (10 分) 构造一种迭代算法求 $\sqrt[5]{2008}$ 的近似值, 精确到 4 位有效数字.

3. (10 分) 给定线性方程组

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

写出求解该方程组的 Jacobi 迭代格式, 并分析 Jacobi 迭代格式的收敛性.

4. (9 分) 给定线性方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$, 其中 $\boldsymbol{A} \in \mathbf{R}^{n\times n}$ 可逆, $\boldsymbol{b} \in \mathbf{R}^n$ 为非零向量, $\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n$. 设 $\boldsymbol{x}^*$ 和 $\tilde{\boldsymbol{x}}$ 分别为方程组的精确解和近似解, $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{b} - \boldsymbol{A}\tilde{\boldsymbol{x}}$. 证明:

$$\frac{1}{\mathrm{cond}(\boldsymbol{A})} \frac{\|\boldsymbol{r}\|}{\|\boldsymbol{b}\|} \leqslant \frac{\|\boldsymbol{x}^* - \tilde{\boldsymbol{x}}\|}{\|\boldsymbol{x}^*\|}.$$

5. (10 分) 用插值法求一个二次多项式 $p_2(x)$, 使得曲线 $y = p_2(x)$ 在 $x = 0$ 处与曲线 $y = \cos x$ 相切, 在 $x = \pi/2$ 处与 $y = \cos x$ 相交, 并证明:

$$\max_{0\leqslant x\leqslant \pi/2} |p_2(x) - \cos x| \leqslant \frac{\pi^3}{324}.$$

6. (10 分) 求函数 $f(x) = xe^x$ 在区间 [0,1] 上的 1 次最佳平方逼近多项式

$$p_1(x) = ax + b.$$

7. (10 分) 给定求积公式

$$\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x \approx Af(x_0) + f(x_1).$$

1) 求 A, x_0, x_1, 使得求积公式具有尽可能高的代数精度, 并指出所达到的最高代数精度的次数;

2) 设 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上充分光滑, 求由 1) 所确定的求积公式的截断误差, 并将其表示为 $Cf^{(p)}(\xi)$ 的形式, 其中 C, p 为常数.

8. (10 分) 考虑常微分方程初值问题

$$\begin{cases} y' = f(x,y), \quad a \leqslant x \leqslant b, \\ y(a) = \eta, \end{cases}$$

取正整数 n, 记 $h = \dfrac{b-a}{n}, x_i = a + ih, i = 0,1,2,\cdots,n$. 给定上述初值问题的求解公式:

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i + (1-\beta)h, y_i + h\beta f(x_i, y_i)),$$

试求参数 β, 使求解公式具有尽可能高的阶数, 并求出该公式的局部截断误差表达式及阶数.

9. (10 分) 给定初边值问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + \dfrac{\partial u(x,t)}{\partial x} + f(x,t), & 0 < x < 1,\ 0 < t < 1, \\ u(x,0) = \varphi(x),\ \dfrac{\partial u(x,0)}{\partial t} = \psi(x), & 0 < x < 1, \\ u(0,t) = \alpha(t),\ u(1,t) = \beta(t), & 0 \leqslant t \leqslant 1, \end{cases}$$

取正整数 M, N, 记 $h = 1/M, \tau = 1/N, x_i = ih\ (0 \leqslant i \leqslant M), t_k = k\tau\ (0 \leqslant k \leqslant N)$. 试构造求解上述初边值问题的一种显式差分格式, 要求截断误差为 $O(\tau^2 + h^2)$.

2008 年春季工学硕士研究生学位课程考试试题

1. 填空 (每题 4 分, 共 20 分)

   1) 设 $f(x,y)=\ln(x+y), x_1=1.35, y_1=0.650$ 分别表示 $\tilde{x},\tilde{y}$ 的近似值. 若 x_1, y_1 均为有效数, 则 $f(x_1,y_1)$ 的相对误差限为________.

