

例题手册 高中数学

(修订本)

丛书主编 颜 振

本册主编 谢晋超

四川辞书出版社

G634

0241

例题手册

高中数学

(修订本)



CS1505469

丛书主编

顾

本册主编

谢晋超

重庆师大图书馆

四川辞书出版社

1995年·成都

29669

(川)新登字014号

责任编辑:方光琅

封面设计:邱云松

技术设计:王 跃

责任校对:陈晓玲

例题手册·高中数学(修订本)

本册主编 谢晋超

出版发行:四川辞书出版社

成都市盐道街三号 邮编610012

经 销:四川省新华书店

印 刷:中江县印刷厂

开 本:787×1092毫米 1/32

版 次:1993年8月第一版

1996年4月第六次印刷

印 张:12.875 字数 282千

印 数:82501—102500册

ISBN7—80543—464—6/G·106

定价:9.00元

前言

为了加强新课和复习课的针对性与有效性,为了便于教师选题和学生自我检测,减少学习过程中的“无用功”,我们参考了中学各科考试说明和现行教学大纲编写了《例题手册》。本套手册在93年版基础上修订,分为高中语文、英语、数学、物理、化学、初中语文、英语、数学、物理、化学共十册。

本套书由四川省教科所、成都市教科所、重庆市教科所、成都七中、石室中学、树德中学、成都十二中、重庆一中、南开中学、八中、育才中学、乐山一中、绵阳南山中学等主编,有30多位特级教师和学科带头人参加了编写工作。

本手册以中学各科教学大纲和考试说明为依据,参考了高中现行通用本和初中九义教材,以章内的知识单元为单位编写,是一套与教学同步的工具书。书中的每个知识单元由例题和习题组成,每章和全书末有综合的例题和习题。为了便于教师和学生阅读,每一道例题和重点习题都给出了编写目的,例题的重点

在思路过程分析,习题的重点在深化、活化知识,培养发展智能。全书题目难度分配原则上是初学:毕业:高(中)考水平=3:3:4。

本手册以强化知识,促使学生掌握解题的基本方法、技巧,提高中学生解题和应试能力为目的。对学生在学习过程中的疑难问题、错解剖析、知识结构中的关节点都以例题的形式加以说明。所有的习题都附有答案,部分难度、综合度较大的习题还给出了解题思路或提示。

本册主编谢晋超(成都七中)、副主编王希平。编者(按编写顺序)臧葆华(第一章)、罗大紓(第二章)、盛祖强(第三、四章)、吴德仕(第五章)、谢晋超(第六章)、张夏林(第七章)、唐一心、陈咏陶(第八章)、杲绍金(第九章)、王绍华(第十章)、赖有家(第十一章)、胡永碧、喻开基(第十二章)、黄梦雄、李开轲(第十三、四章)等。

书中若有不妥之处,恳请各位同仁和读者指正。

编者

1994年7月

目 录

第一章	幂函数、指数函数和对数函数	(1)
第二章	三角函数	(29)
第三章	两角和与差的三角函数	(52)
第四章	反三角函数和简单三角方程	(78)
第五章	不等式	(94)
第六章	数列、极限、数学归纳法	(117)
第七章	复数	(146)
第八章	排列、组合、二项式定理	(167)
第九章	直线与平面	(186)
第十章	多面体和旋转体	(214)
第十一章	直线	(240)
第十二章	圆锥曲线	(261)
第十三章	坐标平移	(291)
第十四章	参数方程、极坐标	(304)
第十五章	综合训练	(325)
答案与提示		(361)

第一章 幂函数、指数函数 和对数函数

一、集合

例 1 知识要点、方法技巧:根据子集的概念,得出集合 B 的所有元素.

已知集合 $A = \{0, 1\}$, $B = \{x | x \subseteq A\}$, 用列举法写出集合 B.

解: $\because$ 集合 A 的子集是 $\phi, \{0\}, \{1\}, \{0, 1\}$

$\therefore$ 集合 $B = \{\phi, \{0\}, \{1\}, \{0, 1\}\}$.

例 2 知识要点、方法技巧:利用交集和并集的性质得出 B、C 的所有情况,再分类确定参数的值.

已知集合 $A = \{x | x^2 - 5x + 4 = 0\}$,
 $B = \{x | x^2 - ax + a - 1 = 0\}$, $C = \{x | x^2 - mx + 4 = 0\}$,
且 $A \cup B = A$, $A \cap C = C$, 求实数 a, m 的值.

