青少年文化素养丛书

知识交汇处的

向量问题研究

师广智◎编 著

ZHISHI
JIAOHUICHU DE
XIANGLIANG WENTI YANJIU

北京师范大学出版集团
BEIJING NORMAL UNIVERSITY PUBLISHING GROUP
北京师范大学出版社

青少年文化素养丛书

知识交汇处的
向量问题研究

师广智◎编 著

ZHISHI
JIAOHUICHU DE
XIANGLIANG WENTI YANJIU

北京师范大学出版集团
BEIJING NORMAL UNIVERSITY PUBLISHING GROUP
北京师范大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

知识交汇处的向量问题研究／师广智编著．—北京：北京师范大学出版社，2012.10
（青少年文化素养丛书）
ISBN 978-7-303-14780-9

Ⅰ．①知　Ⅱ．①师　Ⅲ．①向量－高中－教学参考资料　Ⅳ．①G634.633

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2012）第 129498 号

营销中心电话　010-58802181 58805532
北师大出版社高等教育分社网　http //gaojiao bnup com cn
电子信箱　beishida168@126 com

出版发行：北京师范大学出版社 www.bnup.com.cn
北京新街口外大街 19 号
邮政编码：100875
印　　刷：北京中印联印务有限公司
经　　销：全国新华书店
开　　本：170 mm × 230 mm
印　　张：16
字　　数：280 千字
版　　次：2012 年 10 月第 1 版
印　　次：2012 年 10 月第 1 次印刷
定　　价：25.00 元

策划编辑：岳昌庆　　责任编辑：岳昌庆　王庆涛
美术编辑：毛　佳　　装帧设计：毛　佳　刘松弢
责任校对：李　菡　　责任印制：李　啸

序

张景中

向量进入中学教材，在中学数学的教学与学习中注入一股新流．向量源于现实中的物理和几何问题，借用了代数运算的形式，其基本运算中运用了三角函数，并且可以用坐标来表示，于是它天然地和中学数学中的几何、代数、三角以及解析几何等有密切的联系，成为一个重要的知识交汇的枢纽．

学数学要做题．向量和多种知识相关联，自然会产生多种新的题型和新的解题方法和技巧．师广智先生不辞辛苦，对向量的基本知识和有关数学思想方法，以及近年来出现的有关向量的问题和解答进行分类点评和梳理整合，编著成书，这对数学教师和学生学习向量知识和掌握向量解题方法必将大有帮助．

师广智先生主持过“数学思维训练与左、右脑协调”课题的研究．他认为学习向量不仅是掌握重要的知识点和重要的解题工具，更是培养中学生左、右脑协调发展的有效途径．这是很有见地的．

学数学贵在思考．左、右脑是在反复的、有效地思考活动中协同发展的．有效地思考要有素材，也要有方法．本书中提供了丰富的、优良的素材，学习本书更需要适当的方法．一般说来，读者可以从书中学到有关向量的丰富的题型、方法和技巧；但若善于思考，就能收获更大、更多．

善于思考的学习者，常能做到“**温故思新，顾此思彼，形神兼备，举一反三**”．下面从书中随手拈取几个例子说明在学习中思考的方法．例题的序号及图序和书中一致．下面 3 个例子出自第一章．

例 1 在平面直角坐标系 xOy 中，已知点 $A(0,1)$ 和点 $B(-3,4)$，若点 C 在 $\angle AOB$ 的平分线上，且 $|\overrightarrow{OC}|=2$，则 $\overrightarrow{OC}=$____．

最好先不看解答，自己先思考．想不出来再看解答，也不要一气看完，看到能够启发出自己思路时自己接着想，这样对问题和题解的认识就深刻得多．实在找不到思路，把书上的解答看过后，自己要拿笔写一遍．不仅写一遍，还要当一当事后的诸葛亮，想想能否由书上的题解发展出自己的解法．这是看解题参考书的有效方法．

具体到这个题，除了书上的方法，还能思考什么呢？

题目中的坐标和向量是新知识，关键的角平分线是很早学过的. **温故思新**，回忆一下学过的与角平分线相关的知识是什么？很容易想到菱形的内角平分线是对角线. 想到这里，下面的解法就顺理成章了.