   2) 求解线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的迭代格式 $\boldsymbol{x}^{(k+1)}=\boldsymbol{Bx}^{(k)}+\boldsymbol{f},\ k=0,1,\cdots$ 收敛的充分必要条件为________. 若 $\boldsymbol{A}$ 为严格对角占优矩阵, 则用 Jacobi 格式来求解该方程组时________ (一定收敛、一定不收敛、不一定收敛).

   3) 已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&3\\0&2\end{bmatrix}, \boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}-2\\3\end{bmatrix}$, 则 $\|\boldsymbol{Ax}\|_2=$____, $\mathrm{cond}(\boldsymbol{A})_\infty=$____.

   4) 设函数 $f(x)=2x^3-x+1$, 则 $f(x)$ 以 $x_0=-1, x_1=0, x_2=1, x_3=2$ 为插值节点的三次插值多项式为________, 相应的插值余项为________.

   5) 设函数 $f(x)\in C^3[x_0-h,x_0+h], h>0$, 则

$$f'(x_0)-\frac{1}{h}\left[f\left(x_0+\frac{h}{2}\right)-f\left(x_0-\frac{h}{2}\right)\right]=\_\_\_\_\_\_\_\_.$$

2. (10 分) 分析非线性方程 $f(x)=x^3-x-1=0$ 实根的分布情况, 并用迭代法求出该方程的全部实根, 精确至 3 位有效数.

3. (10 分) 应用列主元 Gauss 消去法求解下列线性方程组:

$$\begin{cases}x_1+2x_2-3x_3=-3,\\3x_1+5x_2-2x_3=4,\\2x_1-x_2+x_3=3.\end{cases}$$

4. (12 分) 设函数 $f(x)=\cos x$, 以 $x=0$ 为三重节点, $x=\pi/2$ 为单重节点作 $f(x)$ 的三次 Hermite 插值多项式, 并估计该插值多项式在 $[0,\pi/2]$ 上的误差.

5. (12 分) 求参数 a,b, 使 $\max\limits_{0\leqslant x\leqslant 1}|\mathrm{e}^x-ax-b|$ 达到最小.

6. (12 分) 已知函数 $f(x)\in C^2[a,b], I(f)=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

   1) 试写出求 $I(f)$ 的一点高斯公式 $I_0(f)=A_0f(x_0)$;

   2) 试求出截断误差 $I(f)-I_0(f)$ 形如 $\alpha f^{(m-1)}(\eta)(b-a)^m$ 的表达式;

   3) 取 $h=\dfrac{b-a}{n}, x_i=a+ih, 0\leqslant i\leqslant n$, 应用 1) 中给出的单点公式构造复化求积公式, 并给出该复化求积公式的误差表达式.

7. (12 分) 给定常微分方程初值问题

$$\begin{cases}y'=f(x,y), \quad a<x\leqslant b,\\y(a)=\eta,\end{cases}$$

取 $h=\dfrac{b-a}{n}$, n 为整数; $x_i=a+ih,\ 1\leqslant i\leqslant n$. 记

$$y_i\approx y(x_i),\ 1\leqslant i\leqslant n;\quad y_0=y(a).$$

1) 求参数 α, 使求解上述初值问题的数值求解公式

$$y_{i+1}=y_i+h\left[\alpha f(x_i,y_i)+(1-\alpha)f(x_{i-1},y_{i-1})\right]$$

局部截断误差阶达到最高, 并求出相应的局部截断误差表达式;

2) 应用 1) 中求得的公式与梯形公式构造预测 - 校正公式, 并指出该预测 - 校正公式是几步的.

8. (12 分) 对于定解问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial u}{\partial x}+xt, & 0<x<1,\ t>0,\\ u(x,0)=x(1-x), & 0<x<1,\\ u(0,t)=u(1,t)=0, & t\geqslant 0,\end{cases}$$

取正整数 M,N, 令

$$h=\frac{1}{M},\ x_i=ih,\ i=0,1,\cdots,M;\quad \tau=\frac{1}{N},\ t_k=k\tau,\ k=0,1,\cdots,N.$$

1) 给出求解该方程的一种显格式使其截断误差达到 $O(\tau+h^2)$, 给出截断误差表达式;

2) 取 $h=\tau=\dfrac{1}{4}$, 应用 1) 中给出的显式公式计算 $u\left(\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{2}\right)$ 的近似值.