解: $\because A = \{x | x^2 - 5x + 4 = 0\} = \{1, 4\}$,

又 $A \cup B = A$, $A \cap C = C$, $\therefore B \subseteq A, C \subseteq A$.

由 $x^2 - ax + a - 1 = 0$, 得

$$\Delta = a^2 - 4(a - 1) = (a - 2)^2 \geq 0,$$

方程的根 $x = 1$ 或 $x = a - 1$,

$\therefore B \neq \phi$.

$B = \{1\}$ 或 $B = \{1, 4\}$,

$\therefore a - 1 = 1$ 或 $a - 1 = 4$.

即 $a=2$ 或 $a=5$.

由 $x^2 - mx + 4 = 0$, 得 $\Delta = m^2 - 16$.

当 $\Delta = m^2 - 16 = 0$ 时, $x = \pm 2$,

但 $2 \notin A$, $-2 \notin A$, $\therefore \Delta \neq 0$,

$\therefore C = \emptyset$ 或 $C = \{1, 4\}$.

若 $C = \emptyset$, 则 $\Delta = m^2 - 16 < 0$, $\therefore -4 < m < 4$.

若 $C = \{1, 4\}$, 则方程 $x^2 - mx + 4 = 0$ 的两实根 $x_1 = 1$, $x_2 = 4$, $\therefore m = 1 + 4 = 5$.

故所求的 $a=2$ 或 $a=5$, $m=5$ 或 $-4 < m < 4$.

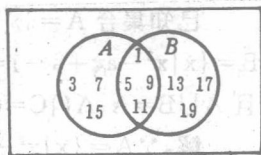
例 3 知识要点、方法技巧:借助于文氏图,根据 $A \cap \bar{B}$, $\bar{A} \cap B$, $\bar{A} \cap \bar{B}$ 的含义,将各集合所有元素填入有关区域内,从而确定全集中每个元素的属向,即可求得 A 和 B .

已知全集 $I = \{x | x \text{ 为小于 } 20 \text{ 的正奇数}\}$, $A \cap \bar{B} = \{3, 7, 15\}$, $\bar{A} \cap B = \{13, 17, 19\}$, $\bar{A} \cap \bar{B} = \emptyset$, 求集合 A 和 B .

解:如图 1-1 可得

$A = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 15\}$,

$B = \{1, 5, 9, 11, 13, 17, 19\}$.



例 4 知识要点、方法技巧:根据相等集的概念,证明 $A \subseteq B$, 且 $B \subseteq A$.

已知

$A = \{a | a = 8n + 12m + 4s, n, m, s \in \mathbb{Z}\}$,

$B = \{b | b = 20p + 16q + 12r, p, q, r \in \mathbb{Z}\}$,

证明: $A = B$.

证明:对于 A 中任一元素 $a = 8n + 12m + 4s = 20n + 16s + 12(m - n - s)$.

$\therefore n, m, s \in \mathbb{Z}$, $\therefore m - n - s \in \mathbb{Z}$.

则 $a \in B$, $\therefore A \subseteq B$.

图 1-1

对于 B 中任一元素

$$b = 20p + 16q + 12r$$

$$= 12r + 8 \cdot (2q) + 4 \cdot (5p)$$

$$\because p, q, r \in \mathbb{Z}, \therefore 2q, 5p \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{则 } b \in A, \therefore B \subseteq A.$$

$$\text{故 } A = B.$$

例 5 知识要点、方法技巧: 根据真子集的概念得出集合 B 的所有情况, 再分类确定参数 a 的取值范围.

$$\text{已知集合 } A = \left\{ x \mid \frac{1}{2} < x < \frac{3}{5} \text{ 或 } x > \frac{3}{2} \right\},$$

$$B = \{ x \mid (x+1)^2 \geq a^4 \}, \text{ 且 } A \subset B. \text{ 求实数 } a \text{ 的取值范围.}$$

$$\text{解: 由 } (x+1)^2 \geq a^4, \text{ 得 } x \geq a^2 - 1 \text{ 或 } x \leq -a^2 - 1,$$

$$\therefore B = \{ x \mid x \geq a^2 - 1 \text{ 或 } x \leq -a^2 - 1 \}.$$

$$\text{由于 } A \subset B \Leftrightarrow a^2 - 1 \leq \frac{1}{2} \text{ 或 } a^2 - 1 = -a^2 - 1$$

$$\text{或 } \begin{cases} a^2 - 1 \leq \frac{3}{2} \\ -a^2 - 1 \geq \frac{3}{5} \end{cases}$$

