高等数学

教学参考

下册

洪继科编

上海师院分院数学系

高等数学

教学参考

下　册

洪继科编

上海师院分院数学系

目　　录

第十章 级 数

数学中有限个项相加的意义，大家是清楚的。但把无穷多个项加在一起，这又是什么意思呢？这就是无穷级数所要讨论的内容。

级数在研究函数、数值计算、多项式逼近、插值法和摄动过程等方面有着广泛的应用，也是学习后继课程的基本知识。

§10·1 教 学 要 求

1． 理解并掌握下列基本概念：

无穷级数概念、级数敛散性概念、绝对收敛与条件收敛、一致收敛概念；

2． 掌握下列基本理论及方法：

级数的基本性质，数项级数的审敛法（比较判别法、比值判别法、根值判别法、积分判别法、莱布尼兹定理），级数一致收敛判别法——维尔斯脱拉斯(Weierstrass)判定法，级数一致收敛性质，亚贝尔（Abel）定理，幂级数在收敛半径内的性质。

3． 熟练进行下列基本运算：

（1） 极限运算：

求级数前 n 项之和的极限；

求级数的收敛半径。

（2） 初等函数的幂级数展开。

本章重点：

级数的敛散性概念，级数敛散性的判定，初等函数的幂级数展开。

本章难点：

级数敛散性的判定，函数项级数的一致收敛概念。

§10·2 概 念 强 化

【设问】1 何谓无穷级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots \tag{1}$$

收敛？

【解答】： 通俗地说：如果（1）中无穷多项加起来是有限值，就称级数（1）是收敛的。例如大家熟知的几何级数

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots$$

无穷多项的和等于 1，所以该级数收敛．但怎样理解“无穷多项相加”？这无穷多项加起来的值（如果存在的话）如何求出？这些问题都需要用严格的数学语言回答，这就是定义：

当 $n\to\infty$ 时，若数列 $S_n\left(=\sum\limits_{K=1}^{n}u_K\right)$ 趋近于一个极限（有限的）：

$$S=\lim_{n\to\infty}S_n\left(=\lim_{n\to\infty}\sum_{K=1}^{n}u_K\right)$$

就叫做无穷级数（1）收敛．若 S_n 没有极限，就叫做级数（1）发散．由此可知：

$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{K=1}^{n}u_K$ 就表示无穷多项相加，极限值就是无穷多项加起来的结果，简记为

$$S=u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots.$$

这个定义给出了无穷多项和的确切含义，同时也给出了求和的方法——求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n$．

【设问】2　级数（1）收敛的必要条件是什么？级数（1）发散的充分条件是什么？

【解答】：　级数（1）收敛的必要条件是：当 $n\to\infty$ 时，一般项 $u_n\to 0$；即

$$\lim_{n\to\infty}u_n=0.$$

事实上，因级数（1）收敛，即 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=S$．而

$$u_n=S_n-S_{n-1}$$

当 $n\to\infty$ 时．$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\lim\limits_{n\to\infty}S_n-\lim\limits_{n\to\infty}S_{n-1}=S-S=0$．

说明：此条件不是收敛级数的充分条件，即若 $u_n\to 0$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 也可能发散，如调和级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$．

级数（1）发散的充分条件是什么？

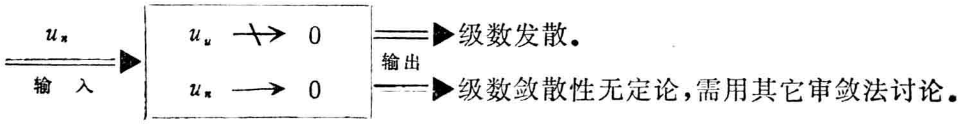
若级数（1）的一般项 $u_n\not\to 0$，即

$$\lim_{n\to\infty}u_n\neq 0$$

则级数（1）必发散．

用反证法证明如下：若级数（1）收敛，则 $u_n\to 0$，这与假设矛盾，所以级数（1）发散．

综上所述，可知一般项 u_n 是否趋于零，是起着“分类机”的巨大作用，图示如下：



【设问】3　何谓无穷级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 绝对收敛？条件收敛？

【解答】：　若由级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 的各项绝对值所构成的正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 收敛：

$$S=\lim_{n\to\infty} S_n=\lim_{n\to\infty}\sum_{K=1}^{n}|u_K|$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|,$$