如图 0-1，因为 $OB=5$，作点 $E=(0,5)$，根据向量相加的平行四边形法则，

$$\overrightarrow{OB}+5\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OP}=(-3,9),$$

OP 是 $\angle AOB$ 的平分线. 故

$$\overrightarrow{OC}=\frac{2\overrightarrow{OP}}{|\overrightarrow{OP}|}=\left(\frac{-\sqrt{10}}{5},\frac{3\sqrt{10}}{5}\right).$$

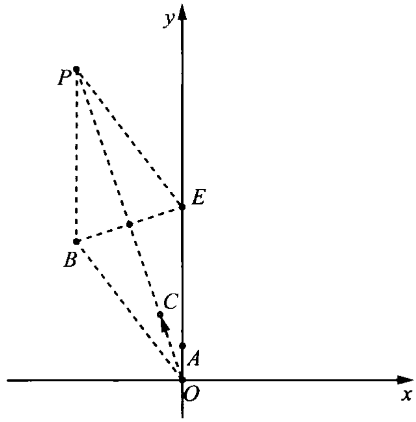

图 0-1

原理和书上的方法一致，但减少了计算量.

书上强调了用单位向量，但你可以想如果不用单位向量呢？这就是**顾此思彼**的求异思维. 用两个单位向量是为了构造一个菱形，用两个长度相等的单位向量同样可以构造出菱形. 把长的变短或短的变长可以达到同样目的，而后者减少了分数计算. 考试的时候减少分数计算，可以节省时间，减少错误概率.

再看下面两个题. 两个题本质相通，前一个是具体数据，后一个是更一般的情形.

例 2 若 $0<\theta<\frac{\pi}{2}$，且 $3\sin\theta+4\cos\theta=5$，求 $\tan\theta$.

例 3 若 a，$b\in\mathbf{R}$，且 $a\sqrt{1-b^2}+b\sqrt{1-a^2}=1$，求证：$a^2+b^2=1$.

书中利用向量内积与长度的关系，漂亮地解决了问题. 但这巧妙方法的背后是什么道理？这问题看来好像与向量无关，不用向量如何解决？前面提出思考问题要**“形神兼备”**，既要看推演形式也要看精神实质. 问题会做了，想想有没有更基本的做法？

“温故思新，顾此思彼”，知识的回溯与关联是思考数学问题的要诀. 向量内积用到三角，用三角能不能解决问题？

在例 2 中，所给等式可以写成 $\frac{3}{5}\sin\theta+\frac{4}{5}\cos\theta=1$，设 $\frac{3}{5}=\sin\alpha$，则立刻得到 $\cos\alpha=\frac{4}{5}$，于是 $\sin\alpha\sin\theta+\cos\alpha\cos\theta=1$，即 $\cos(\alpha-\theta)=1$ 从而 $\alpha-\theta=0$，也就是 $\alpha=\theta$，自然推出 $\tan\theta=\tan\alpha=\frac{3}{4}$.

类似地，在例 3 中设 $\sin\alpha=a$，$\sin\beta=b$，则容易看出 $\cos\alpha=\sqrt{1-a^2}$ 和

$\cos\beta=\sqrt{1-b^2}$. 所给等式可以写成 $\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha=1$，可见 $\sin(\alpha+\beta)=1$ 即 $\alpha+\beta=90°$，于是 $\cos\alpha=\sin\beta=b$，这推出 $a^2+b^2=1$.

这种方法从向量回到了三角. 能不能再基本一些，少用一些三角？

例 3 表面上仅仅是一个代数问题，试试只用代数如何？

在代数恒等式 $(a^2+A^2)(b^2+B^2)=(aB+bA)^2+(ab-AB)^2$ 中取 $A=\sqrt{1-a^2}$ 和 $B=\sqrt{1-b^2}$，注意条件有 $a^2+A^2=b^2+B^2=aB+bA=1$，所以

$$1=1+(ab-AB)^2,$$

得到 $ab=AB$ 后，两端平方化简即得 $a^2+b^2=1$. 干净利落！

同样手段处理例 2，取 $a=3$，$A=4$，$B=\sin\theta$，$b=\cos\theta$，注意条件有 $a^2+A^2=(aB+bA)^2=25$ 和 $b^2+B^2=1$，即有 $25=25+(ab-AB)^2$，得到 $ab=AB$ 后，立刻推出 $\tan\theta=\dfrac{B}{b}=\dfrac{a}{A}=\dfrac{3}{4}$.

这样思考，透过向量、三角的表象发现了问题的代数本质.

