2014命题人书系

考研数学①

命题人

高等数学基础指导

主编◎张宇　刘国辉

第1本为高等数学0基础考生编写的复习用书

在做题中学习，轻轻松松掌握基础知识
在学习中做题，不知不觉提升解题技能

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

考研数学①

命题人

高等数学基础指导

张宇 刘国辉 副主编◎

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

考研数学命题人高等数学基础指导 / 张宇，刘国辉主编. —北京 ：北京理工大学出版社，2013.1

ISBN 978－7－5640－7326－8

Ⅰ. ①考… Ⅱ. ①张… ②刘… Ⅲ. ①高等数学－研究生－入学考试－自学参考资料 Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 014248 号

出版发行 / 北京理工大学出版社
社　　址 / 北京市海淀区中关村南大街 5 号
邮　　编 / 100081
电　　话 / (010)68914775(办公室)　68944990(批销中心)　68911084(读者服务部)
网　　址 / http://www.bitpress.com.cn
经　　销 / 全国各地新华书店
印　　刷 / 三河市文阁印刷厂
开　　本 / 787 毫米×1092 毫米　1/16
印　　张 / 18.75
字　　数 / 400 千字
版　　次 / 2013 年 1 月第 1 版　2013 年 1 月第 1 次印刷
定　　价 / 32.80 元

责任编辑/ 张慧峰
责任校对/ 周瑞红
责任印制/ 边心超

图书出现印装质量问题，本社负责调换

序

——基础不牢　地动山摇

一、考研数学现状

考研数学，尤其是其中分量最重、难度最大的高等数学，一直以来是广大考研学子复习的最大障碍。大家在做题时总是遇到这样那样的困难，感觉到“磕磕绊绊”，不顺手，比如说：某个数学公式（尤其是三角公式）忘记了，某个函数（尤其是基本初等函数）的图形画错了，某个定理的前提忽略了，等等等等，不一而足。事实上，高等数学的概念、定理本身就很多、很复杂，要理解透彻很不容易，如果考生们基础再不扎实，那复习好高等数学真是难上加难了。很多考生努力寻找辅导书里一个又一个固定的题型，想着套题型就可以了，结果失败了；也有很多考生疯狂崇拜辅导书里众多花哨的技巧，想着玩技巧就搞定了，结果也失败了。**今天的考研数学，恰恰是淡化技巧，淡化题型，考基本概念，考基本方法，就是一句话：基础不牢，地动山摇。题型不好套，技巧不踏实。一届又一届的考生，痴迷于题型和技巧，花费了大量的精力，走了偏路，最后只能败下阵来。**

二、改变现状　走上正轨

考生朋友们一定要明白：概念清晰、思路明确、方法经典、计算熟练，就足以完胜考研了。如何达到以上要求，**一个基本前提，就是要在复习全程中，始终抓住基本功训练：反复记忆基本概念和性质、反复记忆基本公式和定理、反复记忆基本例题和习题。**我常说，背概念、背公式、背定理、背题目，数学一样可以通过背诵，达到扎实基础的目标。今天，我们很高兴看到，以刘国辉先生为首的一批有着丰富教学经验的老师，给考生们提供了这么一本极具价值的高等数学基础指导用书，他们以我所编写的教材和辅导书为蓝本，把教材和辅导书中没有过多提及的，考生们在复习过程中经常忘记的、做错的、常用的基本知识，做了全面的梳理和总结，在每个知识点后面，列出了评注和例题，非常有利于考生阅读之用。值得指出的是，本书数易其稿，以胡金德先生为首的几位前命题组的专家，仔细审阅并认真修改、评注了很多内容，给本书画龙点睛，增色极多。

三、寄语

2013 年考研的人数已经超过了 180 万，可以预见的是，今后几年，考研人数还会稳步增加，由此带来的竞争更加激烈，这是无法改变的事实。如何能够在考研中脱颖而出，考好数学是关键，而考好数学的关键，在于把握基础。偶尔仰望星空，更多地，要脚踏实地。那么就请致力于考研的同学们，从现在做起，从基础做起吧！

在复习过程中，如果有什么疑问，可以到我的微博来交流，地址是：http://weibo.com/zhangyu-maths. 我和我的教学团队的老师们愿意陪着大家一起，走过这让你一生都难忘的考研岁月。

张　宇

2013 年 1 月于北京

目录 Contents

第1讲 函 数

在中学阶段，我们主要学习的是初等数学，其研究对象基本上是不变的量.而进入大学以后，我们则进入了高等数学的学习领域.相应地，研究对象也发生了变化，由不变的量转为变动的量.进一步地，研究变量(因变量与自变量)之间关系的实质即为研究函数关系.因而，本讲的重点研究对象为函数，具体分为四块：集合与映射、函数的概念、函数的四大基本性质、函数的类型.

集合与映射

一、集合

1. 集合的概念

一般地，所谓集合(简称集)是指具有某种特定性质的事物的总体，组成这个集合的事物称为该集合的元素(简称元).

通常用大写字母 $A,B,C,\cdots$ 表示集合，用小写字母 $a,b,c,\cdots$ 表示集合的元素.例如：如果 a 是集合 A 的元素，就说 a 属于 A，记作 $a\in A$；如果 a 不是集合 A 的元素，就说 a 不属于 A，记作 $a\notin A$.