$$\text{由 } a^2 - 1 \leq \frac{1}{2}, \text{ 解得 } -\frac{\sqrt{6}}{2} \leq a \leq \frac{\sqrt{6}}{2}.$$

$$\text{由 } a^2 - 1 = -a^2 - 1, \text{ 解得 } a = 0.$$

$$\text{由 } \begin{cases} a^2 - 1 \leq \frac{3}{2} \\ -a^2 - 1 \geq \frac{3}{5} \end{cases}, \text{ 得 } a \text{ 无实数解.}$$

$$\therefore a \text{ 的取值范围是 } \left[-\frac{\sqrt{6}}{2}, \frac{\sqrt{6}}{2} \right].$$

习题 1.1

1. 选择题

(1) 设集合 $A = \{x | f(x) = 0\}$, $B = \{x | g(x) = 0\}$, 则方程 $[f(x)]^2 + [g(x)]^2 = 0$ 的解集是()

(A) A (B) B (C) $A \cup B$ (D) $A \cap B$

(2) 设 M 和 N 都是非空集, I 为全集, $M \subset N$, 则下列集合为空集的是()

(A) $M \cap N$ (B) $\overline{M} \cap N$ (C) $M \cap \overline{N}$ (D) $\overline{M} \cup \overline{N}$

(3) 已知集合 $A = \{1, 2\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, 满足 $A \subset M \subset B$ 的集合 M 的个数是()

(A) 7 (B) 8 (C) 9 (D) 25

(4) 设全集 I 为自然数集 N , $E = \{a | a = 2m, m \in N\}$, $F = \{b | b = 4n, n \in N\}$, 则与 N 相等的集合是()

(A) $E \cap F$ (B) $\overline{E} \cup F$ (C) $E \cup \overline{F}$ (D) $\overline{E} \cap \overline{F}$

2. 填空

(1) 若集合 $A = \{\varnothing\}$, $B = \{\varnothing, \{0\}\}$, 则集合 A 与 B 的关系是_____

(2) 已知集合 A, B 各有 12 个元素, $A \cap B$ 有 4 个元素, 则 $A \cup B$ 含有元素_____个.

(3) 若全集 $I = \{\text{小于 } 10 \text{ 的自然数}\}$, $A \subset I, B \subset I, A \cap B = \{3\}, A \cap \overline{B} = \{1, 5, 7\}, \overline{A} \cap \overline{B} = \{9\}$, 则 $B =$ _____.

(4) 若全集 $I = \{2, 4, a^2 - a + 1\}$, $A = \{2, a + 1\}$, $\overline{A} = \{7\}$, 则实数 $a =$ _____.

(5) 若 A, B 是非空集合, $A \cap B = \varnothing$, $M = \{A \text{ 的真子集}\}$, $N = \{B \text{ 的真子集}\}$, 则 $M \cap N =$ _____.

3. 已知集合 $A = \{a^2, a + 1, -3\}$, $B = \{a - 2, 2a + 1, a^2 + 1\}$, $A \cap B = \{-3\}$, 求 a 的值.

4. 已知集合 $M = \{\frac{a}{b}, a, \lg a\}$, $N = \{|\frac{a}{b}|, 0, b\}$, $M = N$, 求 a, b 的值.

5. 已知集合 $A = \{x | x^2 - 1 = 0\}$, $B = \{x | x^2 - 2ax + b = 0, x \in \mathbb{R}\}$, $B \neq \varnothing, A \cap B = B$. 求 a, b 的值.

6. 已知集合 $A = \{x | 1 < x < 2\}$, $B = \{x | x^2 - (a+1)x + a \leq 0, x, a \in \mathbb{R}\}$, 且 $A \subset B$, 求 a 的取值范围.

二、映射与函数

例 6 知识要点、方法技巧: 根据给出的映射的规律: f : 原象 $\rightarrow$ 象 即 $(x, y) \rightarrow (x^2 + y^2, x^2 - y^2)$. 再由象 $(10, 8)$ 求出原象.

已知 (x, y) 在映射 f 下的象是 $(x^2 + y^2, x^2 - y^2)$, 求点 $(10, 8)$ 在 f 下的原象.

解: 由已知得 $\begin{cases} x^2 + y^2 = 10, \\ x^2 - y^2 = 8. \end{cases}$ 解得

$$\begin{cases} x=3, \\ y=1 \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} x=3, \\ y=-1 \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} x=-3, \\ y=1 \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} x=-3, \\ y=-1. \end{cases}$$

$\therefore$ 所求的原象是 $(3, 1); (3, -1); (-3, 1); (-3, -1)$.

