2013 高中数学联赛备考手册

（预赛试题集锦）

中国数学会普及工作委员会　组编
各省市数学会　联合编写

Mathematics

著名商标 上海市
ECNUP
华东师范大学出版社
全国百佳图书出版单位

2013

高中数学联赛备考手册

（预赛试题集锦）

中国数学会普及工作委员会　组编

安徽省数学会　福建省数学会
甘肃省数学会　贵州省数学会
河北省数学会　河南省数学会
黑龙江省数学会　湖北省数学会
湖南省数学会　吉林省数学会
江苏省数学会　江西省数学会
辽宁省数学会　山东省数学会
山西省数学会　陕西省数学会
四川省数学会　天津市数学会
浙江省数学会　新疆维吾尔自治区数学会

联合编写

华东师范大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高中数学联赛备考手册. 2013：预赛试题集锦/中国数学会普及工作委员会组编. —上海：华东师范大学出版社，2012. 11
ISBN 978 - 7 - 5675 - 0066 - 2

Ⅰ. ①高…　Ⅱ. ①中…　Ⅲ. ①数学课—高中—试题
Ⅳ. ①G634. 605

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 274480 号

高中数学联赛备考手册(2013)
(预赛试题集锦)

组 编 者　中国数学会普及工作委员会
策划编辑　倪　明(数学工作室)
组稿编辑　孔令志
审读编辑　徐惟简　孔令志
装帧设计　黄惠敏

出版发行　华东师范大学出版社
社　　址　上海市中山北路 3663 号　邮编 200062
网　　址　www. ecnupress. com. cn
电　　话　021 - 60821666　行政传真 021 - 62572105
客服电话　021 - 62865537　门市(邮购)电话 021 - 62869887
地　　址　上海市中山北路 3663 号华东师范大学校内先锋路口
网　　店　http://hdsdcbs. tmall. com

印 刷 者　上海崇明裕安印刷有限公司
开　　本　890 × 1240　32 开
印　　张　7.5
字　　数　197 千字
版　　次　2013 年 1 月第一版
印　　次　2013 年 1 月第一次
书　　号　ISBN 978 - 7 - 5675 - 0066 - 2/G · 6005
定　　价　20.00 元

出 版 人　朱杰人

编委会成员

（按拼音为序）

前　言

《高中数学联赛备考手册(2013)(预赛试题集锦)》即将出版,这已经是该套丛书的第五本了.该丛书记录了几年来随着相关政策的调整,我们对全国高中数学联赛进行不断改革的轨迹,其中凝聚着很多同仁的辛苦.

2012年的全国高中数学联赛是在10月14日进行的.在各赛区初评的基础上,复评工作于11月11日至14日在西安进行,中国数学会和陕西省数学会的相关负责人参加.经过复评,确定了“2012年全国高中数学联赛赛区一等奖名单”,31个赛区共有1281名同学获得赛区一等奖.确定“2013年冬令营营员名单”,有312名同学取得了参加2013年沈阳冬令营的资格.

去年和今年是政策调整前过渡期的关键两年,由于我们有效地改变了试卷的传送方式,使得过渡期平稳顺利.在此谨向今年活动的承办单位:陕西省数学竞赛委员会的各位同志、特别是吕振琪教授表示衷心的感谢.

从明年开始,全国高中数学联赛赛区一等奖的同学将不再具有保送生资格,但是从前不久中国科协召开的五项学科竞赛联席会议上得到的消息:今后赛区一等奖初评、复评、产生、公示的方式依旧;获奖名单依旧在教育部阳光高考网站上公布;获奖证书依旧由中国科协统一印制.

相信全国高中数学联赛依旧是一项广受中学生欢迎的数学课外活动.

吴建平

2012年12月10日

目　录

01

2012年全国高中数学联赛天津市预赛

2012年高中数学联赛天津市预赛于2012年9月16日举行，共有五千多名中学生参加此次预赛，并从中选拔出约一千名学生参加于10月14日举行的全国高中数学联赛.

