目　录

代　数

代　　数

第一章　数

数的概念的扩展是中学代数課程中主要內容之一．它和代数的其他部分象恒等变形、函数、方程等有密切的联系．

这一章的內容以数的概念的扩展、实数的运算（包括近似計算）、复数的运算三部分为重点．

复习这一章的时候，必須着重注意下列各点：

（1）明确了解所引进新的数的本质，各个数集（数的集合）的意义以及在各个数集里的一些运算法則；从而理解到当一个数集扩展到另一个数集的时候，有些运算性质对新的数仍旧适用，但有些运算性质却不适用了．例如，运算公式$\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{ab}(a\geqq0,b\geqq0)$，在实数集里是正确的，但是对虚数的运算就不适用．

（2）在实际应用中，我們經常会遇到近似数的計算．因此，很好地掌握近似計算的基本知識和技能是非常必要的．

（3）在实数的运算中，应該注意选擇最簡便的运算方法．

1．数的概念的扩展　数的概念是随着人类生产活动的需要而逐漸形成和发展的．

早在人类社会发展的最初阶段，由于計数和測量的需要，就有了**正整数**（就是自然数）的概念，并且逐漸掌握了正整数的运算法則．

随着人类社会的不断发展，数的概念也逐漸扩展着．

客观实际中存在各种可以分成比計量单位还要小的若干等分的量．为了精确地表示这种量，单用正整数就感到不够，这样就需

要引进新的数．第一次引进的新的数是**正分数**．这种新数的引进，就把数从正整数的范圍扩展到正有理数的范圍．

数的概念的这一扩展，給数学解决实际問題提供了新的工具．反映在数学里，就解决了在数的原有范圍內某种运算不是永远可以实施的矛盾．例如，在正整数范圍內除法的运算不是永远可以实施的，但是在正有理数范圍內除法就总可以实施了．

客观实际中存在相反方向的量．为了确切地表示这种量，仅仅用正有理数就感到不够了，又需要引进新的数．这样引进的新的数就是**負有理数**．同时我們把零看做是数，用来表示計数中一个都沒有的情况．反映在数学里，这种新的数的引进就解决了减法不是永远可以实施的問題．

正有理数、零、負有理数总起来叫做**有理数**．在有理数范圍內，四則运算(除去除数是零的除法)就都永远可以实施了．

但是，客观实际中还存在各种与計量单位不可公度的量，例如，正方形的对角綫长和它的边长是不可公度的量．这种量仅仅用有理数还不能确切地表示它．为了解决这个問題，又需要引进新的数．这样引进的新的数是**无理数**．反映在数学里，在有理数范圍內，一个正数开 n 次方并不都是可能的，引进了无理数，这个問題就得到了解决．

有理数和无理数总起来叫做**实数**．在实数范圍內可以进行加法、减法、乘法、除法、乘方和正数的开方等六种运算，但是負数的开方却不是永远可以实施的．

在实数范圍內，由于負数不能开平方，方程 $x^2=-1$ 就认为是沒有解的．为了使这类方程能够有解，我們必須象以前引进正分数、負有理数、无理数那样，再引进新的数．这样，我們引进了一个新的数 i，并且規定这个数有以下的性质：

(1) $i^2=-1$;

(2) 它和实数在一起可以按照通常的四則运算法則进行运

算.

这个数叫做**虚数单位**.

i 和实数 b 相乘,就得出形式是 bi 的数. 当 $b\neq 0$ 的时候,把它叫做**純虚数**; $b=0$ 的时候,就規定是 0 (就是 $0i=0$). 把形式是 bi 的数和实数 a 相加,就得出形式是 $a+bi$ 的数. 当 $b\neq 0$ 的时候,把它叫做**虚数**; $b=0$ 的时候,它就是实数(就是 $a+0i=a$).

虚数和实数总起来叫做**复数**. 一切复数都可以写成 $a+bi$ 的形式.

在复数范圍內,六种运算就都可以实施了.

虚数的引进,和前几次引进新的数,性质有所不同. 由于人們不能用它来測量长度、面积、时間等这类量,它很久沒有被人們所承认. 一直到以后随着科学技术的发展,証明了利用这种数可以解决很多实际問題,它才被承认了.

