普通高等学校“十二五”规划教材

概率论与数理统计

（独立院校用）

李忠定　张国强　闫　亮　郑莉芳　主编

中国铁道出版社
CHINA RAILWAY PUBLISHING HOUSE

普通高等学校“十二五”规划教材

概率论与数理统计

（独立院校用）

主编　李忠定　张国强　闫　亮　郑莉芳
编者　张国强　闫　亮　郑莉芳
　　　孟昕娜　张玲玲

中国铁道出版社
CHINA RAILWAY PUBLISHING HOUSE

内 容 简 介

本系列教材为独立院校工科各专业公共课教材，有高等数学（上、下册）、线性代数与几何、概率论与数理统计。本系列教材是编者根据独立院校工科教学改革的精神和“十二五”规划教材的要求、结合多年教学改革的研究与实践编写的，是河北省教育教学改革研究项目重点资助的课题成果，书中融入了许多新的教学理念和方法。本书为概率论与数理统计，内容包括概率论与数理统计两大部分内容。

本书适合作为普通高等学校独立院校各专业教材，也可作为大专、函大和自学考试教材。

图书在版编目（CIP）数据

概率论与数理统计／李忠定等主编．—北京：中国铁道出版社，2012.1

普通高等学校“十二五”规划教材．独立院校用

ISBN 978-7-113-14030-4

Ⅰ．①概… Ⅱ．①李… Ⅲ．①概率论—高等学校—教材②数理统计—高等学校—教材 Ⅳ．①O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2011）第 262134 号

书　　名： 概率论与数理统计（独立院校用）
作　　者： 李忠定　张国强　闫　亮　郑莉芳　主编

策　　划： 李小军　　**读者热线：** 400-668-0820
责任编辑： 李小军
编辑助理： 何　佳
封面设计： 付　巍
封面制作： 白　雪
责任印制： 李　佳

出版发行： 中国铁道出版社（100054，北京市西城区右安门西街 8 号）
网　　址： http：//www.edusources.net
印　　刷： 三河市华业印装厂
版　　次： 2012 年 1 月第 1 版　2012 年 1 月第 1 次印刷
开　　本： 720mm×960mm　1/16　印张：10.75　字数：198 千
书　　号： ISBN 978-7-113-14030-4
定　　价： 19.00 元

前　言

本书专为普通高等学校独立学院非数学类专业概率论与数理统计课程而编写，体现独立学院学生的特点并结合教学大纲的要求，在保证基本内容的完整下，删减了一些繁难之处，简化了部分内容，适当地增加了例题，使本书在系统、科学、严谨的基础上更浅显易懂，把重点放在了培养学生学习兴趣、掌握学习方法上，注重提高读者的随机性思维、将实际问题转化为数学问题的能力。

全书主要包括概率论与数理统计两大部分内容，共分 9 章，前 4 章主要介绍概率论的基本内容——概率论的基本概念、随机变量及其分布、随机变量的数字特征、大数定律和中心极限定理；后 5 章着重介绍数理统计的基本内容——数理统计的基本概念、参数估计、假设检验、方差分析、一元回归分析。让读者一方面认识如何用分析的方法解决随机问题，另一方面通过对这门课程的学习更理性地对待生活中的一些问题（比如博彩等）。本书在每一章后附有不同层次的习题，它们大致可分为两类：一类是较易的题，加强对基础知识、基本方法的掌握的训练；一类是综合题，综合运用所学知识解决实际问题，以培养读者利用所学知识分析问题和解决问题的能力。

讲授本书的全部内容，约需 48 学时，每章可根据读者实际情况选讲一些综合类习题。

本书由李忠定教授统稿并最终定稿。参加编写的有：郑莉芳、张国强、闫亮、孟昕娜、张玲玲。

在本书的编写过程中，得到了石家庄铁道大学四方学院各级领导的支持、米建民教授和基础部数学教研室全体教师的热情帮助，谨向他们表示衷心的感谢。

由于编者能力、水平有限，书中不当之处，恐在所难免，请读者批评指正，以使本书不断完善。

编　者

2011 年 10 月

目　　录

第 1 章

概率论的基本概念

在自然界和人类社会活动中，大体上可分为两类现象：一类是事先可预言的，如：向上抛一枚硬币，由于重力作用，一定会落到地面上；无论什么形状的三角形，两边之和一定大于第三边；在一个标准大气压下，水加热到 100℃，必然会沸腾等，我们称这类现象为**必然现象**. 另一类现象是事先无法预言的，如：向上抛硬币时，无法预言是正面向上还是反面向上；从一袋种子中取 10 粒做发芽试验，无法确定有几颗会发芽；经济学中，一支股票在未来市场中的价格也是不确定的等，我们称这类现象为**随机现象**.