2008 年秋季工学硕士研究生学位课程考试试题

1. 填空 (每题 3 分, 共 21 分)

   1) 为提高数值计算精度, 当近似值 $x \gg 1$ 时, 应将 $\sqrt{x+1}-\sqrt{x}$ 改写为______进行计算.

   2) 求方程 $x=f(x)$ 实根的 Newton 迭代格式是____________________.

   3) 设 $A=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 0 & 2\end{bmatrix}$, 则 $\mathrm{cond}(A)_2$=________________.

   4) 给定函数 $f(x)=x^5+1$, 则差商 $f[0,1,1,1]=$__________.

   5) 求积分 $I(f)=\int_{-1}^{1}f(x)\mathrm{d}x$ 近似值的梯形公式是________________.

   6) 求解初值问题

   $$\begin{cases} y'+\sin(x+y)=0, & 0\leqslant x\leqslant \pi,\\ y(0)=1 \end{cases}$$

   的后退 Euler 公式是____________________.

   7) 设 A 是实对称矩阵, 则求其主特征值及对应的特征向量的幂法 (归一化算法) 是______________________________.

2. (9 分) 给定方程 $\mathrm{e}^x=2-x$, 证明该方程存在唯一实根 x^*, 并用迭代法求 x^* 的近似值, 精确到 3 位有效数字.

3. (10 分) 用列主元 Gauss 消去法求解线性方程组

$$\begin{bmatrix}2 & 3 & -1\\ -1 & 1 & 2\\ -3 & 2 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5\\ 7\\ 10\end{bmatrix}.$$

4. (10 分) 给定线性方程组 $Ax=b$, 这里 $A\in\mathbf{R}^{n\times n}$ 为非奇异矩阵, $b\in\mathbf{R}^n$, $x\in\mathbf{R}^n$. 设有下面的迭代格式

$$x^{(k+1)}=x^{(k)}+\omega\left(b-Ax^{(k)}\right),\quad k=0,1,2,\cdots, \tag{A}$$

其中 $\omega\neq 0$ 为常数.

   1) 证明: 如果迭代格式 (A) 收敛, 则迭代序列 $\{x^{(k)}\}_{k=0}^{\infty}$ 收敛于方程 $Ax=b$ 的解;

   2) 设 $n=2$, $A=\begin{bmatrix}4 & 1\\ 1 & 4\end{bmatrix}$, 问 ω 取何值时迭代格式 (A) 收敛?

5. (10 分) 求一个函数 $p(x)$, 使之满足下面的三个条件:

1) $p(x) \in C^1[0,2]$;

2) $p(0) = f(0)$, $p(1) = f(1)$, $p(2) = f(2), p'(0) = f'(0)$;

3) $p(x)$ 在 $[0,1]$ 和 $[1,2]$ 上均为 2 次多项式.

6. (10 分) 求函数 $f(x) = \ln x$ 在区间 $[1,2]$ 上的 1 次最佳一致逼近多项式

$$p_1(x) = c_0 + c_1 x.$$

7. (10 分) 考虑积分 $I(f) = \int_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x$ 及对应的求积公式 $Q(f) = \dfrac{3}{4}f(0) + \dfrac{9}{4}f(2)$.

   1) 证明: 求积公式 $Q(f)$ 是以 $x_0 = 0, x_1 = 1, x_2 = 2$ 为求积节点的插值型求积公式;

   2) 求求积公式 $I(f) \approx Q(f)$ 的代数精度;

   3) 设 $f(x) \in C^3[0,3]$, 求截断误差 $I(f) - Q(f)$ 形如 $\alpha f^{(\beta)}(\xi)$ 的表达式, 其中 $\xi \in (0,3), \alpha, \beta$ 为常数.