上面所說的数的概念扩展的过程,可以概括地列成下表:

- 复数 $(a+bi)$
  - 实数 $(a+bi, b=0)$
    - 有理数
      - 正有理数
        - 正整数
        - 正分数
      - 零
      - 負有理数
        - 負整数
        - 負分数
    - 无理数
      - 正无理数
      - 負无理数
  - 虚数 $(a+bi, b\neq 0)$
    - 純虚数 $(a+bi, a=0, b\neq 0)$
    - 非純虚数 $(a+bi, a\neq 0, b\neq 0)$

注 (1) 正整数、零、負整数統称整数.

(2) 表中所指的分数,是专指不能化成整数的分数.

(3) 有理数都可以写成 $\frac{m}{n}$ 的形式. 这里 m 是整数, n 是自然数; 但是无理数就不能够写成这种形式.

(4) 实数都可以用有限小数或者无限小数表示,其中用无限不循环小数表示的实数,就是无理数.

从上面所說的，还可以看到，随着数的概念的扩展，运算的知識也在逐漸扩展．但是在每次扩展中，在正整数范圍內研究过的运算的几个基本定律，就是加法交換律和結合律，乘法交換律、結合律和乘法对加法的分配律都保留了下来．这就是說，在复数范圍內（当然包括比它小的范圍如实数范圍、有理数范圍），这些定律都适用．

但是，另一方面也应該注意，在数的概念扩展的过程中，原有的数的某些性质也可能有所改变．例如：

(1) 在自然数范圍內，可以把数从 1 开始依次排列成自然数列 1, 2, 3, 4, ……，在相邻两数間不再有其他的自然数；但是，在有理数范圍內，就沒有最小的数，而且在任何两个有理数之間总还存在另一个有理数（稠密性）．

(2) 在实数范圍內，任何两个实数可以比較它們的大小（顺序性）；但是数的概念扩展到复数，对于任意两个复数（只要不都是实数）就不能比較它們的大小．

2．实数

1．实数和数軸　实数和数軸上的点，可以建立一一对应的关系．就是說，任何一个实数，可以用数軸上唯一的点来表示它；反过来，数軸上任何一个点，都表示唯一的一个实数（图 1）．

图　1

根据这个性质，我們可以規定怎样来比較两个实数的大小．設分別与 A 和 B 对应的两个实数是 α 和 β（图 2），那末

(1) 如果 A 在 B 的左边，那末 $\alpha<\beta$；

(2) 如果 A 和 B 重合，那末 $\alpha=\beta$；

(3) 如果 A 在 B 的右边，那末 $\alpha>\beta$．

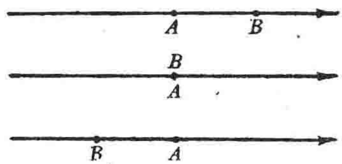

图 2

由于实数和数軸上的点建立一一对应的关系，因此，在数軸上的实数 a 的絕对值 $|a|$，就是表示 a 这个点和原点間的距离.

$$|a|=\begin{cases}a, & \text{如果 } a>0;\\ 0, & \text{如果 } a=0;\\ -a, & \text{如果 } a<0.\end{cases}$$

2．实数的运算　我們規定：

(1) 两个正实数 α 和 β 相加(或者相乘)，就是求一个数 γ，使它大于这两个实数的任意一組对应的不足近似值的和（或者积），而小于任意一組对应的过剩近似值的和(或者积)．如果 α 和 β 中有一个是有理数，就取它的准确值来計算.

(2) 两个正实数的减法（或者除法）是加法（或者乘法）的逆运算.

(3) 对于負实数的运算，按照負有理数的运算法則进行.

(4) 求实数 α 的 n 次方，就是求 n 个 α 相乘的积.

(5) 实数 α 开 n 次方，就是求一个数，使它的 n 次幂等于 α.

注意 (1) 两个有理数的和、差、积、商仍是有理数，但是两个无理数的和、差、积、商就不一定是无理数.

(2) 一个有理数与一个无理数的和(或者差)一定是无理数；一个有理数(零除外)乘以(或者除以)一个无理数的积(或者商)都是无理数.

例 1　解方程：$|x-4|+|x+1|=5$．(x 是实数)

解　当 $x\geqq 4$ 的时候，原方程变形成：

$$(x-4)+(x+1)=5.$$

$$\therefore\ x=4.$$

当 $x\leqq -1$ 的时候，原方程变形成：

$$-(x-4)-(x+1)=5.$$

$$\therefore\quad x=-1.$$

当 $-1<x<4$ 的时候，原方程变形成：

$$-(x-4)+(x+1)=5,$$

就是 $$5=5.$$

这就是說，在 $-1<x<4$ 的区間里，x 的一切实数值都适合这个方程.