随机现象看似是无法预言，无规律性的，但事实并非如此. 人们通过大量试验和实践发现，在大量重复试验下，随机现象也会呈现一定的规律性，称之为随机现象的**统计规律性**. 概率论与数理统计就是研究和揭示随机现象的统计规律性的一门数学学科. 在当今社会，概率论和数理统计应用于生活中的各个领域，如经济与金融学、电子信息学、军事、生物医学、地质学、工程统计和计量经济等.

1.1 随机事件及运算

1.1.1 随机试验与随机事件

我们把对自然现象所进行的一次观察或一次科学实验统称为**试验**. 如果一个试验具有以下特征：

(1)在相同的条件下可以重复进行；

(2)所有可能出现的结果不止一个，并且是事先已知的；

(3)每次试验究竟会出现哪个结果，试验前不能确切预知.

称该试验为**随机试验**(简称**试验**)，记为 E.

例如：掷一枚质地均匀的骰子，试验可以重复进行；试验前所有可能出现的结果：出现 1，2，…，6 点；每次试验前不能确定到底出现几点. 此试验为随机试验.

随机试验的所有可能结果称为**随机事件**，简称**事件**，用 $A,B,C,\cdots$ 表示. 试验中不能再分或没有必要再分的事件称为**基本事件**或**样本点**，用 ω 表示. 全体样本点

的集合称为**样本空间**,记为Ω.如上例中,样本空间$\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$,样本点$\omega_i=\{$出现i点$\}$,$i=1,2,\cdots,6$,令$A=\{$出现奇数点$\}$,A为一随机事件.每次试验中都必然发生的事件称为**必然事件**,显然样本空间Ω为必然事件;试验中不可能发生的事件称为**不可能事件**,记为$\varnothing$.

【例 1】 写出以下随机试验的样本空间.

E_1:掷一枚硬币,$\Omega=\{$正面向上,反面向上$\}$;

E_2:记录一段时间内,某地段110报警中心接受报警次数,$\Omega=\{0,1,2,\cdots\}$;

E_3:一枚硬币连掷两次,$\Omega=\{$(正,正),(正,反),(反,正),(反,反)$\}$;

E_4:测试某电视机的寿命(以小时计),$\Omega=\{t \mid t\geqslant 0\}$.

引入样本空间后,任一事件A是Ω的子集,这样就建立了事件与集合之间的关系,以后就可以用集合的方法研究随机事件.

1.1.2 随机事件的关系及运算

进行随机试验,有多种事件发生,这些事件往往是相互关联的.为了研究复杂事件的概率,需要引入事件的关系及运算.

设A,B是同一样本空间Ω的事件,它们有以下关系及运算:

(1)包含与相等

若事件A的发生必然导致事件B的发生,则称B**包含**A,也称A为B的**子事件**,记为$A\subset B$或$B\supset A$.若$A\subset B$且$B\supset A$,则称A与B**相等**,记为$A=B$.

(2)事件的交(积)

"事件A和事件B同时发生"这一事件,称为事件A和B的**交(积)**,记为$A\cap B$或AB.

类似地,称$\bigcap_{k=1}^{n} A_k$为n个事件$A_1,A_2,\cdots,A_n$的**交**;称$\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$为可列个事件$A_1,A_2,\cdots$的**交**.

(3)事件的并(和)

"事件A或事件B至少有一个发生"这一事件,称为A和B的**并(和)**,记为$A\cup B$.

类似地,称$\bigcup_{k=1}^{n} A_k$为n个事件$A_1,A_2,\cdots,A_n$的**并**;称$\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$为可列个事件$A_1,A_2,\cdots$的**并**.

(4)事件的差

"事件A发生而B不发生"这一事件,称为事件A与B的**差**,记为$A-B$.

(5)相容与互斥事件

若事件A与B不能同时发生,即$A\cap B=\varnothing$,称事件A与B**互不相容(互斥)**,

否则称为**相容**.

当事件 A 与 B 互斥时,$C=A\cup B$ 又可记为 $C=A+B$,称为 A 和 B 的**直和**.