一个集合，若它只含有有限个元素，则称为有限集；不是有限集的集合称为无限集.

【评注】(1)表示集合的方法通常有两种：

一是列举法，就是把集合的全体元素一一列举出来表示.

例如：由元素 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 组成的集合 A，可表示成

$$A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}.$$

二是描述法，若集合 M 是由具有某种性质 P 的元素 x 的全体所组成的，就可表示成

$$M=\{x\mid x\text{ 具有某性质 }P\}.$$

例如：集合 B 是方程 $x^2-1=0$ 的解集，就可以表示成

$$B=\{x\mid x^2-1=0\}.$$

(2)对于数集，有时我们在表示数集的字母右上角标上“*”表示该数集内排除0的集，标上“+”来表示该数集内排除0与负数的集.

习惯上，全体非负整数即自然数的集合记作 $\mathbf{N}$，即

$$\mathbf{N}=\{0,1,2,\cdots,n,\cdots\}.$$

全体正整数的集合记作 $\mathbf{Z}$，即

$$\mathbf{Z}=\{\cdots,-n,\cdots,-2,-1,0,1,2,\cdots,n,\cdots\}.$$

全体有理数的集合记作 $\mathbf{Q}$，即

$$\mathbf{Q}=\left\{\frac{p}{q}\,\middle|\,p\in\mathbf{Z},q\in\mathbf{N}^+\text{ 且 }p\text{ 与 }q\text{ 互质}\right\}.$$

全体实数的集合记作 $\mathbf{R}$.其中，$\mathbf{R}^*$ 为排除0的实数集，$\mathbf{R}^+$ 为全体正实数的集.

2. 集合之间的相互关系

设 A,B 是两个集合，

①如果集合 A 的元素都是集合 B 的元素，则称 A 是 B 的子集，记作 $A\subset B$ 或 $B\supset A$.

②如果集合 A 与集合 B 互为子集，即 $A\subset B$ 且 $B\subset A$，则称集合 A 与集合 B 相等，记作 $A=B$.

③若 $A\subset B$ 且 $A\neq B$，则称 A 是 B 的真子集，记作 $A\subsetneqq B$.

④不含任何元素的集合称为空集，记作 $\varnothing$，且规定空集 $\varnothing$ 是任何集合 A 的子集，即 $\varnothing\subset A$.

3. 集合的运算及其法则

(1)集合的运算

集合的运算有以下几种：并、交、差.

设 A,B 是两个集合，

①由所有属于 A 或者属于 B 的元素组成的集合，称为 A 与 B 的并集(简称并)，记作 $A\cup B$，即

$$A\cup B=\{x\mid x\in A \text{ 或 } x\in B\}.$$

②由所有既属于 A 又属于 B 的元素组成的集合，称为 A 与 B 的交集(简称交)，记作 $A\cap B$，即

$$A\cap B=\{x\mid x\in A \text{ 且 } x\in B\}.$$

③由所有属于 A 而不属于 B 的元素组成的集合，称为 A 与 B 的差集(简称差)，记作 $A\setminus B$，即

$$A\setminus B=\{x\mid x\in A \text{ 且 } x\notin B\}.$$

④有时，我们将某个问题限定在一个大的集合 I 中进行，所研究的其他集合 A 都是 I 的子集，此时我们称集合 I 为全集或基本集. 称 $I\setminus A$ 为 A 的余集或补集，记作 A^C.

例如，在实数集 $\mathbf{R}$ 中，集合 $A=\{x\mid 0<x\leqslant 1\}$ 的余集就是 $A^C=\{x\mid x\leqslant 0 \text{ 或 } x>1\}$.

(2)集合的并、交、余满足的法则

设 A,B,C 为任意三个集合，则有下列法则成立：

①交换律

$$A\cup B=B\cup A;\qquad A\cap B=B\cap A.$$

②结合律

$$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C);$$
$$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C).$$

③分配律

$$(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C);$$
$$(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C).$$

④对偶律

$$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}\ \Leftrightarrow\ (A\cup B)^c=A^c\cap B^c;$$
$$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}\ \Leftrightarrow\ (A\cap B)^c=A^c\cup B^c.$$

4. 区间和邻域

(1)区间

区间是用得较多的一类数集，设 a 和 b 都是实数，且 $a<b$.

①数集 $\{x\mid a<x<b\}$ 称为开区间，记作 (a,b)，即

$$(a,b)=\{x\mid a<x<b\}.$$

a 和 b 称为开区间 (a,b) 的端点，这里 $a\notin(a,b)$，$b\notin(a,b)$.

②数集 $\{x\mid a\leqslant x\leqslant b\}$ 称为闭区间，记作 $[a,b]$，即

$$[a,b]=\{x\mid a\leqslant x\leqslant b\}.$$

a 和 b 也称为闭区间 $[a,b]$ 的端点，这里 $a\in[a,b]$，$b\in[a,b]$.

③类似地可说明：

$$[a,b)=\{x\mid a\leqslant x<b\},$$
$$(a,b]=\{x\mid a<x\leqslant b\}.$$

$[a,b)$ 和 $(a,b]$ 都称为半开区间.