代数恒等式 $(a^2+A^2)(b^2+B^2)=(aB+bA)^2+(ab-AB)^2$ 是对平面向量数量积大小估计的通式，用处极多. 且看书中第四章的 4 个问题及第一章的例 15.

例 4 已知 m，n，x，$y\in\mathbf{R}$，且 $m^2+n^2=a$，$x^2+y^2=b$，求 $mx+ny$ 的最大值.

分别取恒等式中的 a，A，b，B 为 m，n，y，x，代入得到 $ab=(mx+ny)^2+(my-nx)^2$，可见所求最大值为 $\sqrt{ab}$.

例 5 设 $t=\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}$，求 t 的取值范围.

分别取恒等式中的 a，A，b，B 为 1，1，$\sqrt{1+x}$，$\sqrt{1-x}$，代入得到

$$4=(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})^2+(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x})^2,$$

可见 $2\leqslant(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})^2\leqslant4$，即 $\sqrt{2}\leqslant t\leqslant2$.

例 9 求证：$(ac+bd)^2\leqslant(a^2+b^2)(c^2+d^2)$.

分别取恒等式中的 a，A，b，B 为 a，b，d，c，代入得到

$$(a^2+b^2)(c^2+d^2)=(ac+bd)^2+(ad-bc)^2,$$

即得所要不等式.

例 10 设 $x>0$，$y>0$，$x+y=1$，求证：$(x+2)^2+(y+2)^2\geqslant\dfrac{25}{2}$.

分别取恒等式中的 a，A，b，B 为 1，1，$x+2$，$y+2$，代入得到

$$2[(x+2)^2+(y+2)^2]=(x+y+4)^2+(x-y)^2=25+(x-y)^2,$$

立刻得到 $$(x+2)^2+(y+2)^2\geqslant\frac{25}{2}.$$

例 15 若 a，$b\in\mathbf{R}^+$，$a+b=1$，求证$\sqrt{a+\frac{1}{2}}+\sqrt{b+\frac{1}{2}}\leqslant 2$.

分别取恒等式中的 a，A，b，B 为 1，1，$\sqrt{a+\frac{1}{2}}$，$\sqrt{b+\frac{1}{2}}$，代入得到

$$2(a+b+1)=\left(\sqrt{a+\frac{1}{2}}+\sqrt{b+\frac{1}{2}}\right)^2+\left(\sqrt{a+\frac{1}{2}}-\sqrt{b+\frac{1}{2}}\right)^2,$$

由 $a+b=1$ 得 $4\geqslant\left(\sqrt{a+\frac{1}{2}}+\sqrt{b+\frac{1}{2}}\right)^2$，即推出所要不等式.

这样总结出书中多个题目的共性，有利于记忆梳理，做到了**举一反三**．在书中可以用这个恒等式处理的问题还有不少，读者可留心分析.

“顾此思彼”，把知识联系起来的好处，例子很多.

例如，涉及直线交点分线段成比例的几何问题是常常遇到的．书中对这类问题给予很大关注．处理这类问题的工具主要是共线条件和定比分点公式．书中在第一章 5.3 中总结出一个推论：

设$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{c}$，则 A，B，C 三点共线的充要条件是存在实数 λ_1，λ_2，使得 $\boldsymbol{c}=\lambda_1\boldsymbol{a}+\lambda_2\boldsymbol{b}$，且 $\lambda_1+\lambda_2=1$.

在第一章 7.3 中又有

设 $P_1(x_1, y_1)$，$P_2(x_2, y_2)$，$P(x, y)$分有向线段$\overrightarrow{P_1P_2}$所成的比为 λ，即$\overrightarrow{P_1P}=\lambda\overrightarrow{PP_2}$时，则分点 P 的向量式为$\overrightarrow{OP}=\dfrac{\overrightarrow{OP_1}+\lambda\overrightarrow{OP_2}}{1+\lambda}\left(\text{或 } \boldsymbol{p}=\dfrac{\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}}{1+\lambda}\right)$

仔细观察思考，两个地方说的本来是同一件事，可以合并成一条命题：

若 A，B，C 三点共线，则有满足条件 $x+y=z$ 的三个不全为零的实数 x，y，z 使得对任一点 O 有 $x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}=z\overrightarrow{OC}$；