(6)对立事件(逆事件)

若事件 A 与 B 不能同时发生,但又必定有一个出现,即 $A\cap B=\varnothing$ 且 $A\cup B=\Omega$,称事件 A 与 B 互为**对立事件**,记 $B=\overline{A}$.

显然,$\overline{\overline{A}}=A$,$\Omega-A=\overline{A}$,$A-B=A\overline{B}=A-AB$.

注意对立事件与互斥事件的区别:对立事件一定是互斥事件,但反过来,不成立.

上述关系和运算还可以用文氏图表示(见图 1-1~图 1-6):

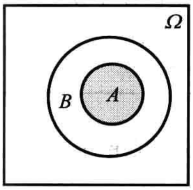

图 1-1 $A\subset B$

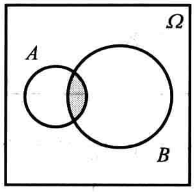

图 1-2 $A\cap B$

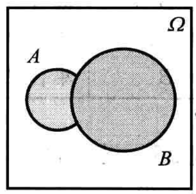

图 1-3 $A\cup B$

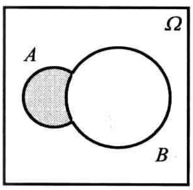

图 1-4 $A-B$

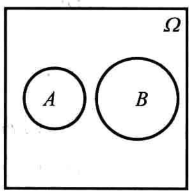

图 1-5 $A\cap B=\varnothing$

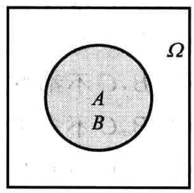

图 1-6 $B=A$

可以验证事件的运算满足:

(1)交换律:$A\cup B=B\cup A$,$A\cap B=B\cap A$;

(2)结合律:$A\cup B\cup C=A\cup(B\cup C)$,$A\cap B\cap C=A\cap(B\cap C)$;

(3)分配律:$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$,

$$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C);$$

(4)德·摩根律:$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$,$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$,

$$\overline{\bigcup_{k=1}^{n}A_k}=\bigcap_{k=1}^{n}\overline{A_k},\ \overline{\bigcap_{k=1}^{n}A_k}=\bigcup_{k=1}^{n}\overline{A_k}.$$

事件的上述运算规律还可以推广到事件为有限多个或可列无限个的情形.

为了更好地理解这些关系和运算,现把集合论的有关结论与概率论的相关结论的关系用表 1-1 总结:

表 1-1 集合论有关结论与概率论有关结论的对照

符号	集合论	概率论
Ω	全集	样本空间,必然事件
$\varnothing$	空集	不可能事件
$\omega\in\Omega$	集合中的元素	样本点,基本事件
$A\subset B$	集合 A 包含在集合 B 中	事件 A 是 B 的子事件
$A\cup B$	集合 A 与 B 的并	事件 A 和 B 至少有一个发生
$A\cap B$	集合 A 与 B 的交	事件 A 和 B 同时发生
$\overline{A}$	集合 A 的补集	事件 A 的逆事件
$A-B$	集合 A 与 B 的差	事件 A 发生而 B 不发生
$A\cap B=\varnothing$	集合 A,B 没有公共元素	事件 A 和 B 互斥
$A=B$	集合 A 与 B 相等	事件 A 和 B 相等

【例 2】 设 A,B,C 表示三个事件,用事件的运算表示下列事件:

(1)A 发生; A

(2)仅 A 发生; $A\overline{B}\overline{C}$

(3)A,B,C 都发生; ABC

(4)A,B,C 都不发生; $\overline{A}\overline{B}\overline{C}$

(5)A,B,C 不都发生; $\overline{ABC}$

(6)A,B,C 不多于一个发生; $\overline{A}\overline{B}\overline{C}\cup A\overline{B}\overline{C}\cup\overline{A}B\overline{C}\cup\overline{A}\overline{B}C$

(7)A,B,C 恰好有两个发生. $AB\overline{C}\cup A\overline{B}C\cup\overline{A}BC$

【例 3】 化简下列事件:

(1)$(\overline{A}\cup\overline{B})(\overline{A}\cup B)$; (2)$A\overline{B}\cup\overline{A}B\cup\overline{A}\overline{B}$.