【评注】(1)以上这些区间都称为有限区间.数 $b-a$ 称为区间长度.从数轴上看,这些有限区间是长度为有限的线段.闭区间 $[a,b]$ 与开区间 (a,b) 在数轴上表示出来,分别如图 1-1 与图 1-2 所示:

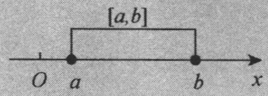

图 1-1

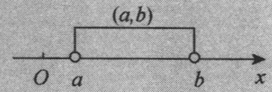

图 1-2

(2)此外,还有所谓无限区间,引进记号 $+\infty$ 及 $-\infty$,则可类似地表示无限区间.例如:

$$[a,+\infty)=\{x|x\geqslant a\},(-\infty,b)=\{x|x<b\}.$$

这两个无限区间在数轴上如图 1-3 与图 1-4 所示:

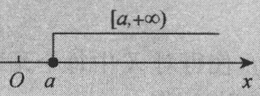

图 1-3

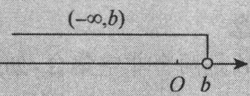

图 1-4

(3)全体实数的集合 $\mathbf{R}$ 也可记作 $(-\infty,+\infty)$,它也是无穷区间.

(4)以后在不需辨明所论区间是否包含端点,以及是有限区间还是无限区间的场合,我们就简单地称它为“区间”,且常用 I 表示.

下面我们来研究分析两道关于集合的运算的典型例题.

例 1 设 $A=(-\infty,-5)\cup(5,+\infty)$,$B=[-10,3)$,写出 $A\cup B$,$A\cap B$,$A\backslash B$ 及 $A\backslash(A\backslash B)$ 的表达式.

分析:由集合的 3 种基本运算(并、交、差)的概念可知:

$$A\cup B=(-\infty,3)\cup(5,+\infty);A\cap B=[-10,-5);$$
$$A\backslash B=(-\infty,-10)\cup(5,+\infty);A\backslash(A\backslash B)=[-10,-5).$$

【评注】$A\backslash(A\backslash B)=A\cap B$.

例 2 设 A,B 是任意两个集合,证明对偶律:$(A\cap B)^C=A^C\cup B^C$.

证明:如果 $\forall x\in(A\cap B)^C$,则 $x\notin A\cap B$,即 $x\in A$ 且 $x\notin B$,或 $x\in B$ 且 $x\notin A$.

所以 $x\in B^C$ 或 $x\in A^C$,即 $x\in A^C\cup B^C$,于是 $(A\cap B)^C\subset A^C\cup B^C$.

又如果 $\forall x\in A^C\cup B^C$,则 $x\notin A$ 或 $x\notin B$,所以 $x\notin A\cap B$,即 $x\in(A\cap B)^C$.于是 $A^C\cup B^C\subset(A\cap B)^C$.

所以,$(A\cap B)^C=A^C\cup B^C$.

(2)邻域

邻域也是一个经常用到的概念,以点 a 为中心的任何开区间称为点 a 的邻域,记作 $U(a)$.

设 δ 是任一正数,则开区间 $(a-\delta,a+\delta)$ 就是点 a 的一个邻域,这个邻域称为点 a 的 δ 邻域,记作 $U(a,\delta)$,即

$$U(a,\delta)=\{x|a-\delta<x<a+\delta\}.$$

点 a 称为邻域的中心,δ 称为邻域的半径,如图 1-5 所示:

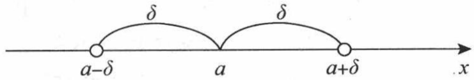

图 1-5

【评注】(1)由于 $a-\delta<x<a+\delta$ 相当于 $|x-a|<\delta$，因此

$$U(a,\delta)=\{x\,|\,|x-a|<\delta\}.$$

因为 $|x-a|$ 表示点 x 与点 a 间的距离，所以 $U(a,\delta)$ 表示与点 a 的距离小于 δ 的一切点 x 的全体.

(2)有时用到的邻域需要把邻域的中心去掉，点 a 的 δ 邻域去掉中心 a 后，称为点 a 的去心 δ 邻域，记作 $\mathring{U}(a,\delta)$，即 $\mathring{U}(a,\delta)=\{x\,|\,0<|x-a|<\delta\}$，这里 $0<|x-a|$ 就表示 $x\neq a$.

(3)为了表示方便，有时把开区间 $(a-\delta,a)$ 称为 a 的左 δ 邻域，把开区间 $(a,a+\delta)$ 称为 a 的右 δ 邻域.

二、映射

1. 映射的概念

定义 设 X,Y 是两个非空集合，如果存在一个法则 f，使得对 X 中每个元素 x，按法则 f，在 Y 中有唯一确定的元素 y 与之对应，则称 f 为从 X 到 Y 的映射，记作

$$f:X\to Y,$$

其中，y 称为元素 x(在映射 f 下)的像，并记作 $f(x)$，即

$$y=f(x),$$

而元素 x 称为元素 y(在映射 f 下)的一个原像；集合 X 称为映射 f 的定义域，记作 D_f，即 $D_f=X$；X 中所有元素的像所组成的集合称为映射 f 的值域，记作 R_f 或 $f(X)$，即

$$R_f=f(X)=\{f(x)\,|\,x\in X\}.$$

【评注】上述映射的定义中，需要注意的是：

(1)构成一个映射必须具备三个要素：集合 X，即定义域 $D_f=X$；集合 Y，即值域的范围：$R_f\subset Y$；对应法则 f，使对每个 $x\in X$，有唯一确定的 $y=f(x)$ 与之对应.