则称级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 为绝对收敛。

绝对收敛是很强的条件。一个级数如果是绝对收敛的，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 也必定收敛(见教材(樊) $P.14$　定理2)。

这个结论非常有用，它使很大一类级数收敛性问题变成正项级数的收敛性问题。事实上，将任意项级数的各项取绝对值就得到正项级数，假如用有关审敛法能证明它是收敛的，则所给出任意项级数就收敛。

值得注意的是上述结论之逆不一定成立。即收敛级数并不都是绝对收敛的，例如，级数

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots$$

收敛，但各项取绝对值所成级数(调和级数)

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots$$

却是发散的。

如果任意项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，而各项取绝对值所成的级数 $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 发散，则称级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 为条件收敛。例如级数

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots$$

就是条件收敛。

【设问】4　何谓函数项级数？它的收敛与发散又需如何理解？

【解答】：　各项是 x 的函数的级数：

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)=u_1(x)+u_2(x)+\cdots+u_n(x)+\cdots \qquad (2)$$

叫做函数项级数。例如

$$1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots$$
$$\sin x-\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{1}{3}\sin 3x-\cdots$$

等等都是函数项级数。

设 $u_n(x)(n=1,2\cdots)$ 是定义在区间 (a,b)上的函数，则(2)就称为定义在区间 (a,b) 上的函数项级数。

对于 $x_0\in(a,b)$，函数项级数(2)成为常数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x_0)$，后者若收敛，$x_0$ 称为(2)的收敛点；后者若发散，x_0 称为(2)的发散点。函数项级数(2)的收敛点的全体称为收敛域，发散点的全体称为发散域。

由上知，对于收敛域内任一个数x，函数项级数(2)成为一常数项级数，因而有一确定的和S，S是x的函数$S(x)$，我们写为

$$S(x)=u_1(x)+u_2(x)+\cdots+u_n(x)+\cdots.$$

所以，我们对函数项级数收敛于和函数$S(x)$应如下理解：部分和函数$S_n(x)=\sum\limits_{K=1}^{n}u_K(x)$存在极限函数$S(x)$；自变量$x$在收敛域内。简写如下：

$$S(x)=\lim_{n\to\infty}S_n(x)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{K=1}^{n}u_K(x)\qquad x\text{ 在收敛域内.}$$

若 $S_n(x)=\sum\limits_{K=1}^{n}u_K(x)$ 不存在这样的和函数，就称函数项级数(2)发散，当然也只在发散域内。

例如　函数项级数

$$1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots$$

是一个几何级数。

$$|x|<1\text{ 时有}\qquad 1+x+x^2+\cdots=\frac{1}{1-x}$$

$$|x|\geqslant 1\text{ 时}\qquad 1+x+x^2+\cdots\quad\text{发散}$$

故仅在收敛域 $|x|<1$ 内，题中函数项级数的和是x的函数 $S(x)=\dfrac{1}{1-x}$.

【设问】5　何谓函数项级数一致收敛？研究一致收敛性意义何在？

【解答】：　设函数项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$在区间$(a,\ b)$上收敛于和$S(x)$，于是在$(a,\ b)$上就有$r_n(x)=S(x)-S_n(x)$.