所以原方程的解是：$-1\leqq x\leqq 4$.

例 2 解方程：$|x+1|+|x+2|+3=0$.（x 是实数）

解 因为一切实数的絕对值都是非負数，所以这个方程无解.

3. 实数的近似計算 近似計算可以使我們迅速地求得足够可靠的結果.

(1) 近似数的产生和近似数的截取方法. 表示量的准确值的数叫做**准确数**. 但是，在計数、測量、計算的过程中，由于不容易、不可能或者不必要得到准确数，我們就用准确到某一数位的不足近似值或者过剩近似值来代替. 象这样得到的和准确数相差不大的数，叫做**近似数**.

近似数的截取方法通常有下面三种：

i. 四舍五入法 在截取近似数的时候，如果所舍去的数的最左边的一位数字是 5 或者比 5 大，就在保留的数的最后一个数位上加上 1；如果所舍去的数的最左边的一位数字比 5 小，保留的数就不变.

ii. 进一法 在截取近似数的时候，如果所舍去的数里有不是 0 的数字，就在保留的数的最后一个数位上加上 1. 这样得到的近似数只能比准确数大，而不会比准确数小，就是說，这个近似数只是准确数的过剩近似值.

iii. 去尾法 在截取近似数的时候，不管所舍去的数里的数字是什么，保留的数不变. 这样得到的近似数只能比准确数小，而不会比准确数大，就是說，这个近似数只是准确数的不足近似值.

例如，$\frac{9}{11}=0.818181\cdots\cdots$，

截取的方法	精确到百分位	精确到千分位
四舍五入法	0.82	0.818
进一法	0.82	0.819
去尾法	0.81	0.818

注 为了使近似数能够更接近于它所代表的准确数，本书里有关数据中近似数的截取方法，除掉根据实际意义必須采用进一法或者去尾法来截取外，一般都采用四舍五入法。

(2) 近似数的絕对誤差 一个近似数和它所代表的准确数的差的絕对值，叫做这个近似数的**絕对誤差**。

如果用 a 表示近似数，A 表示它所代表的准确数，Δ 表示近似数 a 的絕对誤差，那末

$$\Delta=|A-a|.$$

一个近似数的絕对誤差所不超过的某一个数，叫做这个近似数的**絕对誤差界**。

如果用 α 表示近似数 a 的絕对誤差界，A 表示准确数，那末

$$|A-a|\leqq\alpha.$$

这就表示准确数 A 介于 $a-\alpha$ 和 $a+\alpha$ 之間，就是 $a-\alpha\leqq A\leqq a+\alpha$。这个事实可以在数軸上表示出来(图 3)：

图 3

在絕对誤差不超过 α 的条件下，数軸上介于 C、D 之間的数，都可以用近似数 a 来表示。

絕对誤差与絕对誤差界和准确数有相同的单位名称。

习惯上，我們常把絕对誤差界附以正負号写在近似数的后面，

以表示它的精确度．例如，一根鋼絲长度的近似数是 32 厘米，絕对誤差界是 0.5 厘米，它的长度就可以写做：32 厘米（±0.5 厘米）.

（3）有效数字　用四舍五入法截取得到的近似数的絕对誤差，都不超过这个近似数的最后一个数位上的半个单位．在这类近似数里，从第一个不是零的数字起到保留的数位为止，所有的数字都叫做**有效数字**．例如，0.0016 有 2 个有效数字 1、6；1.60 有 3 个有效数字 1、6、0；1.6 有 2 个有效数字 1、6.

应該注意，1.6 和 1.60 是两个不同的近似数．近似数 1.6 可以代表所有大于或者等于 1.55 而小于 1.65 的数．但是近似数 1.60 只可以代表所有大于或者等于 1.595 而小于 1.605 的数.

如果一个近似数是整数，而且末尾带有几个零，就不能够直接看出它究竟有几个有效数字．这时就必須指明这个近似数精确到哪一位，才能够知道它有几个有效数字．例如，15000 精确到百位，就有 3 个有效数字，可以用 15000（±50）来表示，或者写做 1.50×10^4.

（4）近似数的相对誤差　一个近似数的絕对誤差和近似数本身的比，叫做这个近似数的**相对誤差**.