(2)对每个 $x\in X$，元素 x 的像 y 是唯一的；而对每个 $y\in R_f$，元素 y 的原像不一定是唯一的.

(3)映射 f 的值域 R_f 是 Y 的一个子集，即 $R_f\subset Y$，不一定 $R_f=Y$.

下面，我们来分析三道关于映射的概念的典型例题.

例 3 设 $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$，对每个 $x\in\mathbf{R}$，$f(x)=x^2$.

分析：显然，f 是一个映射，f 的定义域 $D_f=\mathbf{R}$，值域 $R_f=\{y\,|\,y\geqslant 0\}$，它是 $\mathbf{R}$ 的一个真子集. 对于 R_f 中的元素 y，除 $y=0$ 外，它的原像不是唯一的. 如 $y=9$ 的原像就有 $x=3$ 和 $x=-3$ 两个.

例 4 设 $X=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2=1\}$，$Y=\{(x,0)\,|\,|x|\leqslant 1\}$，$f:X\to Y$. 对每个 $(x,y)\in X$，有唯一确定的 $(x,0)\in Y$ 与之对应.

分析：显然，f 是一个映射，f 的定义域 $D_f=X$，值域 $R_f=Y$.

在几何上，这个映射表示将平面上一个圆心在原点的单位圆周上的点投影到 x 轴的区间 $[-1,1]$ 上.

例 5 设 $f:\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]\to[-1,1]$，对每个 $x\in\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$，$f(x)=\sin x$.

分析：显然 f 是一个映射，f 的定义域 $D_f=\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$，$f$ 的值域 $R_f=[-1,1]$.

【评注】(1)设 f 是从集合 X 到集合 Y 的映射，若 $R_f=Y$，即 Y 中任一元素 y 都是 X 中某元素的像，则称 f 为 X 到 Y 上的映射或满射；若对 X 中任意两个不同元素 $x_1\neq x_2$，它们的像 $f(x_1)\neq f(x_2)$，则称 f 为 X 到 Y 的单射；若映射 f 既是单射，又是满射，则称 f 为一一映射(或双射).

(2)上面例 3 中的映射，既非单射，又非满射；例 4 中的映射不是单射，是满射；例 5 中的映射，既是单射，又是满射，因此是一一映射.

2. 逆映射与复合映射

(1)逆映射

定义 1 设 f 是 X 到 Y 的单射，则由定义，对每个 $y\in R_f$，有唯一的 $x\in X$，适合 $f(x)=y$. 于是，我们可定义一个从 R_f 到 X 的新映射 g，即

$$g:R_f\to X,$$

对每个 $y\in R_f$，规定 $g(y)=x$，且 x 满足 $f(x)=y$，这个映射 g 称为 f 的逆映射，记作 f^{-1}，其定义域 $D_{f^{-1}}=R_f$，值域 $R_{f^{-1}}=X$.

【评注】按照上述定义，只有单射才存在逆映射. 所以，在上述 3 道例题中，只有例 5 中的映射 f 才存在逆映射 f^{-1}，这个 f^{-1} 就是反正弦函数的主值.

$$f^{-1}(x)=\arcsin x, x\in[-1,1],$$

其定义域 $D_{f^{-1}}=[-1,1]$，值域 $R_{f^{-1}}=\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$.

(2)复合映射

定义 2 设有两个映射

$$g:X\to Y_1,\quad f:Y_2\to Z,$$

其中 $Y_1\subset Y_2$. 则由映射 g 和 f 可以定出一个从 X 到 Z 的对应法则，它将每个 $x\in X$ 映成 $f[g(x)]\in Z$. 显然，这个对应法则确定了一个从 X 到 Z 的映射，这个映射称为映射 g 和 f 构成的复合映射，记作 $f\circ g$，即

$$f\circ g:X\to Z,$$
$$f\circ g(x)=f[g(x)], x\in X.$$

【评注】由复合映射的定义可知，映射 g 和 f 构成复合映射的条件是：g 的值域 R_g 必须包含在 f 的定义域内，即 $R_g\subset D_f$. 否则，不能构成复合映射. 由此可知，映射 g 和 f 的复合是有顺序的，$f\circ g$ 有意义并不表示 $g\circ f$ 也有意义. 即使 $f\circ g$ 与 $g\circ f$ 都有意义，复合映射 $f\circ g$ 与 $g\circ f$ 也未必相同.

下面，我们来分析一道关于复合映射的典型例题.

例 6 设有映射 $g:\mathbf{R}\to[-1,1]$，对每个 $x\in\mathbf{R}$，$g(x)=\sin x$，映射 $f:[-1,1]\to[0,1]$，对每个 $u\in[-1,1]$，$f(u)=\sqrt{1-u^2}$.

分析：由题设条件可知，映射 g 和 f 可以构成复合映射 $f\circ g:\mathbf{R}\to[0,1]$，对每个 $x\in\mathbf{R}$，有

$$(f\circ g)(x)=f[g(x)]=f(\sin x)=\sqrt{1-\sin^2 x}=|\cos x|.$$

函数的概念

定义 3 设数集 $D\subset\mathbf{R}$，则称映射 $f:D\to\mathbf{R}$ 为定义在 D 上的函数，通常记为

$$y=f(x), x\in D,$$

其中 x 称为自变量，y 称为因变量，D 称为定义域，记作 D_f，即 $D_f=D$.