天津市预赛所涉及的知识范围基本参照现行《全日制普通高级中学数学教学大纲》中所规定的教学内容和要求，但在方法的要求上有所提高. 主要考查学生对基本知识和基本技能的掌握情况，以及综合、灵活运用知识的能力. 试卷包括6道选择题、6道填空题和3道解答题，全卷满分150分，考试时间为两小时.

预赛的命题工作由天津市数学会负责，组织工作由科协五学科竞赛管理委员会办公室负责，阅卷及报送参加全国高中数学联赛的名单由各区县教研室具体实施.

试　题

一、选择题(每小题 6 分,共 36 分)

1　数列$\{a_n\}$的前 n 项和 $S_n=n^2-2n$,则 a_3+a_{17}等于(　　).

(A) 36　　(B) 35　　(C) 34　　(D) 33

2　若 $x>1$,则 $x^{\ln\ln x}-(\ln x)^{\ln x}$的值是(　　).

(A) 正数　　(B) 零

(C) 负数　　(D) 以上皆有可能

3　如果$\triangle ABC$ 中,A、B 为锐角,且 $\sin^2 A+\sin^2 B=\sin C$,则对$\triangle ABC$ 的形状描述最准确的是(　　).

(A) 直角三角形　　(B) 等腰三角形

(C) 等腰直角三角形　　(D) 以上均不对

4　设椭圆与 x 轴交于A、B 两点,已知对于椭圆上不同于 A、B 的任意一点 P,直线 AP 与 BP 的斜率之积均为$-\frac{1}{2}$,则椭圆的离心率为(　　).

(A) $\frac{1}{\sqrt{3}}$　　(B) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$　　(C) $\frac{1}{2}$　　(D) $\frac{1}{\sqrt{2}}$

5　在正四面体 $ABCD$ 中,M、N 分别是BC 和 DA 的中点,则直线 AM 和BN 所成角的余弦值是(　　).

(A) $\frac{1}{3}$　　(B) $\frac{1}{2}$　　(C) $\frac{2}{3}$　　(D) $\frac{3}{4}$

6　在半径为 1 的球面上有不共面的四个点 A、B、C、D,且 $AB=CD=x$, $BC=DA=y$, $CA=BD=z$.则 $x^2+y^2+z^2$ 等于(　　).

(A) 2　　(B) 4　　(C) 8　　(D) 16

二、填空题(每小题 9 分,共 54 分)

7　函数 $y=1+\cos x$, $x\in[-\pi,\pi]$的图象与 x 轴围成的区域的面积是________.

8 已知 $ABCDEF$ 是边长为 2 的正六边形，一条抛物线经过 A、B、C、D 四点，则该抛物线的焦点到准线的距离是________.

9 如果复数 z 满足 $|z|=1$，且 $z^2=a+b\mathrm{i}$，其中 a、b 为实数，则 $a+b$ 的最大值是________.

10 函数 $y=|x-1|+|x-2|+\cdots+|x-10|$ 的最小值是________.

11 极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{2^2}\right)\left(1-\dfrac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)=$________.

12 如果对一切正实数 x、y，都成立不等式 $\dfrac{y}{4}-\cos^2 x\geqslant a\sin x-\dfrac{9}{y}$，则实数 a 的取值范围是________.

三、**解答题**（每小题 20 分，共 60 分）

13 如果双曲线的两个焦点坐标分别为 $F_1(-2,0)$ 和 $F_2(2,0)$，双曲线的一条切线交 x 轴于 $Q\left(\dfrac{1}{2},0\right)$，且斜率为 2.

(1) 求双曲线的方程；

(2) 设该切线与双曲线的切点为 P，求证：$\angle F_1PQ=\angle F_2PQ$.

14 电脑每秒钟以相同的概率输出一个数字 1 或 2. 将输出的前 n 个数字之和被 3 整除的概率记为 P_n. 证明：(1) $P_{n+1}=\dfrac{1}{2}(1-P_n)$；(2) $P_{2012}>\dfrac{1}{3}$.