8. (10 分) 给定常微分方程初值问题

$$\begin{cases} y' = f(x,y), & a \leqslant x \leqslant b, \\ y(a) = \eta, \end{cases}$$

取正整数 n, 记 $h = \dfrac{b-a}{n}, x_i = a + ih, y_i \approx y(x_i), 1 \leqslant i \leqslant n, y_0 = \eta$.

   1) 试应用数值积分公式导出求解上述初值问题的求解公式

$$\begin{cases} y_{i+1} = y_{i-1} + 2hf(x_i, y_i), & 0 \leqslant i \leqslant n-1, \\ y_0 = \eta. \end{cases} \tag{B}$$

   2) 推导出公式 (B) 的局部截断误差表达式, 并指出该公式是几步几阶公式.

9. (10 分) 给定边值问题

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial u}{\partial x} + u = f(x,y), & (x,y) \in \Omega, \\ u(x,y) = \varphi(x,y), & (x,y) \in \partial\Omega, \end{cases}$$

其中 $\Omega = \{(x,y) \mid 0 < x < 1,\ 0 < y < 1\}$, $\partial\Omega$ 是 Ω 的边界. 取正整数 M, 记 $h = 1/M, x_i = ih(0 \leqslant i \leqslant M), y_j = jh(0 \leqslant j \leqslant M)$. 假设上述问题存在光滑解, 试构造求解上述边值问题的一个差分格式, 要求截断误差为 $O(h^2)$, 并写出截断误差表达式.

2009 年春季工学硕士研究生学位课程考试试题

1. 填空 (每题 4 分, 共 20 分)

 1) 已知 $x=0.045, y=2.013$ 均为有效数, 则 $\sqrt[3]{x^2+y}$ 的相对误差限为________.

 2) 已知矩阵

$$A=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&3\end{bmatrix},\quad x=\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix},$$

 则 $\|Ax\|_1=$________, $\|A\|_2=$________.

 3) 设函数 $f(x)=2x^3-x+1$, 则 $f(x)$ 以 $x_0=-1, x_1=0, x_2=1$ 为插值节点的二次插值多项式为________.

 4) 设函数 $f(x)\in C^2[x_0-h, x_0+h], h>0$, 则

$$f(x_0)-\frac{1}{2}\left[f\left(x_0+\frac{h}{2}\right)+f\left(x_0-\frac{h}{2}\right)\right]=\text{________}.$$

 5) 求积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 的两点高斯公式为__________, 该公式的代数精度为____.

2. (8 分) 分析非线性方程 $\sin x=\dfrac{x}{2}$ 在 $(0,+\infty)$ 内实根的分布情况, 并用迭代法求出该方程在 $(0,+\infty)$ 内的全部实根, 精确至 3 位有效数字.

3. (10 分) 给定方程组 $Ax=b$, 其中 $A=\begin{bmatrix}1&\omega&\omega\\3\omega&1&0\\\omega&0&1\end{bmatrix}$, $x,b\in\mathbf{R}^3, \omega\in\mathbf{R}$. 试确定 ω 的取值范围, 使求解该方程组的 Jacobi 迭代格式和 Gauss-Seidel 迭代格式都收敛.

4. (10 分) 已知函数 $f(x)$ 在区间 $[x_0,x_2]$ 上有定义, 且 $x_1=\dfrac{x_0+x_2}{2}$. 试求函数 $f(x)$ 的三次插值多项式 $p(x)$, 使之满足 $p(x_0)=f(x_0), p'(x_1)=0, p''(x_1)=0, p(x_2)=f(x_2)$.

5. (10 分) 求函数 $f(x)=\dfrac{1}{1+x}$ 在 $[0,1]$ 上的一次最佳平方逼近多项式

$$p_1(x)=a+bx.$$

6. (12 分) 已知函数 $f(x)\in C^4[-a,a], I(f)=\int_{-a}^{a}f(x)\mathrm{d}x$.