【评注】(1)在函数定义中，对每个 $x\in D$，按对应法则 f，总有唯一的值 y 与之对应，这个值称为函数 f 在 x 处的函数值，记作 $f(x)$，即 $y=f(x)$. 因变量 y 与自变量 x 之间的这种依赖关系，通常称为函数关系. 函数值 $f(x)$ 的全体所构成的集合称为函数 f 的值域，记作 R_f 或 $f(D)$，即

$$R_f=f(D)=\{y\,|\,y=f(x), x\in D\}.$$

(2)需要指出的是，按照上述定义，记号 f 和 $f(x)$ 的含义是有区别的：前者表示自变量 x 和因变量 y 之间的对应法则；后者表示与自变量 x 对应的函数值.

但为了叙述方便，习惯上常用记号“$f(x), x\in D$”或“$y=f(x), x\in D$”来表示定义在 D 上的函数，这时应理解为由它所确定的函数 f.

(3)表示函数的记号是可以任意选取的，除了常用的 f 外，还可用其他的英文字母或希腊字母，如“g”、“F”、“φ”等. 相应地，函数可记作 $y=g(x)$，$y=F(x)$，$y=\varphi(x)$ 等，有时还直接用因变量的记号来表示函数，即把函数记作 $y=y(x)$. 但在同一个问题中，讨论到几个不同的函数时，为了表示区别，需要用不同的记号来表示它们.

(4)函数是从实数集到实数集的映射，其值域总在 $\mathbf{R}$ 内，因此构成函数的要素是：定义域 D_f，对应法则 f.

如果两个函数的定义域相同，对应法则也相同，那么这两个函数就是相同的，否则就是不同的.

(5)函数的定义域通常按以下两种情形来确定：

一种是对有实际背景的函数，根据实际背景中变量的实际意义确定. 例如，在自由落体运动中，设物体下落的时间为 t，下落的距离为 s，开始下落的时刻 $t=0$，落地的时刻 $t=T$. 则 s 与 t 之间的函数关系是

$$s=\frac{1}{2}gt^2, t\in[0,T].$$

这个函数的定义域就是区间 $[0,T]$.

另一种是对抽象地用算式表达的函数，通常约定这种函数的定义域是使得算式有意义的一切实数组成的集合，这种定义域称为自然定义域. 在这种约定下，一般用算式表达的函数可用“$y=f(x)$”表达，而不必再表出 D_f.

下面我们来分析几道有关“自然定义域”的知识点的典型例题.

例 7 求下列函数的自然定义域：

1° $y=\sqrt{3x+2}$.

分析：$3x+2\geqslant 0\Rightarrow x\geqslant -\frac{2}{3}$，即定义域为 $\left[-\frac{2}{3},+\infty\right)$.

2° $y=\frac{1}{1-x^2}$.

分析：$1-x^2\neq 0\Rightarrow x\neq \pm 1$，即定义域为 $(-\infty,-1)\cup(-1,1)\cup(1,+\infty)$.

3° $y=\frac{1}{x}-\sqrt{1-x^2}$.

分析：$x\neq 0$ 且 $1-x^2\geqslant 0\Rightarrow x\neq 0$ 且 $|x|\leqslant 1$，即定义域为 $[-1,0)\cup(0,1]$.

4° $y=\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$.

分析：$4-x^2>0\Rightarrow |x|<2$，即定义域为 $(-2,2)$.

5° $y=\sin\sqrt{x}$.

分析：$x\geqslant 0$，即定义域为 $[0,+\infty)$.

6° $y=\tan(x+1)$.

分析：$x+1\neq k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$，即定义域为 $\left\{x\mid x\in\mathbf{R} \text{ 且 } x\neq\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi-1, k\in\mathbf{Z}\right\}$.

7° $y=\arcsin(x-3)$.

分析：$|x-3|\leqslant 1\Rightarrow 2\leqslant x\leqslant 4$，即定义域为 $[2,4]$.

8° $y=\sqrt{3-x}+\arctan\frac{1}{x}$.

分析：$\begin{cases}3-x\geqslant 0,\\ x\neq 0\end{cases}\Rightarrow$定义域为$(-\infty,0)\cup(0,3]$.

9° $y=\ln(x+1)$.

分析：$x+1>0\Rightarrow x>-1$，即定义域为$(-1,+\infty)$.

10° $y=\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$.

分析：$x\neq 0$，即定义域为$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$.

【评注】本题是求函数的自然定义域，一般方法是先写出构成所求函数的各个简单函数的定义域，再求出这些定义域的交集，即得所求定义域. 下列简单函数及其定义域是经常用到的.

①$y=\dfrac{Q(x)}{P(x)}$，$P(x)\neq 0$； ②$y=\sqrt[2n]{x}$，$x\geqslant 0$； ③$y=\log_a x$，$x>0$；

④$y=\tan x$，$x\neq\left(k+\dfrac{1}{2}\right)\pi$，$k\in\mathbf{Z}$； ⑤$y=\cot x$，$x\neq k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$； ⑥$y=\arcsin x$，$|x|\leqslant 1$；

⑦$y=\arccos x$，$|x|\leqslant 1$.

下面举几个求函数定义域、值域的例子：

例 8 已知$f(x)=\sin x$，$f[\varphi(x)]=1-x^2$，则$\varphi(x)$的定义域为________.