若对任意给定 $\varepsilon>0$，能够找到一个不依赖于x的正整数N，使得当$n>N$时，对一切$x\in(a,\ b)$都有不等式

$$|r_n(x)|<\varepsilon$$

成立，就叫做级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$在区间$(a,\ b)$上一致收敛。

下面给出一致收敛的几何解释：

由定义知，当$n>N$时，对一切$x\in(a,\ b)$有不等式

$$|r_n(x)|<\varepsilon$$

成立。即有　　$|S(x)-S_n(x)|<\varepsilon$　成立，亦即有不等式

$$S(x)-\varepsilon<S_n(x)<S(x)+\varepsilon$$

成立。在xoy坐标系作$y=S(x)$的“平行”曲线$y=S(x)+\varepsilon$，$y=S(x)-\varepsilon$，则所有曲线$S_{N+1}(x)$、$S_{N+2}(x)\cdots$都包含在这两条“平行”曲线之间(图10－1)。

研究函数项级数一致收敛的意义是：

欲解决无穷多个连续函数的和是否仍是连续函数？无穷多个函数之和的导数是否等于无

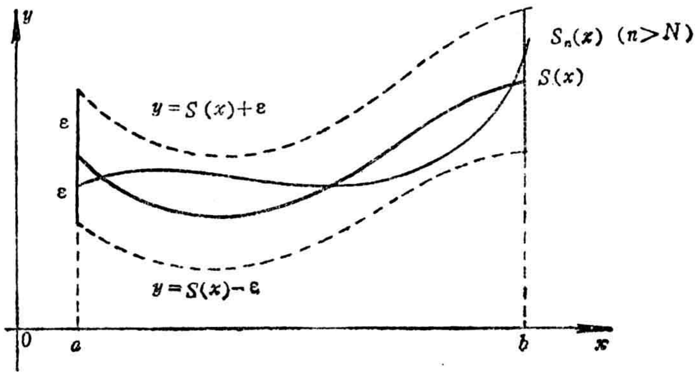


图 10－1

穷多个函数的导数之和？无穷多个函数之和的积分是否等于无穷多个函数的积分之和？即有限多个函数的解析性质在什么情况下可以推广到无穷多个函数，上述问题成立的条件都要求级数一致收敛。

此外，研究函数项级数的一致收敛性质也为幂级数在其收敛半径内可以逐项求导、逐项积分提供了理论依据。

【设问】6　函数项级数绝对收敛与一致收敛有没有关系？在什么条件下能得出绝对收敛与一致收敛同时成立或同时不成立的结论？

【解答】：　函数项级数绝对收敛与一致收敛是完全不同的两个概念，两者之间没有必然的联系。例如

级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{1}{x^2+n}$ $(-\infty<x<+\infty)$是一致收敛的，但非绝对收敛。

证：$\because$　$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{1}{x^2+n}$ 是交错级数，

$\therefore |r_n(x)|<|u_{n+1}(x)|=\dfrac{1}{x^2+n+1}\leqslant\dfrac{1}{n+1}<\varepsilon$

$\therefore$ 对任意小的 $\varepsilon>0$，取$N=\left[\dfrac{1}{\varepsilon}-1\right]$，就有

$$|r_n(x)|<\varepsilon \text{ 成立。}$$

所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{1}{x^2+n}$ 一致收敛，$-\infty<x<+\infty$。

但 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^{n-1}\dfrac{1}{x^2+n}\right|=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{x^2+n}$，由比较判别法，当 $n>x^2$ 时有

$$\frac{1}{x^2+n}>\frac{1}{n+n}=\frac{1}{2n}\quad\text{（后者为调和级数的一般项），}$$

所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{x^2+n}$ 发散。

又如：级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^2}{(1+x^2)^n}$ 在$(-\infty,+\infty)$上绝对收敛，但非一致收敛。

证：$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^2}{(1+x^2)^n}$，

当 $x\neq 0$ 时，$\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\dfrac{x^2}{(1+x^2)^{n+1}}\cdot\dfrac{(1+x^2)^n}{x^2}=\dfrac{1}{1+x^2}<1$，

当 $x=0$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^2}{(1+x^2)^n}$ 显然绝对敛收，

$\therefore$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^2}{(1+x^2)^n}$ 在$(-\infty,\ +\infty)$上绝对收敛。