15 三次函数 $f(x)=4x^3+ax^2+bx+c$（其中 $a,b,c\in\mathbf{R}$）满足：当 $-1\leqslant x\leqslant 1$ 时，$-1\leqslant f(x)\leqslant 1$. 求 a、b、c 的所有可能取值.

解　答

1 C　提示：当 $n>1$ 时，$a_n=S_n-S_{n-1}=2n-3$，因此 $a_3+a_{17}=34$.

2 B 提示：设 $y=\ln x$，则 $x=e^y$，原式 $=(e^y)^{\ln y}-y^y=0$.

3 A 提示：若 $A+B>\frac{\pi}{2}$，则 $\sin A>\cos B$，$\sin B>\cos A$，从而

$\sin^2 A+\sin^2 B>\sin A\cos B+\sin B\cos A=\sin(A+B)=\sin C$，

与所给条件矛盾. 同理，若 $A+B<\frac{\pi}{2}$，则也导致矛盾. 所以 $A+B=\frac{\pi}{2}$.

4 D 提示：不妨设 $A(1,0)$、$B(-1,0)$，又设 $P(x,y)$，则直线 AP 的斜率为 $\frac{y}{x-1}$，直线 BP 的斜率为 $\frac{y}{x+1}$. 依题意得

$$\frac{y}{x-1}\cdot\frac{y}{x+1}=-\frac{1}{2}.$$

由此得到椭圆方程为 $x^2+2y^2=1$. 可得离心率为 $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

5 C 提示：不妨设正四面体棱长为 1，则

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}=1,\quad \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DB}=\frac{1}{2},$$

$$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2},\quad \overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DB}=0.$$

现在 $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$，$\overrightarrow{NB}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DB})$，所以

$$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{NB}=\frac{1}{4}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})\cdot(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DB})=\frac{1}{2}.$$

而 $|\overrightarrow{AM}|=|\overrightarrow{NB}|=\frac{\sqrt{3}}{2}$，所以 AM 与 BN 所成角的余弦值是

$$\frac{\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{NB}}{|\overrightarrow{AM}||\overrightarrow{NB}|}=\frac{2}{3}.$$

6 C 提示：构造一个长方体，使得 $ABCD$ 的六条棱分别是长方体某个面的对角线. 这时，长方体的体对角线长为 $\sqrt{(x^2+y^2+z^2)/2}$，它恰好等于外接球面的直径，故 $x^2+y^2+z^2=8$.

7 2π 提示：作出四条直线 $y=2$, $x=-\pi$, $x=\pi$, $y=0$，则所给函数的图象落在上述四条直线所围成的长方形内部，且关于 y 轴对称. 在第一象限内的部分，函数图象关于点 $\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$ 成中心对称，因此这部分函数图象与 x 轴、y 轴所围成区域的面积，等于相应长方形面积的一半. 进而整个函数图象与 x 轴围成的区域面积为前述长方形面积的一半，即 2π.

8 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 提示：建立平面坐标系，使得 A、B、C、D 的坐标分别为 $(-2, \sqrt{3})$、$(-1, 0)$、$(1, 0)$、$(2, \sqrt{3})$，则可求得该抛物线方程为 $\sqrt{3}y=x^2-1$. 因此该抛物线焦点到准线的距离为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

9 $\sqrt{2}$ 提示：由 $|z|=1$ 可知 $|z^2|=1$，即 $a^2+b^2=1$. 因此

$$(a+b)^2 \leqslant 2(a^2+b^2)=2.$$

故 $a+b \leqslant \sqrt{2}$，且当 $a=b=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时等号可以成立. 故 $a+b$ 的最大值是 $\sqrt{2}$.