 1) 试确定求积公式 $\tilde{I}(f)=A_0f(-a)+A_1f(0)+A_2f(a)$ 中的参数 A_0, A_1, A_2, 使 $\tilde{I}(f)$ 的代数精度达到最高, 并指出此时该求积公式的代数精度次数;

 2) 求 $I(f)-\tilde{I}(f)$ 形如 $\lambda f^{(m-1)}(\eta)a^m$ 的截断误差表达式.

7. (12 分) 给定常微分方程初值问题

$$\begin{cases} y' = f(x,y), & a < x \leqslant b, \\ y(a) = \eta, \end{cases}$$

取 $h = \dfrac{b-a}{n}$, n 为整数; $x_i = a + ih$, $1 \leqslant i \leqslant n$. 记 $y_i \approx y(x_i)$, $1 \leqslant i \leqslant n$; $y_0 = y(a)$.

1) 求参数 α, 使求解上述初值问题的数值求解公式

$$y_{i+1} = y_i + h\left[\alpha f(x_i, y_i) + (1-\alpha) f(x_{i+1}, y_{i+1})\right]$$

局部截断误差阶达到最高;

2) 应用 Euler 公式与 1) 中求得的公式构造预测 - 校正公式, 并求出该预测 - 校正公式的局部截断误差表达式.

8. (12 分) 对于定解问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u, & 0 < x < 2,\ t > 0, \\ u(x,0) = x(2-x), & 0 < x < 2, \\ u(0,t) = u(2,t) = 0, & t \geqslant 0, \end{cases}$$

取正整数 M, N, 令

$$h = \frac{2}{M},\ x_i = ih,\ i = 0, 1, \cdots, M;\quad \tau = \frac{1}{N},\ t_k = k\tau,\ k = 0, 1, \cdots, N.$$

1) 构造求解该初边值问题的隐式差分格式, 并给出其截断误差表达式;

2) 取 $h = \dfrac{1}{2}, \tau = \dfrac{1}{4}$, 应用 1) 中构造的求解公式计算 $u\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{4}\right)$, $u\left(1, \dfrac{1}{4}\right)$ 以及 $u\left(\dfrac{3}{2}, \dfrac{1}{4}\right)$ 的近似值.

9. (6 分) 已知 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in \mathbf{R}^{n\times n}$, 其中 $\boldsymbol{A}$ 非奇异, $\boldsymbol{B}$ 为奇异矩阵, 试证明:

$$\frac{\|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}\|}{\|\boldsymbol{A}\|} \geqslant \frac{1}{\mathrm{cond}(\boldsymbol{A})}.$$

2009 年秋季工学硕士研究生学位课程考试试题

1. 填空 (每题 3 分, 共 18 分)
   1) 设多项式 $f(x)=4x^4+6x^3+9x+1$, 则求 $f(x_0)$ 仅含有 4 次乘法运算的算法为__________.
   2) 已知实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的全部特征值是 3, 2, 1, 则 $\mathrm{cond}(\boldsymbol{A})_2=$__________.
   3) 设 $f(x)=x^3-3x+1$, 则 $f(x)$ 以 0, 1, 2 为插值节点的 2 次牛顿插值多项式为__________.
   4) 用 Simpson 公式计算 $\int_0^1 \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x$ 的近似值 (保留小数点后 3 位小数) 是 _____.
   5) 求解初值问题
   $$\begin{cases} y'=f(x,y), & a\leqslant x\leqslant b, \\ y(a)=\eta \end{cases}$$
   的改进的 Euler 公式是__________.
   6) 求解双曲型方程初边值问题的显格式稳定的条件是步长比 s__________, 该差分格式关于空间步长________阶收敛, 关于时间步长________阶收敛.
2. (10 分) 分析方程 $x^5-5x+1=0$ 有几个正根, 并用迭代法求此方程的最大正根, 精确到 4 位有效数字.
3. (10 分) 用列主元 Gauss 消去法求下面线性方程组的解:
$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 4 & -2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ -6 \end{bmatrix}.$$
4. (10 分) 设有求解线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的迭代格式
$$\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}^{(k+1)}+\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}^{(k)}=\boldsymbol{b}, \quad k=0,1,\cdots, \tag{A}$$
其中
$$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{C}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \xi & 0 & 0 \\ 2 & \eta & 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b}=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{x}^{(k)}=\begin{bmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \\ x_3^{(k)} \end{bmatrix},$$
试确定实参数 ξ 和 η 的取值范围, 使迭代格式 (A) 收敛.
5. (10 分) 设 $f\in C^4[a,a+2]$, 求一个 3 次多项式 $H(x)$, 使之满足
$$H(a)=f(a), \quad H(a+1)=f(a+1), \quad H(a+2)=f(a+2), \quad H'(a)=f'(a),$$
并写出插值余项 $f(x)-H(x)$ 的表达式.