但该级数 $|r_n(x)|=x^2\left[\dfrac{1}{(1+x^2)^{n+1}}+\dfrac{1}{(1+x^2)^{n+2}}+\cdots\right]$

$$=x^2\cdot\frac{1}{(1+x^2)^{n+1}}\cdot\frac{1}{1-\left(\dfrac{1}{1+x^2}\right)}$$

$$=\frac{1}{(1+x^2)^n}。$$

固定 n，当 $x\to 0$ 时，$|r_n(x)|\to 1$，$\because$ $|r_n(x)|\not\to 0$，

$\therefore$ 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^2}{(1+x^2)^n}$ 非一致收敛。

我们知道：函数项级数只有在满足维尔斯脱拉斯定理条件（见教材（樊）$P.29$）下，才可能得出绝对收敛与一致收敛同时成立或同时不成立的结论。

【设问】7　老师，我们在上册中学过泰勒公式，现在讲泰勒级数，两者是否就是一回事？

【解答】：不是一回事。对 $f(x)$ 的要求不同，结果也不同。对比如下：

要求 / 名称	对 $f(x)$ 要求	表达形式
泰勒公式	具有$(n+1)$阶导数	$f(x)=\sum\limits_{K=0}^{n}\dfrac{f^{(K)}(x_0)}{K!}(x-x_0)^K+R_n(x)$。有限项
泰勒级数	具有任意阶导数	$f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n}{n!}$（无穷多项）

当然两者也有密切的联系，即当泰勒公式中的余项 $|R_n(x)|\to 0$ 时，$f(x)$ 方可用 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$ 表示。

§10·3 例题分析

（一） 根据定义证明下列级数的收敛性并求和。

例1 求 $\dfrac{1}{1\cdot 4}+\dfrac{1}{4\cdot 7}+\cdots+\dfrac{1}{(3n-2)(3n+1)}+\cdots$的和。

解： 由于 $\dfrac{1}{(3n-2)(3n+1)}=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{3n-2}-\dfrac{1}{3n+1}\right)$

$$\therefore\quad S_n=\frac{1}{1\cdot4}+\frac{1}{4\cdot7}+\cdots+\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$$

$$=\frac{1}{3}\left[\left(1-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{7}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{3n-2}-\frac{1}{3n+1}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{3n+1}\right)$$

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{3n+1}\right)=\frac{1}{3}$$

∴ 原级数和 $S=\dfrac{1}{3}$。

注：这里求有限项和时，设法将 $u_n=\dfrac{1}{(3n-2)(3n+1)}$ 拆成两项之差，即 $\dfrac{1}{(3n-2)(3n+1)}=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{3n-2}-\dfrac{1}{3n+1}\right)$ 然后利用相加过程中正负项相抵消，从而求出和来，这种方法具有普遍意义。

请读者研究级数

$$\frac{5}{1\cdot2\cdot3}+\frac{10}{2\cdot3\cdot4}+\cdots+\frac{K^2+1}{(K-1)K(K+1)}+\cdots$$

如何求和？

例 2　求下两题级数和

a)　$q\sin\alpha+q^2\sin2\alpha+\cdots+q^n\sin n\alpha+\cdots$

b)　$q\cos\alpha+q^2\cos2\alpha+\cdots+q^n\cos n\alpha+\cdots$

其中　$|q|<1$。

解：　令　$r=qe^{i\alpha}$ $(i=\sqrt{-1})$

因　$r+r^2+\cdots+r^n=\dfrac{r-r^{n+1}}{1-r}$ 且 $|r|=|q\cdot e^{i\alpha}|=|q|<1$，故 $\lim\limits_{n\to\infty}r^{n+1}=0$，由此得

$$r+r^2+\cdots+r^n+\cdots=\frac{r}{1-r},$$

即

$$qe^{i\alpha}+q^2e^{2i\alpha}+\cdots+q^ne^{ni\alpha}+\cdots=\frac{qe^{i\alpha}}{1-qe^{i\alpha}}$$