分析：依题意可得

$$f[\varphi(x)]=\sin\varphi(x)=1-x^2,$$

所以

$$\varphi(x)=\arcsin(1-x^2),$$

则有

$$-1\leqslant 1-x^2\leqslant 1,$$

故

$$-\sqrt{2}\leqslant x\leqslant\sqrt{2}.$$

【评注】$-1\leqslant\sin x\leqslant 1$.

例 9 函数$f(x)=\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x}}}$的定义域为(　　).

A. $x\in\mathbf{R}$，但$x\neq 0$

B. $x\in\mathbf{R}$，但$1+\dfrac{1}{x}\neq 0$

C. $x\in\mathbf{R}$，但$x\neq 0,-1,-\dfrac{1}{2}$

D. $x\in\mathbf{R}$，但$x\neq 0,-1$

分析：由于$f(x)$是一个复合函数，则应先求出最内部函数的范围. 在本题，复合函数$f(x)$中最内部函数的表达式为$\dfrac{1}{x}$，其定义域为$x\neq 0$.

再由内及外地逐一判断各函数的范围：

①对$\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x}}$，有$1+\dfrac{1}{x}\neq 0$；

②对$1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x}}$，有$1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x}}\neq 0$.

将3个不等式联立方程组，得

$$x\neq 0\text{ 且 }x\neq -1\text{ 且 }x\neq -\frac{1}{2},$$

即$f(x)$的定义域为$x\in\mathbf{R}$，但$x\neq 0,-1,-\dfrac{1}{2}$，选C.

【评注】解决本题关键：分母不能取零.

例 10 函数 $y=\sin\frac{\pi x}{2(1+x^2)}$ 的值域是（　　）.

A. $[-1,1]$　　B. $\left[-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$　　C. $[0,1]$　　D. $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$

分析：按照一般的解题思路，欲求值域，必先求定义域. 对本题而言，其定义域为 $(-\infty,+\infty)$. 但是值域仍无法求得. 因而我们必须转换思路：

因为 $1+x^2\geqslant 2|x|$，所以

$$-\frac{1}{2}\leqslant\frac{x}{1+x^2}\leqslant\frac{1}{2}\Rightarrow-\frac{\pi}{4}\leqslant\frac{\pi x}{2(1+x^2)}\leqslant\frac{\pi}{4}\Rightarrow-\frac{\sqrt{2}}{2}\leqslant\sin\frac{\pi x}{2(1+x^2)}\leqslant\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

选 B.

【评注】此题可看做是求函数 $y=\frac{x}{1+x^2}$ 的值域，这样就把问题简化了.

函数的四大基本性质

一、函数的有界性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，数集 $X\subset D$.

(1) 如果存在数 k_1，使得 $f(x)\leqslant k_1$ 对任一 $x\in X$ 都成立，则称函数 $f(x)$ 在 X 上有上界，而 k_1 称为函数 $f(x)$ 在 X 上的一个上界.

(2) 如果存在数 k_2，使得 $f(x)\geqslant k_2$ 对任一 $x\in X$ 都成立，则称函数 $f(x)$ 在 X 上有下界，而 k_2 称为函数 $f(x)$ 在 X 上的一个下界.

(3) 如果存在正数 M，使得 $|f(x)|\leqslant M$ 对任一 $x\in X$ 都成立，则称函数 $f(x)$ 在 X 上有界；如果这样的 M 不存在，就称函数 $f(x)$ 在 X 上无界. 这就是说，如果对于任何正数 M，总存在 $x_1\in X$，使得 $|f(x)|>M$，那么函数 $f(x)$ 在 X 上无界.

【评注】(1) 判别函数 $f(x)$ 在 X 上有上(下)界，一般是将 $f(x)$ 在 X 上放大(缩小)，直到明确它小于(大于)某常数.

(2) 函数 $f(x)$ 在 X 上有界的充分必要条件是：$f(x)$ 在 X 上既有上界又有下界.

(3) 判别函数 $f(x)$ 在某区域 D 上有界(无界)的充分条件：

①若函数 $f(x)$ 在点 $x=x_0$ 处存在极限，则存在该点的一个去心邻域，在该邻域内 $f(x)$ 有界.

②如果函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界.

③如果函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内存在最大(小)值，则 $f(x)$ 在 (a,b) 内有上(下)界.

④若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$，则 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 的任何一个邻域内无界，反之不成立.

⑤如果存在数列 $\{x_n\}(x_n\in I)$，使得 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=\infty$，则函数 $f(x)$ 在区间 I 上无界.

下面来举两个例子.

例 11 设函数 $f(x)=\sin x$，且 $x\in(-\infty,+\infty)$. 试判定其在定义域 $(-\infty,+\infty)$ 内的有界性.

分析：就 $f(x)=\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内来说，1 是它的一个上界，-1 是它的一个下界（当然，大于 1 的任何数也是它的上界，小于 -1 的任何数也是它的下界）. 又

$$|\sin x|\leqslant 1$$

对任一实数 x 都成立，故 $f(x)=\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内是有界的，这里的 $M=1$（当然也可取大于 1

的任何数作为 M，而 $|f(x)|\leqslant M$ 成立).

例 12 试判定函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在 $(0,1)$ 和 $(1,2)$ 内的有界性.

分析：就 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在开区间 $(0,1)$ 内没有上界，但有下界. 例如 1 就是它的一个下界.