解 (1)$(\overline{A}\cup\overline{B})(\overline{A}\cup B)=[\overline{A}(\overline{A}\cup B)]\cup[\overline{B}(\overline{A}\cup B)]$(分配律)

$=(\overline{A}\overline{A}\cup\overline{A}B)\cup(\overline{B}\overline{A}\cup\overline{B}B)$

$=(\overline{A}\cup\overline{A}B)]\cup(\overline{B}\overline{A}\cup\varnothing)$(因 $\overline{A}B\subset\overline{A}$)

$=\overline{A}\cup\overline{B}\overline{A}=\overline{A}$.

(2)$A\overline{B}\cup\overline{A}B\cup\overline{A}\overline{B}=A\overline{B}\cup\overline{A}B\cup\overline{A}\overline{B}\cup\overline{A}\overline{B}=A\overline{B}\cup\overline{A}\overline{B}\cup\overline{A}B\cup\overline{A}\overline{B}$(交换律)

$=(A\overline{B}\cup\overline{A}\overline{B})\cup(\overline{A}B\cup\overline{A}\overline{B})$(结合律)

$=(A\cup\overline{A})\overline{B}\cup\overline{A}(B\cup\overline{B})=\overline{B}\cup\overline{A}=\overline{AB}$.(德·摩根律)

1.2 随机事件的概率

当做一个随机试验时,我们不仅关心事件的发生与否,更重要的是事件发生的可能性的大小,尤其是我们所关心的事件 A 发生的可能性的大小,它揭示了事件

的内在的统计规律.在实际生产生活中,事件发生的可能性的大小是有重要意义的,如:某话务中心在24小时内如果知道了被呼叫次数的可能性的大小,就可以合理调配话务员的数量;某电视机厂家若知道了电视机的寿命的可能性的大小,就可以合理地给出包换包修服务年限.这就需要用一个数字(实数)来刻画事件发生的可能性的大小,这个数值就叫事件的概率,用 $P(A)$,$P(B)$,…表示.对于事件 A,$P(A)$到底是个什么样的数?又如何去求?本节先针对一些简单的情形进行讨论.

1.2.1 古典概率

我们知道掷一枚质地均匀的骰子,样本空间 $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$,记随机事件 A:出现 i 点,则

$$P(A)=\frac{1}{6}=\frac{A\text{ 所包含的基本事件数}}{\Omega\text{ 所包含的基本事件数}} \tag{1.1}$$

这种概率模型是概率论发展过程中最早被研究的模型,下面给出它的定义:

定义 1.1 设 E 为一随机试验,若它满足下面两个条件:

(1)样本空间只含有有限个基本事件;

(2)每个基本事件发生的可能性相等.

则称 E 为**古典概型**.

古典概型中事件 A 的概率称为**古典概率**,用(1.1)式计算,在利用公式计算时,一般要用到排列组合数计算所包含的基本事件数.

【例 1】 一个袋子中装有10个大小相同的球,其中3个黑球,7个白球,求:

(1)从袋子中任取一球,这个球是黑球的概率;

(2)从袋子中任取两球,刚好一个白球一个黑球的概率以及两个球全是黑球的概率.

解 (1)10个球中任取一个,共有 $C_{10}^1=10$ 种选择.从而根据古典概率计算,事件 A:"取到的球为黑球"的概率为

$$P(A)=\frac{C_3^1}{C_{10}^1}=\frac{3}{10}.$$

(2)10球中任取两球的取法有 C_{10}^2 种,其中刚好一个白球,一个黑球的取法有 $C_3^1\cdot C_7^1$ 种取法;两个球均是黑球的取法有 C_3^2 种,记 B 为事件"刚好取到一个白球一个黑球",C 为事件"两个球均为黑球",则

$$P(B)=\frac{C_3^1C_7^1}{C_{10}^2}=\frac{21}{45}=\frac{7}{15};P(C)=\frac{C_3^2}{C_{10}^2}=\frac{3}{45}=\frac{1}{15}.$$

【例 2】 将 n 个球等可能地放入 N 个盒子中($n\leqslant N$),每个盒子放入球数不限,求下列事件的概率:

(1)A:某些指定的 n 个盒子中各有一球;

(2)B:恰有 n 个盒子中各有一球;

(3)C:某指定的一个盒子中恰有 m 个球.

解 因每个球等可能地放入 N 个盒子,且每个盒子放入的球数不限,则样本空间所包含的基本事件数为:N^n.

