

大學叢書

工程力學

下 冊

陸志鴻編

商務印書館發行

大學叢書
工 程 力 學
下 冊

陸志鴻編

商務印書館發行

中華民國二十六年六月初版
中華民國三十八年八月三版

命(61243.1P)

大學叢書
(教本)

工程力學二冊

裝平

每部基價叁拾柒元
印刷地點外另加運費

版 翻
權 印
所 必
有 究

編纂者

陸志鴻

發行人

陳懋解
上海河南中路

印刷所

商務印書館
印刷廠

發行所

商務印書館
各地

(本書校對者王煊蕃)

第 二 篇

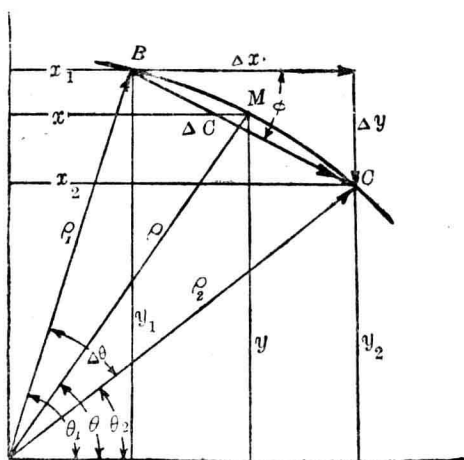
運 動 學

第 九 章 質 點 之 運 動

118. 概說 運動學 (Kinematics) 專論物體之運動,而不論及使物體運動之力,與物體自身之質量.將物體視為幾何學上之形體.運動學上所論者為距離,時間,速度,加速度等關係.物體為質點所構成,論物體之運動時,先須論質點之運動,此質點可視之為幾何學上之一點,即無大小與質量之一點也.

質點沿直線上運動時,其運動為直線運動 (Rectilinear motion), 沿曲線上運動時,其運動為曲線運動 (Curvilinear motion). 質點於相等時間內經過相等距離時,此運動稱曰等速運動 (Uniform motion). 若質點於相等時間內所經過距離不相等時,此運動稱曰變速運動 (Non-uniform motion). 例如一蒸汽機其曲柄軸 (Crank shaft) 每分間有一定迴轉數 (Number of revolutions), 則其叉頭 (Cross head) 有變速直線運動,曲柄銷釘 (Crank pin) 有等速曲線運動,而連接桿 (Connecting rod) 上其他諸點有變速曲線運動.

119. 線變位 在運動中之質點,其位置變化之量,稱曰變位 (Displacement). 運動中之質點,其任何瞬間之位置可以直交座標 (Rectangular coordinates) 或極座標 (Polar coordinates) 表示之. 例如第 410 圖中質點 M 沿曲線上自 B 運動至 C , 其任意瞬間之位置可以座標 x, y 或 ρ, θ 表示之. 質點自 B 之位置 $(x_1, y_1$ 或 $\rho_1, \theta_1)$ 運動至 C 之位置 $(x_2, y_2$ 或 $\rho_2, \theta_2)$ 時,其間所有直線距離 $\overline{BC}$ 之長即表示該兩點間變位之大小,而向線 $\overrightarrow{BC}$ 乃表示該兩點間變位之大小及方向. 即變位亦為向量. 此變位 $\overrightarrow{BC}$ 稱曰線變位 (Linear displacement)



第 410 圖

變位 $\overrightarrow{BC}$ 設以 ΔC 表之,其向量可分解成為 x, y 二方向上之向量,即以向量和 (Vector sum) 之式表示之如下:

$$\Delta C = \Delta x \rightarrow \Delta y$$

但記號 $\rightarrow$ 表示向量之相加,如求合力時所用三角形定律之方法將數個向量由幾何學上作圖法而求其合成向量,同樣記號 $\rightarrow$ 用以表示向量之相減,即向量差 (Vector difference).