函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在开区间 $(0,1)$ 内是无界的，因为不存在这样的正数 M，使 $\left|\dfrac{1}{x}\right|\leqslant M$ 对于 $(0,1)$ 内的一切 x 都成立（x 接近于 0 时，不存在确定的正数 k_1，使 $\dfrac{1}{x}\leqslant k_1$ 成立）. 但是 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在区间 $(1,2)$ 内是有界的. 例如可取 $M=1$ 而使 $\left|\dfrac{1}{x}\right|\leqslant 1$ 对于一切 $x\in(1,2)$ 都成立.

例 13 设函数 $f(x)$ 在数集 X 上有定义，试验证：函数 $f(x)$ 在 X 上有界的充分必要条件是它在 X 上既有上界又有下界.

分析：设 $f(x)$ 在 X 上有界，即存在 $M>0$，使得 $|f(x)|\leqslant M, x\in X$，故 $-M\leqslant f(x)\leqslant M, x\in X$，即 $f(x)$ 在 X 上有上界 M，下界 $-M$.

反之，设 $f(x)$ 在 X 上有上界 k_1，下界 k_2，即 $k_2\leqslant f(x)\leqslant k_1, x\in X$. 取 $M=\max\{|k_1|,|k_2|\}$，则有 $|f(x)|\leqslant M, x\in X$.

即 $f(x)$ 在 X 上有界.

二、函数的单调性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，区间 $I\subset D$.

(1) 如果对于区间 I 上任意两点 x_1 及 x_2，当 $x_1<x_2$ 时，恒有 $f(x_1)<f(x_2)$，则称 $f(x)$ 在区间 I 上是单调增加的(图 1-6)；

(2) 如果对于区间 I 上任意两点 x_1 及 x_2，当 $x_1<x_2$ 时，恒有 $f(x_1)>f(x_2)$，则称 $f(x)$ 在区间 I 上是单调减少的(图 1-7).

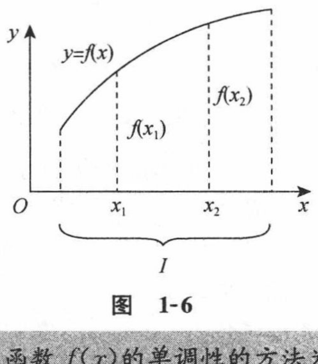

图 1-6

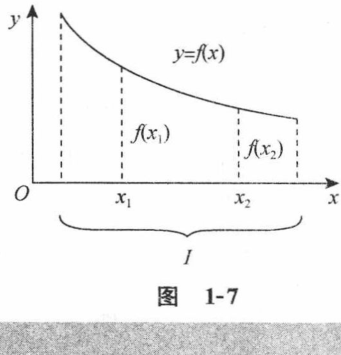

图 1-7

【评注】判定函数 $f(x)$ 的单调性的方法为：

(1) 简单的函数或未说明可导的抽象函数用定义判定；

(2) 复杂的初等函数或可导的抽象函数，用微分学的单调性判定定理判定.

下面来举几个例子.

例 14 判定下列函数在指定区间内的单调性：

1° $y=\dfrac{x}{1-x}, (-\infty,1)$.

分析：$y=f(x)=\dfrac{x}{1-x}=-1+\dfrac{1}{1-x}$.

设 $x_1<x_2<1$. 因为 $f(x_2)-f(x_1)=\dfrac{1}{1-x_2}-\dfrac{1}{1-x_1}=\dfrac{x_2-x_1}{(1-x_1)(1-x_2)}>0$，所以 $f(x_2)>f(x_1)$，

即 $f(x)$ 在 $(-\infty,1)$ 内单调增加.

2° $y=x+\ln x,(0,+\infty)$.

分析：$y=f(x)=x+\ln x$.

设 $0<x_1<x_2$，因为

$$f(x_2)-f(x_1)=x_2+\ln x_2-x_1-\ln x_1=x_2-x_1+\ln\frac{x_2}{x_1}>0,$$

所以 $f(x_2)>f(x_1)$. 即 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内单调增加.

三、函数的奇偶性

设函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称.

(1)如果对任一 $x\in D$，$f(-x)=f(x)$ 恒成立，则称 $f(x)$ 为偶函数；

(2)如果对于任一 $x\in D$，$f(-x)=-f(x)$ 恒成立，则称 $f(x)$ 为奇函数.

【评注】(1)在直角坐标系中，偶函数的图形关于 y 轴是对称的. 因为若 $f(x)$ 是偶函数，则 $f(-x)=f(x)$，所以如果 $A(x,f(x))$ 是图形上的点，则与它关于 y 轴对称的点 $A'(-x,f(x))$ 也在图形上(图 1-8).

(2)在直角坐标系中，奇函数的图形关于原点对称. 因为若 $f(x)$ 是奇函数，则 $f(-x)=-f(x)$，所以如果 $A(x,f(x))$ 是图形上的点，则与它关于原点对称的点 $A''(-x,-f(x))$ 也在图形上(图 1-9).