10 25 提示：我们有

$$|x-1|+|x-10| \geqslant |(x-1)-(x-10)|=9,$$

且等号当 $x \in [1, 10]$ 时成立. 同理，$|x-2|+|x-9| \geqslant 7$, …, $|x-5|+|x-6| \geqslant 1$，且等号分别当 $x \in [2, 9]$, …, $x \in [5, 6]$ 时成立. 因此，

$$y \geqslant 9+7+\cdots+1=25,$$

且当 $x \in [5, 6]$ 时等号成立. 故所求最小值为 25.

11 $\frac{1}{2}$ 提示：由于

$$\begin{aligned}\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right) &= \prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k}\right)\prod_{k=2}^{n}\left(1+\frac{1}{k}\right) \\ &= \prod_{k=2}^{n}\frac{k-1}{k}\prod_{k=2}^{n}\frac{k+1}{k}=\frac{1}{n}\cdot\frac{n+1}{2}.\end{aligned}$$

故所求极限为$\frac{1}{2}$.

12 $[-3, 3]$ 提示:依题意,$\cos^2 x + a\sin x \leqslant \frac{y}{4} + \frac{9}{y}$对一切正实数 x、y 成立,则左端必小于等于右端的最小值 3. 令 $t = \sin x$,则

$$-t^2 + at \leqslant 2, \ t \in [-1, 1].$$

取 $t = -1$,得 $a \geqslant -3$;取 $t = 1$,得 $a \leqslant 3$. 而且当 $a \in [-3, 3]$ 时,易证 $-t^2 + at \leqslant 2$ 对任意 $t \in [-1, 1]$ 成立. 故 a 的取值范围是 $[-3, 3]$.

13 **方法一** 设双曲线方程为$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. 由于它与直线 $y = 2\left(x - \frac{1}{2}\right)$ 即 $y = 2x - 1$ 相切,所以方程组

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1, \\ y = 2x - 1, \end{cases}$$

只有唯一一组解,这样,关于 x 的方程

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{(2x-1)^2}{b^2} = 1$$

有两个相等的实根,其判别式等于零,所以有

$$\left(\frac{4}{b^2}\right)^2 - 4\left(\frac{1}{a^2} - \frac{4}{b^2}\right)\left(-\frac{1}{b^2} - 1\right) = 0.$$

整理得 $b^2 - 4a^2 + 1 = 0$.

注意双曲线的两个焦点坐标分别为$(-2, 0)$和$(2, 0)$,所以其半焦距为 $c = 2$. 这样 $a^2 + b^2 = 4$. 与前述方程联立解得 $a^2 = 1$, $b^2 = 3$. 因此双曲线方程为 $x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$.

由于 $a^2 = 1$, $b^2 = 3$,前述关于 x 的方程成为 $x^2 - \frac{(2x-1)^2}{3} = 1$,从中解得 $x = 2$,代入 $y = 2x - 1$ 得 $y = 3$. 这表明切点 P 的坐标

为(2, 3).

因此 F_1P 的斜率为

$$k=\frac{3-0}{2-(-2)}=\frac{3}{4},$$

可见

$$\tan\angle F_1PQ=\frac{t-k}{1+kt}=\frac{1}{2},$$

其中 $t=2$ 是切线 PQ 的斜率. 注意 F_2 与 P 的横坐标相同,所以 F_2P 平行于 y 轴, $\tan\angle F_2PQ=\frac{1}{t}=\frac{1}{2}$. 所以 $\tan\angle F_1PQ=\tan\angle F_2PQ$, $\angle F_1PQ=\angle F_2PQ$.

方法二 设双曲线方程为 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$. 由于半焦距 $c=2$,可知 $a^2+b^2=4$.

又设 $P(x_0, y_0)$,则 P 点切线的方程为

$$\frac{x_0x}{a^2}-\frac{y_0y}{b^2}=1.$$

与所给的切线方程 $y=2\left(x-\frac{1}{2}\right)$即 $2x-y=1$ 比较可知

$$x_0=2a^2, y_0=b^2.$$

将之代入 $\frac{x_0^2}{a^2}-\frac{y_0^2}{b^2}=1$ 可得

$$4a^2-b^2=1.$$

与 $a^2+b^2=4$ 联立,就解得 $a^2=1$, $b^2=3$. 因此双曲线方程为 $x^2-\frac{y^2}{3}=1$.