反过来，

若有一点 O 和满足条件 $x+y=z$ 的三个不全为零的实数 x，y，z 使得 $x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}=z\overrightarrow{OC}$，则 A，B，C 三点共线；且此时有 $x\overrightarrow{AC}=y\overrightarrow{CB}$，$y\overrightarrow{AB}=z\overrightarrow{AC}$和 $x\overrightarrow{BA}=z\overrightarrow{BC}$，

可见实数 x，y，z 的两两比值是唯一确定的．

有了这样的向量等式真好，既能判断共线，又能确定线段分比．但是不是很容易得到这样的向量等式呢？

书中第一章 2.3 有这么一段：

根据平面向量基本定理，可以得到如下结论：如果$\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$是同一平面内的两个不共线向量，那么，对于平面内的任一向量$\overrightarrow{OC}$，有且只有一对实数 λ，μ，使$\overrightarrow{OC}=\lambda\overrightarrow{OA}+\mu\overrightarrow{OB}$.

可见类似的向量等式$\lambda\overrightarrow{OA}+\mu\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OC}$总是有的，但系数可不一定满足条件$\lambda+\mu=1$. 也就是说$A$，$B$，$C$不一定共线．但我们可以调整一个向量的大小使这个条件满足，这只要设$\overrightarrow{OC}=(\lambda+\mu)\overrightarrow{OD}$，便得$\lambda\overrightarrow{OA}+\mu\overrightarrow{OB}=(\lambda+\mu)\overrightarrow{OD}$. 这时$D$在直线$OC$上，又在直线$AB$上，即它是直线$OC$与$AB$的交点；它也是线段$AB$上的定比分点，使$\frac{\overrightarrow{AD}}{\overrightarrow{DB}}=\frac{\mu}{\lambda}$，几个点的位置变化如图 0-2，图 0-3 所示．

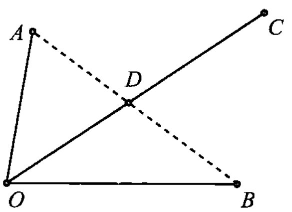

图 0-2

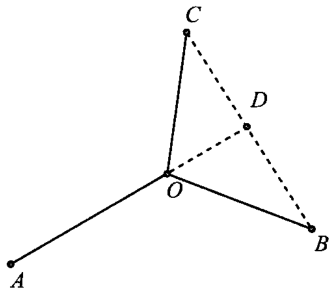

图 0-3

于是，对于一般的向量等式$\lambda\overrightarrow{OA}+\mu\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OC}$，我们发现了其中系数的几何意义，有了更直观的、也更细致的解读：

若$\lambda\overrightarrow{OA}+\mu\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OC}$，而$D$为直线$AB$与$OC$交点，则

$$\frac{\overrightarrow{AD}}{\overrightarrow{DB}}=\frac{\mu}{\lambda}\quad 且\quad \frac{\overrightarrow{OC}}{\overrightarrow{OD}}=\lambda+\mu.$$

不妨称这个规律为“向量分解的线段比公式”，简称线段比公式．

这样“**顾此思彼**”，把书中相关的知识点联系整合起来，可以得到非常方便有力的解题工具．

书中第一章 7.3 的例 35 用向量方法证明三角形三中线交于一点，这是一个典型的问题，见于多种资料．

例 35　证明三角形的三条中线交于一点，并且该点到顶点的距离与到相应中点的距离之比为 2∶1.

如图，G是$\triangle ABC$中线AD和BF的交点，F是AB中点．容易求出$\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{BD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$，于是由线段比公式易知$\overrightarrow{AG}=2\overrightarrow{GD}$和$\overrightarrow{BG}=2\overrightarrow{GE}$. 再由$\overrightarrow{BC}+2\overrightarrow{BF}=2\overrightarrow{BE}=3\overrightarrow{BG}$和$1+2=3$得知$G$在$CF$上，即三条中线交于一点．

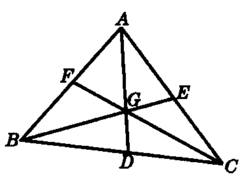

图 1-11

这条定理的证明很难更简单了.

下面两题取自书中第 3 章.

例 5 已知点 O 在 $\triangle ABC$ 的内部，且有 $\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}+4\overrightarrow{OC}=\mathbf{0}$，则 $\triangle OAB$ 与 $\triangle OBC$ 的面积之比为____.