如果用 a 表示近似数，Δ 表示这个近似数的絕对誤差，K 表示这个近似数的相对誤差，那末

$$K=\frac{\Delta}{a}.$$

近似数的絕对誤差界和近似数本身的比，叫做这个近似数的**相对誤差界**.

如果用 δ 表示近似数的相对誤差界，那末

$$\delta=\frac{\alpha}{a}.$$

相对誤差和相对誤差界通常用百分数来表示.

例　一条电綫长 218 米（±0.5 米），求它的相对誤差界.

解 $a=0.5$(米),

$$\therefore\quad \delta=\frac{\alpha}{a}=\frac{0.5}{218}=0.00229\approx 0.23\%.$$

(5) 近似数的計算　近似数的計算一般采用“計算数字的法則”. 采用这个法則, 一般要求所得到的結果, 除掉最后一位上的数字有时不一定可靠外, 其他的数字都是可靠的.

計算数字的法則一般可以归納成下面几条:

i. 在計算前, 必須弄清哪些是准确数, 哪些是近似数.

ii. 做近似数的加法 (加数不滿十个) 或者减法的时候, 先要把小数位数較多的近似数四舍五入到比小数位数最少的近似数多保留一位; 計算結果的小数位数要和原来近似数里最少的那个相同.

iii. 做近似数的乘、除法的时候, 要先把有效数字較多的因数四舍五入到比有效数字最少的多保留一个有效数字; 計算結果从第一个不是零的数字起保留的数字的个数, 应該和有效数字最少的那个因数所有的有效数字的个数相同.

iv. 求近似数的平方与立方, 計算結果从第一个不是零的数字起保留的数字的个数, 应該和底数的有效数字的个数相同.

v. 求近似数的平方根与立方根, 計算結果从第一个不是零的数字起保留的数字的个数, 应該和被开方数的有效数字的个数相同.

vi. 在运算的中間步驟里, 应該使所取的結果比 i—v 各条法則所規定的最后結果多保留一个数字.

vii. 在运算中旣有准确数又有近似数的时候, 应該把准确数看做有效数字最多的近似数.

例 1　籃球的直徑是 26.5 厘米, 求这个籃球的体积和面积.

解　这里, 近似数 26.5 有 3 个有效数字, 所得結果从第一个不是零的数字起, 应該保留 3 个数字. π 取 4 个有效数字.

$$\text{球的体积}=\frac{1}{6}\pi d^3$$

$=\frac{1}{6}\times3.142\times(26.5)^3$

$\approx0.5237\times18610$(查表)

≈9750(立方厘米). (精确到 10 立方厘米)

球的面积 $=\pi d^2$

$=3.142\times(26.5)^2$

$\approx3.142\times702.3$(査表)

≈2210(平方厘米). (精确到 10 平方厘米)

答: 球的体积是 9750 立方厘米; 球的面积是 2210 平方厘米.

例 2 在一块面积是 3.29 平方米的正方形木板上, 要截一块面积是 2.71 平方米的正方形, 截下来的木条的最大宽度是多少?

解 原木板的边长是 $\sqrt{3.29}\approx1.814$ (米).

所截正方形的边长是 $\sqrt{2.71}\approx1.646$ (米).

所以截下来木条的最大宽度是:

$$\sqrt{3.29}-\sqrt{2.71}\approx1.814-1.646=0.168\approx0.17(\text{米}).$$

答: 截下来木条的最大宽度是 17 厘米.

例 3 有一块梯形的田, 它的两条平行边的长分别是 48.5 米和 62.7 米, 两条平行边間的距离是 27.0 米. 求这块田的面积(图 4).

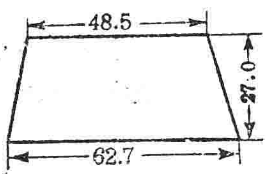

图 4

解 这三个近似数都有 3 个有效数字, 所得結果从第一个不是零的数字起, 应該保留 3 个数字, 但在演算的中間步骤里应該多保留 1 个数字.

梯形的面积 $=\frac{1}{2}(48.5+62.7)\times27.0$

$=\frac{1}{2}\times111.2\times27.0$

$=55.60\times27.0$

≈1500(平方米). (精确到 10 平方米)

答: 梯形田的面积是 1500 平方米.