又 $\Delta x = x_2 - x_1$ 為 x 方向上之變位, $\Delta y = y_2 - y_1$ 為 y 方向上之

變位,如是則變位 $\vec{BC}$ 之大小爲

$$\Delta C = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$$

變位 $\vec{BC}$ 與 x 軸所成之角度爲

$$\tan \phi = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

同樣,變位 $\vec{B'}$ 亦可以向量差之式表之如下:

$$\Delta C = \rho_2 \rightarrow \rho_1$$

而變位 $\vec{BC}$ 之大小又可以下式示之.

$$\Delta C = \sqrt{\rho_1^2 + \rho_2^2 - 2\rho_1\rho_2 \cos \Delta\theta}$$

變位之單位即用長度之單位,如 cm., m., km., in., ft. 等等 變位可如合力與分力時,同樣用平行四邊形或三角形定律,合成之或分解之.

若物體之變位減成極小,即第410圖中 C 點與 B 點甚接近,則其極限可使弦 ΔC 與 B 點上曲線之切線相一致,故質點沿曲線上運動時,其任意一點上運動之方向與曲線上該點相切.

120. 角變位 在運動中之質點,其角變位(Angular displacement)者乃該點上動徑(Radius vector)與他基準線(Reference line)所成之角度是也.故第410圖中與線變位 ΔC 相應之角變位 $\Delta\theta$ 爲

$$\Delta\theta = \theta_1 - \theta_2$$

角變位之單位與角度之單位同. 如度數,迴轉數,或弧度

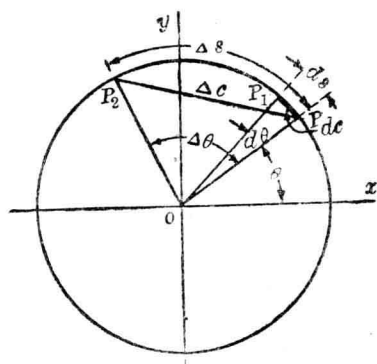
(Radian) 等是也。但一質點之角變位，因所取基準點 (Reference point) 或極點 (Pole) 而不同。動徑即視為迴轉於此極點之周圍。若質點運動於圓弧上時，則即取該圓半徑為動徑，而取該圓中心為極點。

121. 線變位與角變位間之關係 一質點若運動於圓弧上， P, P_1 二點設為圓弧上相離極近之二點，其線變位設為 dc ，其相應之角變位設為 $d\theta$ ，該圓弧半徑設為 r ，因 dc 與圓弧之長 ds 略相等，故

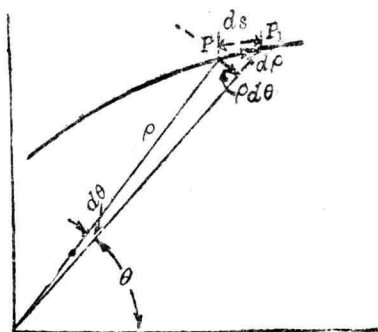
$$dc = ds = r d\theta$$

若 P, P_2 二點相離非極近時，則線變位 Δc 不等於 $r \Delta \theta$ ，但 Δs 仍等於 $r \Delta \theta$

若質點非運動於圓弧上，即質點徑路 (path) 之曲度半徑 (Radius of curvature) 非為一定時，則對於徑路上某點之曲度半徑設為 r ，取該點上曲度中心 (Center of curvature) 為極點在



第 411 圖



第 412 圖

該點附近 $dc = ds = rd\theta$ 之式仍可應用。

若極點不取於曲度中心上，如第 412 圖所示，取於座標軸之原點，則極近兩點 P, P_1 間之線變位可以下式表示之。

$$dc = ds = \rho d\theta + d\rho$$

即分解為互成直角之二變位以示之。上式中 ρ 為 P 點之動徑，非為該點上之曲度半徑。

122. 線速度與速 在運動中之質點，其**線速度** (Linear velocity) 者乃該質點之位置變化對於時間之比率，即線變位對於時間之比率也。質點徑路上某點之速度方向即與該點上運動方向相同，故即於該點上與徑路之曲線相切。換言之速度亦為向量，即有大小與方向之量。速度之大小稱為該質點之**速** (Speed)，故速為僅有大小而無方向之量，即為度量。換言之，速者乃質點所徑距離對於時間之比率，非為變位對於時間之比率也。