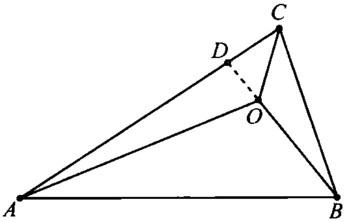

图 0-4

如图 0-4，延长 BO 交 AC 于 D，则 $\triangle OAB$ 与 $\triangle OBC$ 面积比等于 $\frac{AD}{DC}$.

根据条件 $\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}+4\overrightarrow{OC}=\mathbf{0}$ 得 $\overrightarrow{OB}=-\frac{\overrightarrow{OA}}{2}-2\overrightarrow{OC}$，由线段比公式得到 $\frac{AD}{DC}=4$，即 $\triangle OAB$ 与 $\triangle OBC$ 面积比等于 4.

例 11 如图 3-9，设 AM 是 $\triangle ABC$ 的边 BC 上的中线. 任作一直线，使之顺次交 AB，AC，AM 于点 P，Q，N.

求证：$\frac{AB}{AP}$，$\frac{AM}{AN}$，$\frac{AC}{AQ}$ 成等差数列.

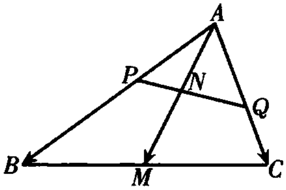

图 3-9

因 M 是 AB 中点，故 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AM}$，设 $\overrightarrow{AB}=m\overrightarrow{AP}$，$\overrightarrow{AM}=t\overrightarrow{AN}$，$\overrightarrow{AC}=n\overrightarrow{AQ}$，代入得到 $m\overrightarrow{AP}+n\overrightarrow{AQ}=2t\overrightarrow{AN}$. 由 P，Q，N 共线得 $m+n=2t$，即所欲证.

用了这个方法可以对付大量的问题，读者不妨留心尝试.

这样在思考中读书，就能在学习中发现属于自己的东西，就能读出心得，读出乐趣，读出创新，读出成就感. 本书包含了非常丰富的宝藏，只有深入思考才能把这些宝贝真正变成自己的财富. 题目很多，你可能没有时间每个题目都这样深入挖掘，也不必对每个题目都这样深入挖掘. 只要在每小节选一个题目想多一些，想出不同的解法，就能举一反三，一通百通.

书中还专门用几章篇幅来阐述向量涉及的数学思想，点出向量解题中容易出现的错误漏洞，评述探讨了与向量有关的命题策略，这些内容对学生和教师都会有所启发帮助.

师广智先生盛情相邀为本书作序，希望谈谈学习方法. 在浏览了书稿后，颇有收获，信笔写了这些；不当之处，欢迎指正.

2012 年 6 月 18 日

作者的话

由于在编辑部工作的原因，我接触了许多学生、教师、专家学者，还主持过“数学思维训练与左、右脑协调”课题的研究工作．基于课题的研究成果，结合左、右脑协调发展的相关理论，我编写了《知识交汇处的向量问题研究》这本书供大家参考．

在这里我想要说的有两点，一是通过数学思维训练促进左、右脑协调发展，对中学生来说至关重要，对左、右脑协调发展研究应引起广大教师的重视；二是通过本书的编写，我发现向量不仅是高中数学的一个重要知识点，是解决高中数学问题的一种重要工具，更是培养中学生左、右脑协调发展的有效途径．

1. 我们知道人在创造性思维活动中离不开左、右脑协调操作，一切人类重大科研成果都是左、右脑协调活动的产物．这已被人类的思维史，特别是科学发展史所检验．思维科学这一发现已引起人们的重视，更引起了我国基础教育界专家学者的重视．如何把这一成果应用于数学教育，从小培养左、右脑协同活动的习惯和能力，正方兴未艾，值得我们去探索．