由尤拉公式　$e^{i\alpha}=\cos\alpha+i\sin\alpha$ 得

$$q(\cos\alpha+i\sin\alpha)+q^2(\cos2\alpha+i\sin2\alpha)+\cdots+q^n(\cos n\alpha+i\sin n\alpha)+\cdots$$

$$=\frac{q(\cos\alpha+i\sin\alpha)}{1-q(\cos\alpha+i\sin\alpha)}=\frac{q(\cos\alpha+i\sin\alpha)(1-q\cos\alpha+iq\sin\alpha)}{(1-q\cos\alpha)^2+q^2\sin^2\alpha}$$

$$=\frac{q\cos\alpha-q^2+iq\sin\alpha}{1+q^2-2q\cos\alpha}$$

比较等式两端的实部及虚部得

a) $q\sin\alpha+q^2\sin 2\alpha+\cdots+q^n\sin n\alpha+\cdots$

$$=\frac{q\sin\alpha}{1+q^2-2q\cos\alpha},$$

b.) $p\ \mathrm{cso}\ \alpha+q^2\cos 2\alpha+\cdots+q^n\cos n\alpha+\cdots$

$$=\frac{q\cos\alpha-q^2}{1+q^2-2q\cos\alpha}.$$

注：利用两复数相等，必须实部与实部、虚部与虚部相等这个概念，一下子可以求得两个结果，这在求不定积分，解微分方程中也常用。

（二） 判别下列数项级数的敛散性

例 1 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+r^n}\quad(r>0)$

解： 当 $r>1$ 时，$\frac{1}{1+r^n}<\frac{1}{r^n}$，而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{r^n}$ 收敛，由比较判别法得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+r^n}$ 收敛。

当 $r\leqslant 1$ 时，$\frac{1}{1+r^n}\geqslant\frac{1}{2}$，$u_n\not\to 0$，故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+r^n}$ 发散。

例 2 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{(2n-1)(2n+1)}}$

解： $\because\quad u_n=\frac{1}{\sqrt{(2n-1)(2n+1)}}=\frac{1}{\sqrt{4n^2-1}}>\frac{1}{\sqrt{4n^2}}$

$=\frac{1}{2n}\qquad\therefore$ 级数发散。

例 3 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(\ln\ln n^2)^{\ln n}}$

解： $u_n=\frac{1}{(\ln\ln n^2)^{\ln n}}=\frac{1}{n^{\ln\ln\ln n^2}}$

当 n 充分大时，$\ln\ln\ln n^2>2$，

于是 $u_n<\frac{1}{n^2}$，由比较判别法知题中级数收敛。

小结：对给出的级数进行适当的放大与缩小，与已知敛散性的等比(几何)级数、调和级数与P级数进行比较大小，通过比较：“大者收敛则小者也收敛，

小者发散则大者也发散。”

注意：①比较判别法并非一定要从第一项起进行比较，如果欲判定之级数从某一项起，适合上面原则之条件，则也有此结论。②比较判别法仅适用于正项级数。

例 4 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdot\cdots\cdot(2n-1)}{2\cdot 5\cdot\cdots\cdot(3n-1)}$

解： 此级数一般项 u_n 呈分式形式，可试用达朗贝尔（即比值）判别法。对于本题

$$\because \quad \frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{1\cdot 3\cdot\cdots\cdot(2n-1)(2n+1)}{2\cdot 5\cdot\cdots\cdot(3n-1)(3n+2)}\cdot\frac{2\cdot 5\cdots(3n-4)(3n-1)}{1\cdot 3\cdots(2n-3)(2n-1)}$$

$$=\frac{2n+1}{3n+2},$$

$$\therefore \quad \lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{3n+2}=\frac{2}{3}<1$$

故级数收敛。

例 5 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{t^n n!}{n^n}$ （t 为参数）

解： 同例 4 分析，用比值判别法。

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{t^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\cdot\frac{n^n}{t^n\cdot n!}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{t}{(1+\frac{1}{n})^n}=\frac{t}{e}$$

显然，当 $t\in[0,\ e)$时，级数收敛；

当 $t\geqslant e$ 时，级数发散。

小结： 级数一般项 u_n 若呈分式，就可试用比值法，当 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=1$ 时，此法失效，应另择其它方法。