(1)因指定的 n 个盒子中只能各有一球,因而第一个球有 n 种选择,第二个球只能选择剩下的 $n-1$ 个盒子,依此类推,故 A 所包含的基本事件数为:$n!$,那么

$$P(A)=\frac{n!}{N^n};$$

(2)与(1)不同的是这 n 个盒子没有指定,可以从 N 个盒子中任选 n 个,有 C_N^n 种选择,所以 B 包含的基本事件数为 $C_N^n n!$

$$P(B)=\frac{C_N^n n!}{N^n};$$

(3)要使指定的盒子中恰有 m 个球,只需从 n 个球中先选 m 个进入这个盒子,共有 C_n^m 种选择,剩余的 $n-m$ 个球任意进入 $N-1$ 个盒子有 $(N-1)^{n-m}$ 种选择,故事件 C 包含的基本事件数为 $C_n^m(N-1)^{n-m}$,所以

$$P(C)=\frac{C_n^m(N-1)^{n-m}}{N^n}.$$

【例 3】 100 件同一款衣服,其中有 60 件 M 码,40 件 L 码. 若按以下两种方法:

(1)有放回抽样;

(2)无放回抽样.

从中任意抽取 3 件,求事件 $A=\{3$ 件都是 M 码$\}$和 $B=\{2$ 件 M 码,1 件 L 码$\}$发生的概率.

解 (1)有放回抽样

由于是有放回抽样,每次抽取都有 100 种选择,故样本空间包含 100^3 个基本事件,而事件 A 表示取得的都是 M 码,只能从 60 件 M 码选择,共有 60^3 取法,故

$$P(A)=\frac{60^3}{100^3}=0.216;$$

B 表示两件 M 码,一件 L 码,故有两件是从 60 件 M 码中取,1 件是从 40 件 L 码中取,由于样本空间的建立考虑了选取顺序,所以 B 也应该考虑 1 件 L 码是从第几次中取得的,故 B 含有 $C_3^1 60^2 40$ 个基本事件,所以

$$P(B)=\frac{C_3^1 60^2 40}{100^3}=0.432;$$

(2)无放回抽样

由于是无放回抽样,那抽取三次不放回就相当于一次性从 100 件抽取 3 件,与

顺序无关,故样本空间包含C_{100}^3个基本事件,而A取得的都是M码,相当于一次性从60件M码中任取3件,所以

$$P(A)=\frac{C_{60}^3}{C_{100}^3}=0.212;$$

B包含基本事件数为$C_{60}^2C_{40}^1$

$$P(B)=\frac{C_{60}^2C_{40}^1}{C_{100}^3}=0.438.$$

注意 无放回抽样还可以按每次抽取来建立样本空间,此时,事件仍然要与顺序有关,请读者自行考虑应该如何解答.

一般地,有放回抽样与无放回抽样所得的概率不同,但是当抽取对象数目很大时,有放回和无放回所得结果相差不大,因此,在实际生活中,人们经常把无放回抽样当做有放回抽样来处理,这为解决实际问题提供了方便.

1.2.2 几何概率

古典概率是在样本空间所包含基本事件数有限且等可能的情况下给出的,那么,当样本空间中基本事件数为无穷多个,而基本事件又有某种等可能性时,古典概率就不适用了,从而引出了几何概率的定义.

定义1.2 若随机试验E满足:

(1)样本空间Ω可以用一个几何区域G表示;

(2)样本点落在G中任一区域A中的可能性与A的几何测度(一维时,几何测度为区间长度;二维时为面积;三维时为体积)成正比,与其位置形状没有关系,则称E为**几何概型**.

在几何概型下,随机事A的概率称为**几何概率**,计算公式为:

$$P(A)=\frac{A\text{ 的几何测度}}{\Omega\text{ 的几何测度}}$$

【例4】 某公交枢纽站,每10分钟发一趟车,设某人到达枢纽站就能上车,求此人等待时间不超过5分钟的概率.

解 由于此人到达车站的时间是随机的,候车时间是区间$[0,10]$的任一点,故Ω的几何区域是区间$G[0,10]$,用L表示区间长度,则$L(G)=10$,$A=\{$候车时间不超过5分钟$\}$,$L(A)=5$,故:

$$P(A)=\frac{L(A)}{L(G)}=\frac{1}{2}.$$

1.2.3 统计概率

古典概率和几何概率都以等可能性为基础,在实际中有很大的局限性,如:某

110 报警中心在某段时间接到报警次数可能为“0 次”,“1 次”,…这些结果不具备等可能性,此时,人们自然认为要度量事件出现的可能性大小,最可靠的办法就是重复做试验,这样就提出了统计概率.