当前，我国基础教育改革正由应试教育向素质教育转变，在这一巨大的变革过程中，有人往往把数学思维训练认为是加重学生课业负担，我觉得这是非常片面的．其实，思维训练作为各学科的基础，其重要性是不言而喻的．在新颁布的教学大纲中也突出强调了思维训练的重要性．但据我们调查，在教学实际过程中，许多教师只讲认知，不讲意向，只注重思维训练而忽视非智力因素的培养，只让学生多做些题而不讲究思想方法的渗透，这样就割裂了学生心理活动的整体性，破坏了学生心理活动的整体效应，因而也就很难达到左、右脑协调发展的训练目的．中国管理科学研究院思维科学研究所陈振宣先生在《强化左、右脑协调训练的若干切入点》一文中说，数学思维训练的切入口，一是构建数学概念、原理的实际模型；二是加强数学语言形态的转化互译；三是注重定理、公式的内涵与外形特征的统一意象的构建；四是思维方法的概括与运用；五是数学文化的陶冶；六是师生情感交流是左右脑协调研究不可忽视的一个侧面；七是研究性课题；八是应用课题；九是改进学法，形成良好的学习习惯．陈振宣先生所说的这几个方面都直接或间接地与左右脑协调训练有关．有目的地进行数学思维训练，不但能“以少御多”，减轻学生课业负担，而且还能

促进学生左、右脑协调发展，提高学生素质.

2. 科学实验证实，左脑管逻辑思维，右脑主宰形象思维. 基于此理论，我们提出了在数学思维训练过程中要加强对学生进行数形结合能力的培养. 我国著名数学大师华罗庚曾概括说："数与形，本是相倚依，焉能分作两边飞. 数缺形时少直觉，形少数时难入微. 数形结合百般好，割裂分家万事非. 切莫忘，几何代数统一体，永远联系，切莫分离."华罗庚先生这一概括不但具有巨大的方法论意义，而且给我们指出了左、右脑协调训练的广阔前景，这些富有哲理的话必将为人类智慧的开发产生巨大的作用. 而向量具有代数与几何形式的双重身份，它有着极其丰富的实际背景，对促进学生左、右脑协调发展具有十分重要的作用. 新课程中引入向量知识是脑科学研究重要成果在中学数学教材中的重要体现，具有十分重要的研究价值.

虽然向量是高中数学的新增内容，但作为现代数学主要目标之一的向量引入中学数学以后，给中学数学带来了无限生机. 因为它是衔接代数、几何与三角的纽带，把向量和向量法穿插、渗透和融合到其他章节中，也已成为数学试题中的一道亮丽的风景. 它是沟通"数"与"形"的典范，涉及向量的命题已成为热点. 所以有必要对向量进行专题研究，在知识的交汇处寻找高考的战机.

作为中学数学的一个解题工具，用向量证明几何中有关平行、共线和垂直的命题，用向量计算角度和距离，用向量表示点的轨迹，以及用向量处理三角恒等变形，证明不等式，求解函数的最值，较之传统方法更为简捷.

作为中学数学的一个知识交汇点，向量与三角函数、解析几何、数列、不等式的综合题已成为各类考试中考查的一个新热点，向量中蕴涵的数学思想方法更是数学问题解决的灵魂，在知识交汇处设计问题是这几年高考命题的创新主体.

本书对向量相关知识进行了梳理与整合，对高考动态给予了渗透与引申，对向量的考评价值进行了充分挖掘与提升. 可以说这本书是提高数学解题能力的一把金钥匙，是培养学生左、右脑协调发展的一次有益尝试，为同学们备战高考提供了一种新理念，为同学们全面提升自身素质找到了一种新途径. 由于自己学识水平有限，研究成果还比较浮浅，书中肯定会有许多不足之处，敬请各位读者批评指正.

本书的出版得到了北京师范大学出版社的大力支持和郑州大学数学系罗来兴教授的多方指导，在此深表感谢.

师广智

2012 年 3 月 20 日

目　录

第一章　平面向量基础知识例说

平面向量是高中数学的新增内容，作为现代数学主要目标之一的向量引入中学数学以后，给中学数学带来无限生机．因为它是衔接代数、几何与三角的纽带，把向量和向量法穿插、渗透和融合到其他章节中，已成为数学试题中的一道亮丽的风景．它是沟通“数”与“形”的典范，涉及平面向量的命题已成为热点．

第一节　基础知识梳理

1.1　平面向量的定理及相关性质

(1)两个非零向量平行的充要条件：$\boldsymbol{a}//\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}(\lambda\in\mathbf{R})$；

设 $\boldsymbol{a}=(x_1,\ y_1)$，$\boldsymbol{b}=(x_2,\ y_2)$，则 $\boldsymbol{a}//\boldsymbol{b}\Leftrightarrow x_1y_2-x_2y_1=0$.

