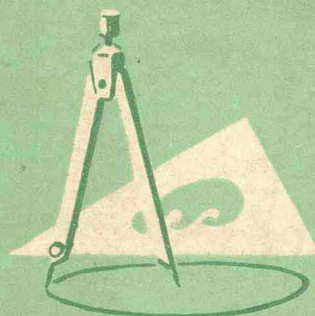
一九七七年全国各省市自治区高等学校招生

数学试题解答汇编



江苏省邳县文教局数学资料编写组

前　言

一九七七年全国高校招生已经胜利结束。这次高校招生制度的改革，极大地调动了广大师生和社会青年攀登科学文化高峰的社会主义积极性。为了适应这一大好形势的需要，我们委托运河师范、运河中学数学组汇编了这本书，供我县广大师生和社会青年参考。

本书的编写，着重于培养读者分析问题和解决问题的能力。因此，对某些问题仅示以解题关键或答案；对部分问题提出了多种解法。有的解法可能并不十分成熟，由于时间、水平以及条件的限制，错误与疵谬也在所难免，希望读者批评、指正。

本书在编写过程中，曾得到有关省、市、自治区一些兄弟学校的协助，在此一并表示感谢！

邳县文教局数学资料编写组

一九七八年元月

目　　录

一、北　京　市（理科）

注意事项：（1）可以不抄题，做题次序可以颠倒，但要写明题号；

（2）解答时，要写明主要步骤，结果必须明确；

（3）几何证明题，要写出已知，求证，画出图形，证明过程中要注明主要理由；

（4）画图可用铅笔。

一、（本题8分）解方程：$\sqrt{x-1}=3-x$。

解：两边平方得　$x-1=(3-x)^2$，

整理得　$x^2-7x+10=0$，

解之得　$x_1=2$，$x_2=5$，

检验知　$x_2=5$ 是增根，

∴原方程的根是 $x=2$。

二、（本题8分）计算：$2^{-\frac{1}{2}}+\frac{2^0}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}-1}$

解：原式 $=\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{\sqrt{2}+1}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}$

$=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}-\sqrt{2}-1$

$=-1$。

三、（本题8分）已知 $\lg 2=0.3010$，$\lg 3=0.4771$，求 $\lg\sqrt{45}$，

解：原式 $=\lg 45^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\lg(3^2\cdot\frac{10}{2})$

$$=\frac{1}{2}(2\lg 3+\lg 10-\lg 2)$$

$$=\frac{1}{2}(2\times 0.4771+1-0.3010)$$

$$=0.8266。$$

四、（本题8分）证明：$(1+\mathrm{tg}\,\alpha)^2=\dfrac{1+\sin 2\alpha}{\cos^2\alpha}$

证明：$(1+\mathrm{tg}\,\alpha)^2$

$$=(1+\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha})^2=\frac{(\cos\alpha+\sin\alpha)^2}{\cos^2\alpha}$$

$$=\frac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha}$$

$$=\frac{1+\sin 2\alpha}{\cos^2\alpha}$$

五、（本题8分）求过两直线 $x+y-7=0$ 和 $3x-y-1=0$ 的交点，并且过点(1，1)的直线的方程。

解：解方程组 $\begin{cases}x+y-7=0\\3x-y-1=0\end{cases}$ 得交点坐标(2，5)，

由两点式得直线方程 $\dfrac{y-5}{5-1}=\dfrac{x-2}{2-1}$，

即 $4x-y-3=0$。

六、（本题8分）某工厂今年七月份的产值为100万元，以后每月产值比上个月增加20%，问今年七月份到十月份的

总产值是多少？

解：∵每月比上一个月的产值都增加20%，

∴每月的产值成等比数列。

∵$a_1 = 100, q = 120\% = 1.2$， $n = 4$，

∴$s_4 = \frac{100(1.2^4 - 1)}{1.2 - 1} = 536.8$（万元），

答：今年七月份到十月份的总产值为536.8万元。

七、（本题13分）已知二次函数 $y = x^2 - 6x + 5$，（1）求出它的图象的顶点坐标和对称轴方程；（2）画出它的图象；（3）分别求出它的图象和x轴、y轴的交点坐标。