6. (10 分) 用最小二乘法确定经验公式 $y = a + be^x$ 中的参数 a 和 b, 使该曲线拟合下面的数据:

x_i	-1	0	1	2
y_i	2	3	5	9

7. (12 分) 设 $f(x) \in C^2[a,b]$, $I(f) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, $h = (b-a)/n$, $x_k = a + kh$, $k = 0,1,\cdots,n$; $x_{k+\frac{1}{2}} = x_k + h/2$, $k = 0,1,\cdots,n-1$.

1) 写出计算积分 $I(f)$ 的一点 Gauss 公式 $G(f)$ 以及对应的复化求积公式 $G_n(f)$;

2) 设 $T_n(f)$ 是计算积分 $I(f)$ 的复化梯形公式, 求参数 α, 使得

$$T_{2n}(f) = \frac{1}{2}T_n(f) + \alpha G_n(f).$$

8. (10 分) 给定常微分方程初值问题

$$\begin{cases} y' = f(x,y), & a \leqslant x \leqslant b, \\ y(a) = \eta, \end{cases} \tag{B}$$

取正整数 n, 记 $h = (b-a)/n$, $x_i = a + ih$, $i = 0,1,2,\cdots,n$. 给定求初值问题 (B) 的多步方法:

$$y_{i+1} = -4y_i + 5y_{i-1} + h[\beta_1 f(x_i,y_i) + \beta_2 f(x_{i+1},y_{i+1})]. \tag{C}$$

1) 试确定公式 (C) 中的参数 β_1,β_2, 使求解公式具有尽可能高的阶数, 写出局部截断误差表达式并指出最高阶数;

2) 利用 Euler 公式和公式 (C) 构造一个预测 - 校正公式.

9. (10 分) 给定初边值问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t} - \dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = f(x,t), & a < x < b,\ 0 < t \leqslant T, \\ u(x,0) = \varphi(x), & a \leqslant x \leqslant b, \\ u(a,t) = \alpha(t),\ u(b,t) = \beta(t), & 0 \leqslant t \leqslant T, \end{cases}$$

其中 $\varphi(x),\alpha(t),\beta(t)$ 是光滑函数, 且满足相容性条件. 取正整数 M,N, 记 $h = (b-a)/M$, $\tau = T/N$, $x_i = a + ih\ (0 \leqslant i \leqslant M)$, $t_k = k\tau\ (0 \leqslant k \leqslant N)$.

1) 写出求上述定解问题的古典隐格式;

2) 设 $f(x,t) \equiv 0$, $\alpha(t) = \beta(t) \equiv 0$, $\{u_i^k | 0 \leqslant i \leqslant M, 0 \leqslant k \leqslant N\}$ 是古典隐格式的解, 记 $r = \tau/h^2$, $\|u^k\|_\infty = \max\limits_{0\leqslant i\leqslant M} |u_i^k|$, $k = 0,1,\cdots,N$. 证明: 对任意步长比 r, 有

$$\|u^k\|_\infty \leqslant \|u^0\|_\infty, \quad k = 1,2,\cdots,N.$$