(2)两个非零向量垂直的充要条件：$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$；

设 $\boldsymbol{a}=(x_1,\ y_1)$，$\boldsymbol{b}=(x_2,\ y_2)$，则 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\Leftrightarrow x_1x_2+y_1y_2=0$.

(3)平面向量基本定理：如果有 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$ 是同一平面内的两个不共线向量，那么对于这一平面内的任一向量 $\boldsymbol{a}$，有且只有一对实数 λ_1，λ_2，使 $\boldsymbol{a}=\lambda_1\boldsymbol{e}_1+\lambda_2\boldsymbol{e}_2$.

(4)三点共线定理：平面上三点 A，B，C 共线的充要条件是：存在实数 α，β，使$\overrightarrow{OA}=\alpha\overrightarrow{OB}+\beta\overrightarrow{OC}$，其中 $\alpha+\beta=1$，O 为平面内的任一点.

1.2　常用公式及结论

(1)向量模的公式：设 $\boldsymbol{a}=(x,\ y)$，则 $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{x^2+y^2}$.

(2)两点间的距离公式：设平面内两点 $P_1(x_1,\ y_1)$，$P_2(x_2,\ y_2)$，则 P_1，P_2 两点间的距离为：$|\overrightarrow{P_1P_2}|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$.

(3)线段的定比分点坐标公式：$\begin{cases}x=\dfrac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\\ y=\dfrac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}.\end{cases}$

其中，$P_1(x_1,\ y_1)$，$P_2(x_2,\ y_2)$，$P(x,\ y)$，$\overrightarrow{P_1P}=\lambda\overrightarrow{PP_2}$.

(4)中点坐标公式：$\begin{cases} x_0=\dfrac{x_1+x_2}{2}, \\ y_0=\dfrac{y_1+y_2}{2} \end{cases}$ 或$\overrightarrow{OM}=\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})$.

其中，$M(x_0, y_0)$是线段 AB 中点.

(5)两向量的夹角公式：

$$\cos\theta=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2}}.$$

其中，$0°\leqslant\theta\leqslant180°$，$\boldsymbol{a}=(x_1, y_1)$，$\boldsymbol{b}=(x_2, y_2)$.

(6)图形平移公式：若点 $P(x, y)$按向量 $\boldsymbol{a}=(h, k)$平移至 $P'(x', y')$，则

$$\begin{cases} x'=x+h, \\ y'=y+k. \end{cases}$$

(7)有关向量模的常用结论：

$|\boldsymbol{a}|^2=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}$.

$|\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b}|^2=(\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b})^2=|\boldsymbol{a}|^2\pm2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+|\boldsymbol{b}|^2$.

$|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|$，$||\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}||\leqslant|\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$.

1.3 单位向量的解题功能

我们知道，模为 1 的向量叫做单位向量. 高考对单位向量的考查应引起我们的重视. 尤其在三角形中，若能很好地利用单位向量解题，有时能达到事半功倍的效果.

例 1 在平面直角坐标系 xOy 中，已知点 $A(0, 1)$和点 $B(-3, 4)$，若点 C 在$\angle AOB$ 的平分线上，且$|\overrightarrow{OC}|=2$，则$\overrightarrow{OC}=$____.

解 如图 1-1 所示，在向量$\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$方向上分别取单位向量$\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$，则$\boldsymbol{e}_1=\dfrac{\overrightarrow{OA}}{|\overrightarrow{OA}|}$，$\boldsymbol{e}_2=\dfrac{\overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OB}|}$，于是

$$\overrightarrow{OC}=\lambda\overrightarrow{OD}=\lambda(\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2)=\lambda\left(\frac{\overrightarrow{OA}}{|\overrightarrow{OA}|}+\frac{\overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OB}|}\right)$$
$$=\lambda\left(-\frac{3}{5}, \frac{9}{5}\right)(\lambda>0).$$

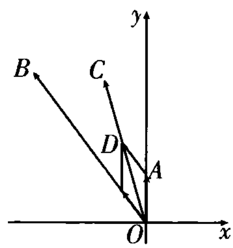

图 1-1

由$|\overrightarrow{OC}|=2\Rightarrow\lambda=\dfrac{\sqrt{10}}{3}$，则$\overrightarrow{OC}=\left(-\dfrac{\sqrt{10}}{5}, \dfrac{3\sqrt{10}}{5}\right)$.

评注 构造单位向量是速解此题的关键，这充分体现了单位向量的独特功效.