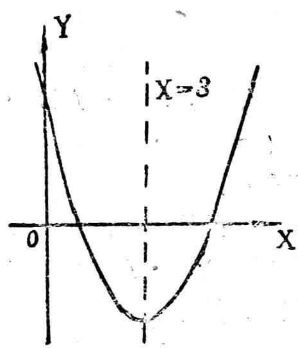
解：$y = x^2 - 6x + 5 = (x - 3)^2 - 4$。

（1）图象的顶点坐标是（3，－4），对称轴方程是 $x = 3$；

（2）

x	3	4	5	6	……
y	－4	－3	0	5	……

根据对称性描点画图



（3）令 $y = 0$

解 $x^2 - 6x + 5 = 0$

得$x_1 = 1$， $x_2 = 5$

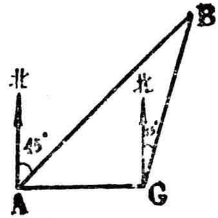
∴ 图象与x轴交点坐标是（1，0）和（5,0）。

令 $x = 0$，得 $y = 5$

∴ 图象与y轴交点的坐标是（0，5）。

八、（本题12分）一只船以20海里/小时的速度向正东航行。起初，船在A处看见一灯塔B在船的北45°东（即北偏东45°）方向；1小时后，船在C处看见这个灯塔在船的北15°东（即北偏东15°）方向，

求这时船和灯塔的距离CB。



解：如图，在△ABC中

$AC = 20 \times 1 = 20$（海里）

$\angle BAC = 45°$，

$\angle ACB = 105°$

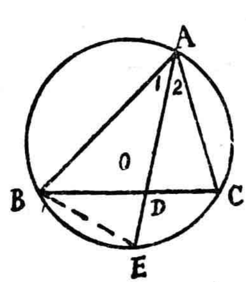
$\therefore \angle B = 30°$

由正弦定理得$\dfrac{CB}{\sin 45°} = \dfrac{20}{\sin 30°}$

$$\therefore CB = \frac{20 \times \frac{1}{2}\sqrt{2}}{\frac{1}{2}} = 20\sqrt{2}\text{（海里）}。$$

答：这时船和灯塔的距离CB为$20\sqrt{2}$海里。

九、（本题12分）有一个圆内接三角形ABC，∠A的平分线交BC于D，交外接圆于E。求证：AD·AE＝AC·AB。



已知：如图，⊙o是△ABC的外接圆，∠1＝∠2，

求证：AD·AE＝AC·AB

证明：连结BE，

在△ABE和△ADC中：

$\because \angle 1=\angle 2$（已知），

$\angle E=\angle C$（同弧上的圆周角相等），

$\therefore \triangle ABE \backsim \triangle ADC$（如果一个三角形的两个角与另一个三角形的两个角对应相等，那么这两个三角形相似），

$\therefore \dfrac{AB}{AD}=\dfrac{AE}{AC}$。

即　$AD \cdot AE = AC \cdot AB$。

十、（本题15分）当m取哪些值时，直线 $y=x+m$ 与椭圆 $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{9}=1$ 有一个交点？有两个交点？没有交点？当它们有一个交点时，画出它们的图形。

解：将 $y=x+m$ 代入 $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{9}=1$ 中，

整理得，$25x^2+32mx+(16m^2-144)=0$。

判别式 $\triangle=b^2-4ac=576(25-m^2)$

$\therefore$ 当 $\triangle=0$，即 $576(25-m^2)=0$ 时，

方程有两个相等的实根，直线和椭圆有一个交点，这时

解 $576(25-m^2)=0$ 得 $m=\pm 5$；

当 $\triangle>0$，即 $576(25-m^2)>0$ 时，

方程有两个不相等的实根，直线和椭圆有二个交点，这时，

解 $576(25-m^2)>0$ 得 $-5<m<5$；

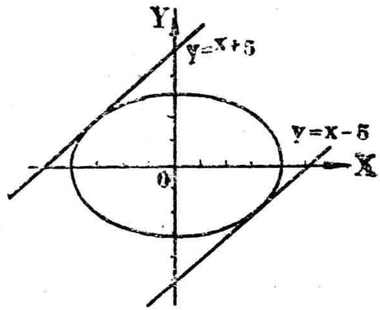
当 $\triangle<0$，即 $576(25-m^2)<0$ 时，

方程没有实根，直线和椭圆没有交点，这时，

解 $576(25-m^2)<0$ 得 $m>5$

或 $m<-5$.

当它们有一个交点时，图形如右.