设在 n 次重复试验中,A 出现了 k 次,则称比值 $\frac{k}{n}$ 为事件 A 出现的**频率**,记 $f_n(A)=\frac{k}{n}$. 显然,频率 $\frac{k}{n}$ 与试验次数 n 有关,当试验次数不同时,频率可能不同,即便试验次数相同,k 值也可能不同,但在大量重复试验中,频率将呈现出稳定性,即 n 充分大时,$f_n(A)$ 常在某个确定的数值 p 附近摆动,n 越大,摆动幅度越小,频率的这种性质叫**频率的稳定性**. 如:历史上有很多数学家做过掷硬币的试验:

试验者	掷硬币次数	出现正面的次数	频率
德·摩根	2 048	1 061	0.518 0
蒲丰	4 040	2 048	0.506 9
皮尔逊	12 000	6 019	0.501 6
皮尔逊	24 000	12 012	0.500 5
维尼	30 000	14 994	0.499 8

此表说明,$f_n(A)$ 在 $\frac{1}{2}$ 附近摆动.

频率的稳定性是事件本身固有的属性,不以人的意志而转移,这种属性是以我们可以度量事件出现的可能性大小为基础,因此,在以后的应用中,人们把事件 A 的频率 $f_n(A)$ 在某常数 p 附近摆动的 p 定义为 A 的统计概率 $P(A)=p$.

概率的统计定义虽然比较直观,但也有不足和缺陷. 如:无法保障试验 $n+1$ 次比试验 n 次更精确.

由古典概率、几何概率和统计概率,可以发现它们有共同的性质:

(1) $0\leqslant p\leqslant 1$;

(2) $P(\Omega)=1, P(\varnothing)=0$;

(3) $AB=\varnothing$ 时,$P(A+B)=P(A)+P(B)$.

于是,俄国数学家柯尔莫格洛夫于 1933 年在他的《概率论的基本概念》一书中给出了现在已被广泛接受的概率的公理化体系,第一次将概率论建立在严密的逻辑基础上. 这标志着概率论成为一门独立的数学学科. 下一节我们将学习概率的公理化定义及性质.

1.3　概率的公理化定义及性质

根据前面所学习的古典概率、几何概率和统计概率，提炼出它们所共有的性质，提出了概率的公理化定义.

定义 1.3　设 E 是随机试验，Ω 是它的样本空间. 若对 E 的每一事件 A 赋予一个实数，记为 $P(A)$，若 $P(A)$ 满足三个条件：

(1) $\forall A \subset \Omega, P(A) \geqslant 0$；（非负性）

(2) $P(\Omega)=1$；（正规性）

(3) 设 $A_1, A_2, \cdots$ 是两两互不相容的事件，即 $A_i \cap A_j=\varnothing$，$(i \neq j, i, j=1, 2, \cdots)$ 有

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) \quad \text{（可列可加性）}$$

则称 $P(A)$ 为定义在样本空间 Ω 上的事件 A 发生的**概率**.

由概率的公理化定义可得如下性质：

性质 1　$P(\varnothing)=0$.

证明　令 $A_i=\varnothing, i=1,2,\cdots$，则 $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i=\varnothing$，且 $A_i \cap A_j=\varnothing(i \neq j, i, j=1,2, \cdots)$，由概率的可列可加性有：

$$P(\varnothing)=P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)=\sum_{i=1}^{\infty} P(\varnothing)$$

又 $P(\varnothing) \geqslant 0$，可得：$P(\varnothing)=0$.

性质 2（有限可加性）　若 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 是两两互不相容的事件，则有：

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)=\sum_{i=1}^{n} P(A_i).$$

证明　令 $A_{n+1}=A_{n+2}=\cdots=\varnothing$，则 $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i=\varnothing$，且 $A_i \cap A_j=\varnothing(i \neq j, i, j=1, 2, \cdots)$，由可列可加性

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)=P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)=\sum_{i=1}^{n} P(A_i).$$

性质 3　设 $A \subset B \subset \Omega$，则 $P(B-A)=P(B)-P(A)$.

证明　由 $B=A \cup(B-A), A \cap(B-A)=\varnothing$，由有限可加性可得

$$P(B)=P(A)+P(B-A),$$

即

$$P(B-A)=P(B)-P(A).$$

性质 4　设 $A \subset B \subset \Omega$，则 $P(A) \leqslant P(B)$.（单调性）

证明　由性质 3 直接可得.