質點若沿任意之徑路為等速運動時，設於 Δt 時間內經過 Δs 之距離，則該質點之速 v 如下，但 Δs 為直線距離，即曲線上兩點間之弦長。

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} \dots\dots\dots (1)$$

質點若沿直線或曲線上為等速運動時，其速為一定，但速度則僅對於直線等速運動時為一定，蓋此時速度之方向不變而其大小亦不變。若對於曲線等速運動，則速度非一定。

因速度之方向隨處變化故也。

若質點爲變速運動時，則(1)式不能表示 Δt 時間內各點上之速，僅能表示在該時間內之平均速。各瞬間之速隨時變化。若時間縮爲極短時，則該時間內之平均速可視爲該瞬間之速。設某瞬間之速爲 v ，則

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt} \dots\dots\dots (2)$$

此 v 之方向，即與徑路相切於該瞬間內質點所佔之點上。

凡任何瞬間內速度相等之運動，即速度之大小與方向無變化。質點沿一直線進行之運動稱曰等速度運動 (Motion with uniform velocity)。否則稱爲變速度運動 (Motion with non-uniform velocity)。

速度之單位以 ft/sec., mi/hr., cm/sec. 等示之。(2)式若取微分而求 v 時，則須先將 s 寫成 t 之函數。

例1. 一質點進行於直線上，其變位與時間之關係爲 $s = 3t^2 + 2t + \frac{1}{t}$ ，但 s 以cm.， t 以秒表示之。問2秒後該點之速度。

$$\text{解 } v = \frac{ds}{dt} = \frac{d}{dt} \left(3t^2 + 2t + \frac{1}{t} \right) = 6t + 2 - \frac{1}{t^2}$$

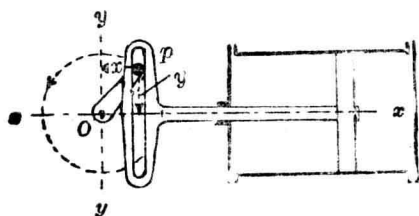
$t = 2$ 秒時

$$v = 6 \times 2 + 2 - \frac{1}{2^2} = 13.75 \text{ cm/sec.}$$

例2 第413圖示一史高基式叉頭 (Scotch crosshead)，當曲

柄 (Crank) 迴轉時, 活塞 (Piston) 前後運動於直線上. 設曲柄銷釘 (Crank pin) P 之位置爲

x, y ; 曲柄長 OP 爲 r , 每單位時間內曲柄之迴轉數爲 n , 求活塞速度之一般公式. 又設 $r = 22.5 \text{ cm.}$, $n = 150 \text{ r. p. m.}$



第 413 圖

求 (i) $x = 7.5 \text{ cm.}$; y 爲正; 及 (ii) $x = 7.5 \text{ cm.}$, y 爲負時活塞之速度. 但曲柄之迴轉爲反時針方向.

解 今取活塞衝程 (Stroke) 中點爲原點, 自此點活塞之變位設爲 s , 且該點取爲時間 t 之起點. 先求 s 與 t 之關係式如下. 設 θ 爲曲柄與水平所成之角, 每單位時間內曲柄銷釘 P 之角變位爲 $2\pi n$ (弧度), 故時間 t 後 P 之角變位即

$$\theta = 2\pi n t, \quad \text{但 } s = x, \quad x = r \cos \theta,$$

$$\therefore s = r \cos 2\pi n t \dots\dots\dots (1)$$

對於 t 取微分, 得

$$v = -2\pi n r \sin 2\pi n t \dots\dots\dots (2)$$

或由 1 式得

$$\sin 2\pi n t = \sqrt{1 - (\cos 2\pi n t)^2} = \sqrt{1 - \frac{s^2}{r^2}},$$

故得

$$v = -2\pi n r \sqrt{1 - \frac{s^2}{r^2}} \dots\dots\dots (3)$$

此卽爲活塞速度以 s 表示時之一般公式.