参考题：（上面题目全部做完，并检查无误后，可以做参考题，也可以不做，参考题的分数不计入总分，不作为录取不录取的根据，只作为录取之后能否跳级的参考.）

Ⅰ.（1）求函数

$$f(x)=\begin{cases} x^2\sin\frac{\pi}{x} & (x\neq 0) \\ 0 & (x=0) \end{cases}$$

的导数.

（2）求椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 绕 x 轴旋转而成的旋转体的体积.

解：（1）当 $x\neq 0$ 时，$f'(x)=2x\sin\frac{\pi}{x}$

$$+x^2\cos\frac{\pi}{x}\cdot(-1)\pi\cdot\frac{1}{x^2}=2x\sin\frac{\pi}{x}-\pi\cos\frac{\pi}{x};$$

当 $x=0$ 时，∵ $f'_-(0)$、$f'_+(0)$ 不存在，

$\therefore f'(0)$不存在.

(2)由$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$　得$y^2=b^2-\frac{b^2}{a^2}x^2$

$$\therefore\quad V=\pi\int_{-a}^{a}y^2dx$$

$$=2\pi\int_0^a(b^2-\frac{b^2}{a^2}x^2)dx$$

$$=2\pi\cdot[b^2x-\frac{b^2}{3a^2}x^3]\Big|_0^a=\frac{4}{3}\pi ab^2$$

Ⅱ. (1)试用$\varepsilon-\delta$语言叙述“函数$f(x)$在点$x=x_0$处连续”的定义.

(2)试证明：若$f(x)$在点$x=x_0$处连续，且$f(x_0)>0$，则存在一个x_0的邻域$(x_0-\delta,x+\delta)$，在这个邻域内，处处有$f(x)>0$。

(1)解：如果对于每一个$\varepsilon>0$，都存在一个$\delta=\delta(\varepsilon,x_0)>0$，使得当$|x-x_0|<\delta$时，不等式$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$都成立，那么，我们说函数$f(x)$在点$x=x_0$处是连续的。

(2)证明：假定ε是任意一个小于$f(x_0)$的正数，

即$0<\varepsilon<f(x_0)$

$\because f(x)$在$x=x_0$处连续，

$\therefore$对于给定的$\varepsilon>0$，总存在一个

$\delta=\delta(\varepsilon,x_0)>0$，

使得当$|x-x_0|<\delta$，

即$x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$时

就有$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$，

即 $-\varepsilon<f(x)-f(x_0)<\varepsilon$.

$$\therefore\quad f(x)=f(x_0)+[f(x)-f(x_0)]$$
$$>f(x_0)-\varepsilon>0$$

这就是说当$x\in(x_0-\delta,\ x_0+\delta)$时，处处有$f(x)>0$。

北京市（文科）

一、（本题8分）计算：$3^0+3^{-1}-\left(1\frac{7}{9}\right)^{\frac{1}{2}}$

解：原式$=1+\frac{1}{3}-\frac{4}{3}=0$

二、（本题8分）化简：$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}$

解：原式$=\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}=\frac{(\sqrt{3}+1)^2}{3-1}=2+\sqrt{3}$．

三、（本题8分）解方程$\frac{1}{x-1}+1=\frac{4x-2}{x^2-1}$．

解：去分母得　$x+1+x^2-1=4x-2$，

整理得　$x^2-3x+2=0$，

解　得　$x_1=2$，$x_2=1$．

检验知　$x=2$是原方程的根，$x=1$是增根．

四、（本题8分）不查表，求$\sin 105°$的值．

解：$\sin 105°=\sin(60°+45°)$

$=\sin 60°\cos 45°+\cos 60°\sin 45°$

$=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$．

五、（本题8分）一个正三棱柱形的零件，它的高是10厘

米，底面边长为2厘米，求它的体积．

解：$V = S_{底} \cdot h = \frac{\sqrt{3}}{4} \times 2^2 \cdot 10 = 10\sqrt{3}$（厘米^3）．