进一步,切点坐标为 $(x_0, y_0)=(2a^2, b^2)=(2, 3)$,以下同方法一.

14 **方法一** 这 n 个数字共有 2^n 种可能情形. 设其中数字和被 3

整除的有 x_n 种，则不被 3 整除的有 $2^n - x_n$ 种. 对于 $n+1$ 个数字的情形，如果其和被 3 整除，则前 n 个数字之和不被 3 整除；反之，对于前 n 个数字之和不被 3 整除的每种情形，有唯一的第 $n+1$ 个数字可使前 $n+1$ 个数字之和被 3 整除. 因此，我们有

$$x_{n+1} = 2^n - x_n.$$

这就表明，概率 $P_n = \frac{x_n}{2^n}$ 满足递推关系式 $P_{n+1} = \frac{1}{2}(1 - P_n)$.

注意上式也可写作

$$P_{n+1} - \frac{1}{3} = \left(-\frac{1}{2}\right)\left(P_n - \frac{1}{3}\right),$$

这就表明数列 $\left\{P_n - \frac{1}{3}\right\}$是公比为 $-\frac{1}{2}$ 的等比数列，且首项为 $P_1 - \frac{1}{3} = -\frac{1}{3} < 0$. 故 $P_{2012} - \frac{1}{3} = \left(-\frac{1}{2}\right)^{2011}\left(P_1 - \frac{1}{3}\right) > 0$，即 $P_{2012} > \frac{1}{3}$.

方法二 输出的前 n 个数字之和被 3 整除的概率为 P_n，则不被 3 整除的概率为 $1 - P_n$. 要使输出的前 $n+1$ 个数字之和被 3 整除，则必须使前 n 个数字之和不被 3 整除，且这时第 $n+1$ 个数字也随之确定. 所以由条件概率的公式即得

$$P_{n+1} = \frac{1}{2}(1 - P_n).$$

以下同方法一.

方法三 这 n 个数字共有 2^n 种可能情形. 下面计算其和被 3 整除的有多少种，这等于多项式 $f(x) = (x + x^2)^n$ 的展开式中 x^3，x^6，…，等项的系数之和，进而等于

$$\frac{1}{3}(f(1) + f(\omega) + f(\bar{\omega})),$$

其中 $\omega = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$ 为三次单位根，$\bar{\omega}$ 是其共轭复数. 不难算得上式等于$\frac{1}{3}(2^n + 2(-1)^n)$. 因此所求的概率为 $P_n = \frac{1}{3}\left(1 + 2\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right)$.

据此,即可验证 $P_{n+1}=\frac{1}{2}(1-P_n)$ 及 $P_{2012}>\frac{1}{3}$.

15 由题意,当 $x=\pm1$, $\pm\frac{1}{2}$时,均有$-1\leqslant f(x)\leqslant1$. 所以

$$-1\leqslant 4+a+b+c\leqslant 1,\ -1\leqslant 4-a+b-c\leqslant 1,$$
$$-1\leqslant \frac{1}{2}+\frac{a}{4}+\frac{b}{2}+c\leqslant 1,\ -1\leqslant \frac{1}{2}-\frac{a}{4}+\frac{b}{2}-c\leqslant 1.$$

前两式相加,得 $-2\leqslant 8+2b\leqslant 2$,从而 $b\leqslant -3$. 后两式相加,得 $-2\leqslant 1+b\leqslant 2$,从而$b\geqslant -3$. 因此$b=-3$. 代入前述不等式,可得 $a+c=0$, $\frac{a}{4}+c=0$,从而 $a=c=0$.