若 $r = 22.5 \text{ cm.}$, $n = 150 \text{ r. p. m.}$

則 (2) 式成爲 $v = -112.5 \pi \sin 5\pi t$

但 t 以秒表之, v 以 cm/sec. 表之, 對於 (i) 之位置, 即 $s = 7.5 \text{ cm.}$,

$$\theta = \cos^{-1} \frac{7.5}{22.5} = 70^\circ 30', \quad \therefore t = 0.0782 \text{ 秒,}$$

代入 (2) 式得 $v = -333 \text{ cm/sec.}$

此負號表示活塞向左運動. 對於 (ii) 之位置,

$$\theta = 289^\circ 30' \quad \therefore t = 0.322 \text{ 秒}$$

代入 (2) 式得 $v = 333 \text{ cm/sec.}$

此正號表示活塞向右運動. 上之結果由 (3) 式求之亦同.

123. 角速度 在運動中之物體, 其角速度 (Angular velocity) 者乃該質點之角變位對於時間之比率是也. 若任何相等時間內其角變位皆相等時, 則於 Δt 時間內有角變位 $\Delta\theta$ 之質點, 其角速度 ω 爲

$$\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

若相等時間內, 角變位不相等時, 則上式之 ω 僅表示 Δt 時間內之平均角速度. 此時極短時間內之平均角速度可視爲該瞬間之角速度, 即

$$\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt}$$

角速度之單位以 deg/sec. , rad/sec. , 或 r. p. m. 等表示之.

由上式求角速度時, 先須將 θ 寫成 t 之函數.

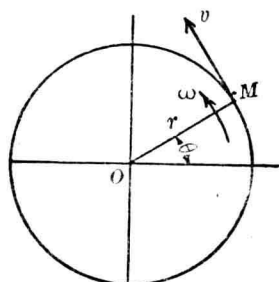
124. 線速度與角速度間之關係 分速度 設質點 M 運

動於第 414 圖之圓周上, 圓之半徑設為 r , 設 M 點於某瞬間之線速度為 v , 角速度為 ω , 則

$$v = \frac{ds}{dt}, \quad \omega = \frac{d\theta}{dt}$$

由第 414 圖得

$$ds = r d\theta$$

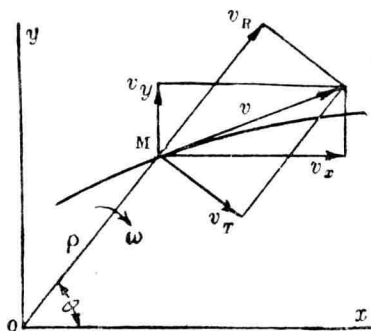


第 414 圖

$$\therefore v = \frac{r d\theta}{dt} = r\omega \quad \dots\dots\dots (1)$$

若質點不於圓周上運動, 則視 r 為質點徑路上該瞬間所佔位置之點之曲度半徑, ω 為對於該點上曲度中心為極點時之角速度, 上式 $v = r\omega$ 仍可應用.

次設質點運動於任意之曲線徑路, 而極點不取於曲度中心時, 如第 415 圖, 設 ρ 為某瞬間時質點 M 所佔位置處之動徑. 此時 M 處之線速度 v 與徑路相切. 此速度可分成二個分速度 (Component of velocity). 通常有二種分解方法, 即 (i) 分成平行於座標軸



第 415 圖

之軸向分速度 (Axial components of velocity) v_x, v_y, v_z , 或 (ii) 分成

動徑方向之徑向分速度 (Radial component of velocity) v_R 及與動徑成直角之橫向分速度 (Transverse component of velocity) v_T 如圖所示因線速度乃位置變化對於時間之比率,故得下式

$$v_x = \frac{dx}{dt}, \quad v_y = \frac{dy}{dt}, \quad v_z = \frac{dz}{dt} \dots\dots\dots (2)$$

若 x, y, z 座標之變化為均一時,則

$$v_x = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}, \quad v_y = \frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{y_2 - y_1}{t_2 - t_1}, \quad v_z = \frac{\Delta z}{\Delta t} = \frac{z_2 - z_1}{t_2 - t_1}$$