答：这个正三棱柱形的零件体积为$10\sqrt{3}$厘米^3．

六、（本题8分）一条直线过点（1，－3）并且与直线 $2x + y - 5 = 0$ 平行，求这条直线的方程．

解：所求直线的斜率为 $k = -2$，

由点斜式得 $y + 3 = -2(x - 1)$，

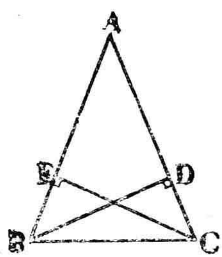
即所求直线方程为 $2x + y + 1 = 0$．

七、（本题12分）证明等腰三角形两腰上的高相等。

已知：如图，在△ABC中，

AB＝AC

BD⊥AC，CE⊥AB。



求证：BD＝CE

证明：在△ABC中，

∵ AB＝AC

∴ ∠ABC＝∠ACB

（等腰三角形的两个底角相等）

在Rt△BCE和Rt△CBD中，

BC＝CB

又∠CBE＝∠BCD

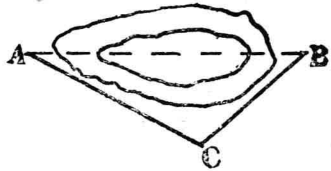
∴ △BCE≌△CBD（有一锐角和一斜边对应相等的两直角三角形全等）

∴ BD＝CE（全等三角形的对应边相等）

八、（本题12分）为了测湖岸边A、B两点间的距离，选择一点C，测得CA＝50米，CB＝30米，

$\angle ACB=120^\circ$. 求AB.

解：如图，在△ABC中，



$AC=50m$,

$BC=30m$

$\angle ACB=120^\circ$,

由余弦定理得

$$AB^2=50^2+30^2-2\times50\times30\cos120^\circ$$

$$=2500+900+1500=4900$$

$\therefore\ AB=70\ (m)$

答：A、B两点间距离为70米。

九、（本题12分）在2和30中间插入两个正数，这两个数插入后，使前三个数成等比数列，后三个数成等差数列，求插入的这两个正数.

解：设插入的两正数为x、y，

按题意得 $\begin{cases}x^2=2y\\2y=x+30\end{cases}$

解　得 $\begin{cases}x_1=6\\y_1=18\end{cases}$，　$\begin{cases}x_2=-5\\y_2=\dfrac{25}{2}\end{cases}$ （舍去）

$\therefore$ 插入的两正数分别为6和18.

十、（本题16分）已知二次函数 $y=x^2-4x+3$

（1）求出它的图象的顶点坐标和对称轴方程；

（2）画出它的图象；

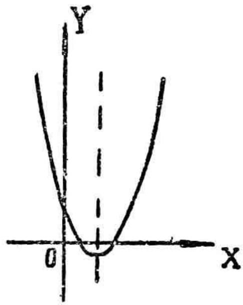
（3）求出它的图象与直线 $y=x-3$ 的交点坐标.

解：$y=x^2-4x+3=(x-2)^2-1$

(1)图象的顶点坐标为$(2,-1)$对称轴方程是 $x=2$，

(2)列表

x	2	3	4	5	……
y	-1	0	3	8	……



根据对称性画图象如右.

(3)解方程组 $\begin{cases} y = x^2 - 4x + 3 \\ y = x - 3 \end{cases}$

得 $\begin{cases} x_1 = 2 \\ y_1 = -1 \end{cases}$ $\begin{cases} x_2 = 3 \\ y_2 = 0 \end{cases}$

∴ 所求交点坐标为$(2, -1)$和$(3, 0)$.

二、上海市（理科）

一、1.化简：$\left(\frac{a}{a+b}-\frac{a^2}{a^2+2ab+b^2}\right)$

$\div\left(\frac{a}{a+b}-\frac{a^2}{a^2-b^2}\right)$ （5分）

解：原式 $=\frac{a(a+b)-a^2}{(a+b)^2}\div\frac{a(a-b)-a^2}{a^2-b^2}$

$=\frac{ab}{(a+b)^2}\times\frac{a^2-b^2}{-ab}=\frac{b-a}{a+b}$

2.计算：$\frac{1}{2}\lg25+\lg2-\lg\sqrt{0.1}-\log_2 9\times\log_3 2$ （5分）

解：原式 $=\lg5+\lg2-\frac{1}{2}\lg0.1-\frac{2\lg3}{\lg2}\times\frac{\lg2}{\lg3}$

$=\lg(5\times2)-\frac{1}{2}\times(-1)-2$

$=1+\frac{1}{2}-2$

$=-\frac{1}{2}$

3.$\sqrt{-1}$ 记作 i，验算 i 是不是方程 $2x^4+3x^3-3x^2+3x-5=0$ 的解？ （3分）

解：∵ $i=\sqrt{-1}$，∴ $i^2=-1$，$i^3=-i$，$i^4=1$

代入方程左边得