下面证明 $f(x)=4x^3-3x$ 满足题中所说的条件. 事实上,若 $-1\leqslant x\leqslant 1$,则可令 $x=\cos t$, $t\in\mathbf{R}$,这时

$$f(x)=f(\cos t)=4\cos^3 t-3\cos t=\cos 3t.$$

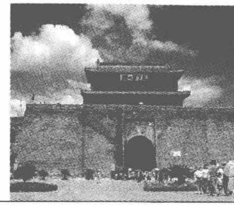
由于$-1\leqslant\cos 3t\leqslant1$,所以$-1\leqslant f(x)\leqslant1$.

综上,$a=0$, $b=-3$, $c=0$.

天津

02

2012 年全国高中数学联赛河北省预赛



受河北省数学会委托，河北省数学会普及工作委员会会同河北师范大学数学与信息科学学院共同组织承办了 2012 年河北省高中数学竞赛.

2012 年河北省高中数学竞赛分高二、高三两个年级组分别进行，所涉及的知识范围不超出现行《全日制普通高中课程标准》中所规定的教学内容和要求，在方法和要求上略有提高. 主要考查学生对基础知识和基本技能的掌握情况，以及综合、灵活运用知识的能力. 两份试卷均包括 8 道填空题和 6 道解答题，全卷满分 150 分. 竞赛活动时间在 2012 年 9 月 16 日(星期日)上午. 参加比赛的学生涉及河北省 11 个地市的高中生共计 72 000 余人. 通过比赛，将根据成绩按赛区选拔 1800 名同学参加 2012 年全国高中数学联赛.

高二年级组试题

一、填空题(每小题 8 分,共 64 分)

1　已知集合 $A=\{x\mid 5x-a\leqslant 0,\ a\in\mathbf{N}\}$,若 $5\in A\cap\mathbf{Z}$,则 a 的最小值为________.

2　已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$满足 $f(x+1)=f(-x)$,且 $f(x)=\begin{cases}1, & -1<x\leqslant 0,\\ -1, & 0<x\leqslant 1,\end{cases}$ 则 $f(f(3.5))=$________.

3　$\triangle ABC$ 中,$\overrightarrow{AB}$与$\overrightarrow{BC}$的夹角为 $150°$,$|\overrightarrow{AC}|=2$,则$|\overrightarrow{AB}|$的范围是________.

4　已知点 M、N 的坐标都满足不等式组 $\begin{cases}x\geqslant 0,\\ y\geqslant 0,\\ x+2y\leqslant 6,\\ 3x+y\leqslant 12,\end{cases}$ $\vec{a}=(1,-1)$,则$\overrightarrow{MN}\cdot\vec{a}$ 的取值范围是________.

5　函数 $y=a^{x+3}-2\ (a>0$ 且 $a\neq 1)$ 的图象恒过定点 A,若点 A 在直线$\dfrac{x}{m}+\dfrac{y}{n}+1=0$ 上,且 $m,n>0$,则 $3m+n$ 的最小值为________.

6　已知点 P 是直线 $l:kx+y+4=0\ (k>0)$ 上一动点,PA、PB 是圆 $C:x^2+y^2-2y=0$ 的两条切线,A、B 是切点,若四边形 $PACB$ 的最小面积是 2,则 $k=$________.

7　在三棱锥 $A-BCD$ 中,侧棱 AB、AC、AD 两两垂直,$\triangle ABC$、$\triangle ACD$、$\triangle ADB$ 的面积分别为$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$、$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$、$\dfrac{\sqrt{6}}{2}$,则三棱锥 $A-BCD$ 的外接球的体积为________.

8　已知数列 a_n 满足:$a_1=m$ (m 为正整数),$a_{n+1}=\begin{cases}\dfrac{a_n}{2}, & \text{当 } a_n \text{ 为偶数时},\\ 3a_n+1, & \text{当 } a_n \text{ 为奇数时}.\end{cases}$ 若 $a_4=7$,则 m 的所有可能取值为

河北