例 6 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{7}{\ln^n n+1}$

解： $\because \quad u_n=\frac{7}{\ln^n n+1}<\frac{7}{\ln^n n}$

而 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln^n n}$ 由根值(柯西)判别法：

$$\sqrt[n]{\frac{1}{\ln^n n}}=\frac{1}{\ln n}\to 0\ (n\to\infty)$$

$\therefore$ $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln^n n}$ 收敛，故 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{7}{\ln^n n+1}$ 收敛。

例 7 研究级数 $1+\alpha+\alpha\beta+\alpha^2\beta+\cdots+\alpha^n\beta^{n-1}+\alpha^n\beta^n+\cdots$的敛散性，其中：$\alpha>0$，$\beta>0$。

解： 分析，因为一般项

$$u_{2m-1}=\alpha^{m-1}\beta^{m-1},\ u_{2m}=\alpha^m\beta^{m-1}(m=1,\ 2\cdots)$$

所以 $\frac{u_{n+1}}{u_n}=\alpha$ 或 β，因此比值判别法不好用，改用根值判别法：

因为 $\sqrt[2m-1]{a_{2m-1}}=\sqrt[2m-1]{\alpha^{m-1}\beta^{m-1}}=(\alpha\beta)^{\frac{m-1}{2m-1}}$

$$\sqrt[2m]{a_{2m}}=\sqrt[2m]{\alpha^m\beta^{m-1}}=\sqrt[2m]{\frac{\alpha^m\beta^m}{\beta}}$$

$$=(\alpha\beta)^{\frac{1}{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt[2m]{\beta}}$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=(\alpha\beta)^{\frac{1}{2}}$,

由此可知，当 $\sqrt{\alpha\beta}<1$ 时，级数收敛；当 $\sqrt{\alpha\beta}\geqslant 1$ 时。级数发散。

例 8 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^{n-1}}{(2n^2+n+1)^{\frac{n+1}{2}}}$

解： 题中分子分母都是幂指函数，宜用根值判别法：

$$\sqrt[n]{a_n}=\left(\frac{n^n\cdot\frac{1}{n}}{(2n^2+n+1)^{\frac{n}{2}}(2n^2+n+1)^{\frac{1}{2}}}\right)^{\frac{1}{n}}$$

$$=\frac{n}{(2n^2+n+1)^{\frac{1}{2}}}\cdot\frac{1}{n^{\frac{1}{n}}(2n^2+n+1)^{\frac{1}{2n}}}.$$

由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{(2n^2+n+1)^{\frac{1}{2}}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\lim\limits_{n\to\infty}n^{\frac{1}{n}}=1$,

$\lim\limits_{n\to 1}(2n^2+n+1)^{\frac{1}{2n}}=1$ （此结果可用罗必塔法则求得）。

故 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\frac{1}{\sqrt{2}}$。所以题中级数收敛。

小结： 从例 6～8 看到，当级数一般项是幂指函数型 $f(n)^{g(n)}$ 时，就可试用根值法。

例 9 研究 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}u_n=\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln^p n}$ 的敛散性。

解： 很明显，当 $p\leqslant 0$ 时，$u_n\geqslant\frac{1}{n}$，故由 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散，知 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}u_n$ 也发散。

当 $p>0$。令 $q(x)=\frac{1}{x\ln^p x}$ $(x>e)$。$q(x)$ 为取正值的减函数，故可用柯西积分判别法：

$$\int_e^{+\infty}q(x)dx=\begin{cases}\ln\ln x\Big|_e^{+\infty} & \text{当 } p=1\,;\\ \frac{1}{1-p}(\ln x)^{1-p}\Big|_e^{+\infty}=\begin{cases}+\infty, & \text{当 } 0<p<1;\\ \frac{1}{1-p}, & \text{当 } p>1\,.\end{cases}\end{cases}$$

由上得：级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}u_n$ 当 $p>1$ 时收敛，当 $p\leqslant 1$ 时发散。

例10 研究级数 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln(n!)}$ 的敛散性。

解： 由 $\frac{1}{\ln(n!)} = \frac{1}{\ln n + \ln(n-1) + \cdots + \ln 2}$

$$\geqslant \frac{1}{n \ln n}$$

由例 9 的结果（$p=1$）情形，由比较判别法，可知级数 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln(n!)}$ 发散。