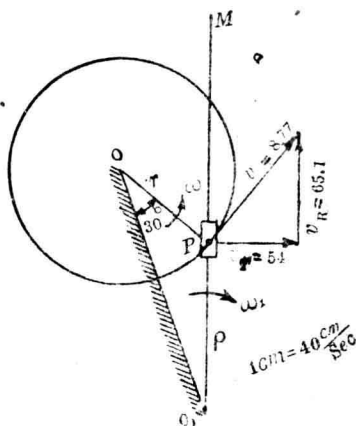
同樣得

$$v_R = \frac{d\rho}{dt}, \quad v_T = \rho \frac{d\theta}{dt} = \rho\omega \dots\dots\dots (3)$$

但 $d\rho$ 與 $d\theta$ 為 dt 時間內質點沿徑方向及與動徑成直角方向之變位,而 ω 為對於極點 O 之角速度,若極點取於曲度中心上時,則橫向分速度即為總速度 v ,而與徑路相切,徑向分速度 v_R 為零,換言之若徑路為圓弧而極點在於其中心上時,或極點在於任意曲線徑路之曲度中心上時,則 $d\rho$ 及 $\frac{d\rho}{dt}$ 皆為零,而 v_T 與 v 相同,皆等於 $\rho\omega$.

因第 415 圖上之極點 O 為任意取定者,故若極點改變時, M 點之 v_T 與 v_R 均有變動,但 M 點之 v_x, v_y, v_z 對於 O 點之位置無關係,苟座標軸方向不變時,此三分速度常為一定,若為平面運動時,則 v_z 為零。

例1 第416圖所示之機構 (Mechanism) O 與 O_1 為固定 P 點運動於 O 之圓周上, O_1M 桿因之前後搖動於 O_1 點。設 $\overline{OO_1}$ 為 45 cm, 曲柄 $\overline{OP}$ 為 20 cm, 曲柄之角速度為 40 r. p. m., 求 P 點速度又試用圖解法求 P 點速度之直交於 O_1M 桿之分速度, 并求 O_1M 桿之角速度。



第416圖

解 設 P 點對於圓周中心 O 之角速度為 ω , 對於 O_1 極點之角速度為 ω_1 , $\overline{O_1P}$ 之長為 ρ , 則 P 點之線速度與圓周相切其大小如下:

$$v = \omega r = \frac{40 \times 2\pi}{60} \times 20 = 87.7 \text{ cm/sec.}$$

用作圖法將 v 分成二分速度, 得

$$v_r = 54 \text{ cm/sec.}, \quad v_R = 65.1 \text{ cm/sec.}$$

但
$$v_r = \omega_1 \rho = \omega_1 \times O_1P$$

但由三角形 OPC_1 解得

$$O_1P = 29.5 \text{ cm.}$$

$$\therefore \omega_1 = \frac{54}{29.5} = 1.83 \text{ rad/sec.} = 17.6 \text{ r. p. m}$$

例2 一質點由原點出發, 沿曲線 $y = \frac{1}{4}x^2$ 運動, 使水平分速度常為 2 m./sec. 求該質點在二秒末之速度。

解 因 $v_x = 2$, $x = \int v_x dt = 2t + C$, 因 $x = 0$ 時, $t = 0$, 故 $C = 0$,
 因之 $x = 2t$, 又 $y = \frac{1}{4}x^2 = t^2$, $v_y = \frac{dy}{dt} = 2t$, 故 $t = 2$ 時, $v_x = 2$, 其方
 向向右. $v_y = 4$, 其方向向上. 故速度 v 向右上方, 其大小為

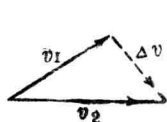
$$v = \sqrt{2^2 + 4^2} = 4.47 \text{ m./sec.}$$

此速度與水平所成之角 θ 為

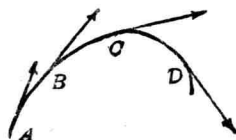
$$\theta = \tan^{-1} \frac{4}{2} = 63^\circ 26'.$$

125. 線加速度 運動中一質點於某瞬間內之加速度者
 乃該瞬間質點之速度變化對於時間之比率是也.