例 4 薄铁皮制的沒有盖的直圓柱形罐头, 它的底面的直徑是 20.0 厘米, 高是 24.0 厘米. 求制成这罐头的薄铁皮的面积和这罐头的容积(图 5).

$$\frac{r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)}{r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)}=\frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1-\theta_2)+i\sin(\theta_1-\theta_2)].$$

(4) 复数的乘方　复数乘方用三角方法来解比較簡便.

当 n 是正整数的时候,

$$[r(\cos\theta+i\sin\theta)]^n=r^n[\cos n\theta+i\sin n\theta].$$

这个公式叫做**棣美弗定理**.

(5) 复数的开方　复数开方也用三角方法来解比較簡便.

$$\sqrt[n]{r(\cos\theta+i\sin\theta)}=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right),$$

$$k=0,1,2,\cdots\cdots,n-1.$$

由此可知,任何一个复数的 n 次方根有 n 个值.

例 1　計算: (1) $\sqrt{-4}\cdot\sqrt{-9}$;　(2) $\sqrt{-4}+\sqrt{-9}$.

解　(1) $\sqrt{-4}\cdot\sqrt{-9}=\sqrt{4}\,i\cdot\sqrt{9}\,i=2i\cdot3i=-6$;

(2) $\sqrt{-4}+\sqrt{-9}=2i+3i=5i$.

例 2　如果 $(x+y)^2i-\frac{6}{i}-x=-y+5i(x+y)-1$, 求 x、y 的实数值.

解　等式两边同乘以 $-i$, 得

$$(x+y)^2+6+xi=yi+5(x+y)+i,$$

就是

$$[(x+y)^2+6]+xi=5(x+y)+(y+1)i.$$

使实部和虚部的系数分别对应相等,得方程組

$$\begin{cases}(x+y)^2+6=5(x+y), & (1)\\ x=y+1. & (2)\end{cases}$$

从(1),得

$$(x+y-2)(x+y-3)=0.$$

$$\therefore\quad x+y=2,\ \text{或者}\ x+y=3.$$

解方程組

$$\begin{cases}x-y=1,\\ x+y=2;\end{cases}\quad\text{和}\quad\begin{cases}x-y=1,\\ x+y=3.\end{cases}$$

得

$$\begin{cases}x=\frac{3}{2},\\ y=\frac{1}{2};\end{cases}\quad\text{或者}\quad\begin{cases}x=2,\\ y=1.\end{cases}$$

例 3　計算: $\left(\frac{\sqrt{3}+i}{2}\right)^6-\left(\frac{\sqrt{3}-i}{2}\right)^3$.

解 把原式用三角函数式来表示，得

$$\left(\frac{\sqrt{3}+i}{2}\right)^6-\left(\frac{\sqrt{3}-i}{2}\right)^6$$

$$=\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)^6-\left(\cos\frac{11\pi}{6}+i\sin\frac{11\pi}{6}\right)^6$$

$$=\cos\pi+i\sin\pi-\cos 11\pi-i\sin 11\pi$$

$$=\cos\pi+i\sin\pi-\cos\pi-i\sin\pi$$

$$=0.$$

注 如果应用二項式定理展开各式，計算就比較麻煩。

例 4 解方程：$2x+|x|=2+6i$.

解 設 $x=a+bi$，那末

$$2(a+bi)+\sqrt{a^2+b^2}=2+6i,$$

就是

$$2a+2bi+\sqrt{a^2+b^2}=2+6i.$$

$$\therefore \begin{cases} 2a+\sqrt{a^2+b^2}=2, & (1)\\ 2b=6. & (2)\end{cases}$$

从(2)，得 $$b=3.$$

代入(1)，得 $$2a+\sqrt{a^2+9}=2,$$

就是 $$3a^2-8a-5=0.$$

$$\therefore\quad a=\frac{4\pm\sqrt{31}}{3}.$$

驗算后，知道 $a=\dfrac{4+\sqrt{31}}{3}$ 是增根，因此取

$$a=\frac{4-\sqrt{31}}{3}.$$

$$\therefore\quad x=\frac{4-\sqrt{31}}{3}+3i.$$

习 題 一

1. 10! 代表哪些自然数的乘积？其中哪些数是质数？哪些数是合数？哪些数是互质数？
2. 下列各数里哪些是有理数？哪些是无理数？为什么？

(1) $\sqrt{\dfrac{2318}{9}}$;　　(2) $\lg \operatorname{tg}(-840^\circ)$;　　(3) $2\sqrt{2}\sin\dfrac{5\pi}{12}$;