从上举十二个例题，对如何判定级数的敛散性、判定的方法和步骤可归纳如下：

方法有三种：

第一种是根据定义，如(一)中例 1 ～ 2 。

第二种是利用级数的基本性质，如(二)中例 1 等。

第三种是根据比较、比值、根值、积分判别法则。

判定正项级数敛散性的步骤：

1. $u_n \overset{?}{\longrightarrow} 0$ $\begin{cases} 若\ u_n \not\longrightarrow 0，则级数发散； \\ 若\ u_n \longrightarrow 0，则转到 2 。\end{cases}$

2. 比值判别法或根值判别法

若 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \rho \neq 1$ 　则级数敛散性可定。

或 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \rho \neq 1$

若 $\rho = 1$，则转到 3 。

3. 使用比较判别法或积分判别法或从敛散性定义出发加以判别。

（三） 任意项级数的敛散性、绝对收敛还是条件收敛

例 1 证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{2n-1}{2^{n-1}}$ 收敛，并求和。

解： 题中级数的绝对值级数为 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2^{n-1}}$。由于

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{2(n+1)-1}{2^n} \cdot \frac{2^{n-1}}{2n-1} = \frac{1}{2}$$

故由比值判别法知，$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 收敛，故题中级数绝对收敛。

下面求级数和：

令 $S_n = 1 - \frac{3}{2} + \frac{5}{4} - \frac{7}{8} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{2n-1}{2^{n-1}}$，

则 $\frac{1}{2} S_n = \frac{1}{2} - \frac{3}{4} + \frac{5}{8} - \cdots + (-1)^{n-2} \cdot \frac{2n-3}{2^{n-1}} + (-1)^{n-1} \cdot \frac{2n-1}{2^n}$

相加得

$$\frac{3}{2}S_n = 1 - \left[1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \cdots + (-1)^{n-2}\cdot\frac{1}{2^{n-2}}\right] + (-1)^{n-1}\cdot\frac{2n-1}{2^n}$$

$$= \frac{2}{3}\left[\frac{1}{2} + (-1)^{n-1}\cdot\frac{1}{2^{n-1}}\right] + (-1)^{n-1}\cdot\frac{2n-1}{2^n}$$

$$= \frac{1}{3} + (-1)^{n-1}\cdot\frac{6n+1}{3\cdot 2^n},$$

即 $$S_n = \frac{2}{9} + (-1)^{n-1}\cdot\frac{6n+1}{9\cdot 2^{n-1}},$$

取极限得

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2n-1}{2^{n-1}} = \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{2}{9}.$$

例 2 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^p}\ (p>0)$。

解： 因级数为交错级数，容易看出：符合莱布尼兹定理中的收敛条件，所以级数收敛。但取绝对值所得级数：

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^{n+1}}{n^p}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p},\text{ 此为 } p \text{ 级数},$$

故当 $p>1$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{1}{n^p}$ 绝对收敛；

当 $0<p\leqslant 1$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{1}{n^p}$ 条件收敛。

例 3 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}-\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}---\cdots$。

解： 就整个级数而言，很难用某一种判别法确定其敛散性，但若把它视为下列三个交错级数的和：

$$1-\frac{1}{4}+\frac{1}{7}-\frac{1}{10}+\cdots$$

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{5}+\frac{1}{8}-\frac{1}{11}+\cdots$$

$$\frac{1}{3}-\frac{1}{6}+\frac{1}{9}-\frac{1}{12}+\cdots$$

其中每一个级数都满足莱布尼兹定理中的收敛条件，故由收敛级数的性质知所论级数收敛。但所论级数的绝对值为调和级数(发散)，故原来级数条件收敛。

例 4 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot\frac{2^n\sin^{2n}x}{n}$。

解： 由比值法，$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = 2\sin^2 x$。

故当 $\sin^2 x<\frac{1}{2}$ 时，所论级数绝对收敛。