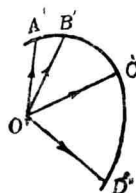
速度之方向及大小均有變化, 某瞬間內變化之總量為
 該瞬間內速度增量 (Velocity-increment), 其符號當然可有正
 負, 設 v_1 = 初速度, v_2 = 終速度, Δv = 速度增量, 則 $v_1 + \Delta v = v_2$,
 $\Delta v = v_2 - v_1$. 此關係可示於第 417 圖. Δv 非表示 v_2 與 v_1 間大小
 之相差. 速度由 v_1 變化為 v_2 時, 速度增量 Δv 非起於同一瞬間
 速度之變化乃於某時間內連續起生. 第 418 圖中質點 P 沿曲
 線運動, 次第經過 A, B, C, D 等點. 各點上作切線表示該點上



第 417 圖



第 418 圖

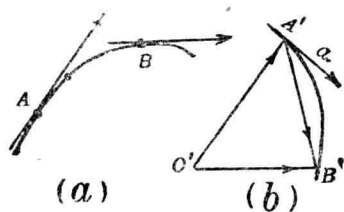


第 419 圖

速度之向線。今設由一點 O' 作此等速度向線，如第 419 圖之 $O'A'$, $O'B'$, $O'C'$, $O'D'$ 等。其 A' , B' , C' , D' 等點可以一平滑曲線連結之。此曲線稱曰質點 P 之速端曲線 (Hodograph)。質點自 A 運動至 B 時，速度之變化自 $O'A'$ 變為 $O'B'$ ，故 A' , B' 等點各與 A , B 等點相應。由速端線可決定各瞬間之速度增量。例如質點自 A 變位至 B 時，該時間中速度之增量為 $\overrightarrow{A'B'}$ 向量；質點自 B 變位至 D 時，速度增量為 $\overrightarrow{B'D'}$ 向量。速端曲線上設有 P' 點運動，與徑路上 P 點相對應，則 P' 點運動遲緩時，速度之變化亦遲緩，若 P' 點運動急速時，速度之變化亦急速。 P 點運動之方向即為速度增量之方向。

因速度增量為向量，故加速度亦為向量。設加速度之大小為 a ，某時間內之平均加速度為該時間內速度增量以時間除得之值，其方向與速度增量相同。若時間極短時，則該短時間內平均加速度可視為該瞬間之加速度。

第 420 圖 (a) 示質點 P 之徑路，於 Δt 時間內質點由 A 至 B ，其間速度變化之速端曲線示於第 420 圖 (b)， A 點之速度為



第 420 圖

$O'A'$, B 點之速度爲 $O'B'$, Δt 時間內速度增量爲 $\overrightarrow{A'B'}$, 若 B 點無限接近於 A 點時, 則 A 點上加速度之大小即等於(弦 $A'B' \div \Delta t$)之極限值, 故

$$\alpha = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\overrightarrow{A'B'}}{\Delta t} = \frac{ds}{dt}$$

因 B 點極接近於 A 時, B' 亦極接近於 A' , $A'B'$ 弦之極限略等於 $A'B'$ 弧, 此極小之 $A'B'$ 弧長以 ds' 表之, 上式示 A 點加速度之大小, 其方向則爲 B 極近於 A 時, 速度增量 $A'B'$ 之極限方向, 由第 420 圖 (b) 知此極限方向切於速端曲線上之 A' 點, 如圖中之向線 a 所示。

質點運動於直線上時, 速度之方向無變化, 僅可變其大小, 此時之速端曲線亦爲一直線, 加速度之向線亦與該直線相一致, 若質點運動於曲線上, 則速度必變其方向而亦可變其大小, 即質點若無加速度時, 不能爲曲線運動。

質點之加速度在任何瞬間內其大小與方向均爲一定之運動, 稱曰等加速度運動 (Motion with uniform acceleration); 直線運動時可有等加速度運動, 若加速度之大小或方向時有變化者, 稱曰變加速度運動 (Motion with non-uniform acceleration), 曲線運動必爲變加速度運動。

加速度之單位爲 cm./sec^2 , ft./sec^2 , mi./hr./sec . 等等。

126. 切線加速度與法線加速度 質點作曲線運動時, 其加速度無論在任何瞬間可分成二分加速度 (Components