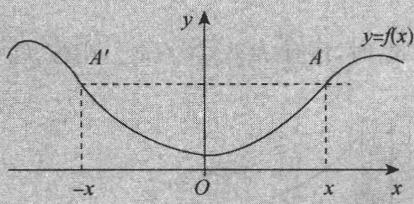

图 1-8

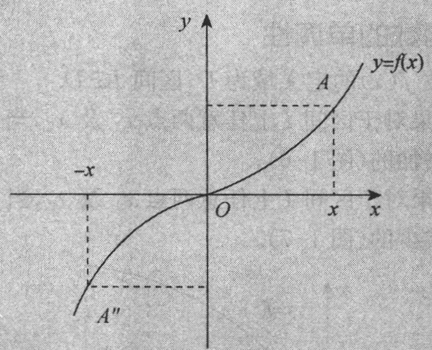

图 1-9

(3)若函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在区间 $[-l,l]$ 上均有定义，且 $f(-x)=f(x)$，$g(-x)=-g(x)$.

①两个偶函数的和是偶函数，即 $f_1(x)+f_2(x)$ 为偶函数；

②两个奇函数的和是奇函数，即 $g_1(x)+g_2(x)$ 为奇函数；

③两个偶函数的乘积是偶函数，即 $f_1(x)\cdot f_2(x)$ 为偶函数；

④两个奇函数的乘积是偶函数，即 $g_1(x)\cdot g_2(x)$ 为偶函数；

⑤偶函数与奇函数的乘积是奇函数，即 $f(x)\cdot g(x)$ 为奇函数.

(4)可导奇函数的导函数是偶函数；可导偶函数的导函数是奇函数.

(5)连续奇函数的原函数是偶函数；连续偶函数的原函数不一定是奇函数.

下面举几个例子来说明函数的奇偶性.

例 15 设下面所考虑的函数都是定义在区间 $(-l,l)$ 上的，证明：

1° 两个偶函数的和是偶函数.

分析：设 $f_1(x)$，$f_2(x)$ 均为偶函数，则

$$f_1(-x)=f_1(x),f_2(-x)=f_2(x).$$

令 $F(x)=f_1(x)+f_2(x)$，于是

$$F(-x)=f_1(-x)+f_2(-x)=f_1(x)+f_2(x)=F(x).$$

故 $F(x)$ 为偶函数.

2° 两个奇函数的和是奇函数.

分析:设 $g_1(x)$,$g_2(x)$ 均为奇函数,则

$$g_1(-x)=-g_1(x), \quad g_2(-x)=-g_2(x).$$

令 $G(x)=g_1(x)+g_2(x)$,于是

$$G(-x)=g_1(-x)+g_2(-x)=-g_1(x)-g_2(x)=-G(x).$$

故 $G(x)$ 为奇函数.

3° 两个偶函数的乘积是偶函数.

分析:设 $f_1(x)$,$f_2(x)$ 均为偶函数,则

$$f_1(-x)=f_1(x), f_2(-x)=f_2(x).$$

令 $F(x)=f_1(x)\cdot f_2(x)$,于是

$$F(-x)=f_1(-x)\cdot f_2(-x)=f_1(x)\cdot f_2(x)=F(x).$$

故 $F(x)$ 为偶函数.

4° 两个奇函数的乘积是偶函数.

分析:设 $g_1(x)$,$g_2(x)$ 均为奇函数,则

$$g_1(-x)=-g_1(x), g_2(-x)=-g_2(x).$$

令 $G(x)=g_1(x)\cdot g_2(x)$,于是

$$G(-x)=g_1(-x)\cdot g_2(-x)=[-g_1(x)]\cdot[-g_2(x)]=G(x).$$

故 $G(x)$ 为偶函数.

5° 偶函数与奇函数的乘积是奇函数.

分析:设 $f(x)$ 为偶函数,$g(x)$ 为奇函数,则

$$f(-x)=f(x), g(-x)=-g(x).$$

令 $H(x)=f(x)\cdot g(x)$,于是

$$H(-x)=f(-x)\cdot g(-x)=f(x)\cdot[-g(x)]=-f(x)\cdot g(x)=-H(x).$$

故 $H(x)$ 为奇函数.

6° 偶函数与奇函数的和是非奇非偶函数.

分析:设 $f(x)$ 为偶函数,$g(x)$ 为奇函数,则

$$f(-x)=f(x), g(-x)=-g(x).$$

令 $H(x)=f(x)+g(x)$,于是

$$H(-x)=f(-x)+g(-x)=f(x)-g(x)\neq H(x)\neq -H(x).$$

故 $H(x)$ 为非奇非偶函数.

例 16 下列函数中,哪些是偶函数,哪些是奇函数,哪些是非奇非偶函数?

1° $y=x^2(1-x^2)$.

分析:方法一 利用奇偶函数的定义判定之.

$$y=f(x)=x^2(1-x^2).$$

因为 $f(-x)=(-x)^2[1-(-x)^2]=x^2(1-x^2)=f(x)$,所以 $f(x)$ 为偶函数.

方法二 利用奇、偶函数之间的相互关系判定之(判定标准为例 15 中的 6 个结论).

$y=f(x)=x^2(1-x^2)$,令 $f_1(x)=x^2$,$f_2(x)=1-x^2$,则 $y=f(x)=f_1(x)\cdot f_2(x)$.

因为 $f_1(-x)=(-x)^2=f_1(x)$,$f_2(-x)=[1-(-x^2)]=f_2(x)$,所以由例 15 中的结论 3°:两个偶函数的乘积是偶函数,可得 $f(x)$ 为偶函数.

2° $y=3x^2-x^3$.

分析:方法一 利用奇偶函数的定义判定之.