例 7 知识要点、方法技巧: 根据函数和定义域的概念, 设 $u = x^2 - 1$, 则 u 的取值范围是 $(0, 1]$, 再求 x 的取值范围, 即为 $f(x^2 - 1)$ 的定义域.

已知 $f(x)$ 的定义域为 $(0, 1]$, 求 $f(x^2 - 1)$ 的定义域.

解: 由已知得, $0 < x^2 - 1 \leq 1$, 解得 $-\sqrt{2} \leq x < -1$ 或 $1 < x \leq \sqrt{2}$.

$\therefore$ 函数 $f(x^2 - 1)$ 的定义域是 $[-\sqrt{2}, -1) \cup (1, \sqrt{2}]$.

例 8 知识要点、方法技巧: 设 $u = x^2 + 2x$, 由定义域概念可知, x 的取值范围是 $[-2, 2]$, 再求 u 的取值范围, 即为 $f(x)$ 的定义域.

已知 $f(x^2 + 2x)$ 的定义域为 $[-2, 2]$, 求 $f(x)$ 的定义域.

解: 设 $u = x^2 + 2x = (x+1)^2 - 1$.

$$\therefore -2 \leq u \leq 2,$$

当 $x = -1$ 时, u 有最小值, 最小值为 -1 ,

当 $x = 2$ 时, u 有最大值, 最大值为 8 ,

$$\therefore -1 \leq u \leq 8.$$

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 的定义域为 $[-1, 8]$.

例 9 知识要点、方法技巧: 利用函数解析式的含义和换元法, 分别求出 $f(x)$ 和 $g(x)$. 再求 $f[g(x)]$.

$$\text{已知 } f\left(x + \frac{1}{x}\right) = x^2 + \frac{1}{x^2}, g(2x-3) = \sqrt{x^2 + \frac{3}{4}}.$$

求 $f[g(x)]$ 解析式.

$$\text{解: } \because f\left(x + \frac{1}{x}\right) = x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2,$$

$$\therefore f(x) = x^2 - 2.$$

$$\text{设 } u = 2x - 3, \text{ 则 } x = \frac{u+3}{2},$$

$$\therefore g(u) = \sqrt{\left(\frac{u+3}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} = \sqrt{\frac{1}{4}u^2 + \frac{3}{2}u + 3},$$

$$\text{即 } g(x) = \sqrt{\frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{2}x + 3}.$$

$$\therefore f[g(x)] = \left[\sqrt{\frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{2}x + 3}\right]^2 - 2 = \frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{2}x + 1.$$

例 10 知识要点、方法技巧: 利用零点分段法去掉绝对值的符号后, 再用列表描点法画出图象.

作函数 $y = 1 - |x - x^2|$ 的图象.

解: 当 $x - x^2 \geq 0$ 即 $0 \leq x \leq 1$ 时, $y = 1 - x + x^2$. 当 $x - x^2 < 0$ 即 $x > 1$ 或 $x < 0$ 时, $y = 1 + x - x^2$.

$$\therefore y = \begin{cases} 1-x+x^2 = (x-\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}, & (0 \leq x \leq 1), \\ 1+x-x^2 = -(x-\frac{1}{2})^2 + \frac{5}{4}, & (x < 0 \text{ 或 } x > 1). \end{cases}$$

列表:

x	...	-1	0	$\frac{1}{2}$	1	2	...
y	...	-1	1	$\frac{3}{4}$	1	-1	...

图象如图 1-2 所示.

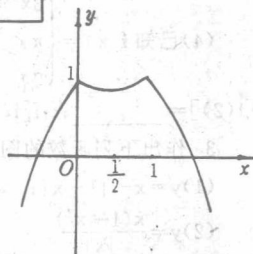


图 1-2

习题 1.2

1. 选择题

(1) 下列各组函数表示同一函数的是()

- (A) $y = \frac{x^2}{x}$ 与 $y = x$ (B) $y = |x-1|$ 与 $y = \sqrt{(x-1)^2}$
 (C) $y = \sqrt{x-1} \cdot \sqrt{x+1}$ 与 $y = \sqrt{x^2-1}$ (D) $y = (\sqrt{x})^2$ 与 $y = |x|$

(2) 已知函数 $y = f(x)$ 的定义域是 $[-2, 2]$, 则函数 $y = f(\sqrt{x})$ 的定义域是()

- (A) $[-4, 4]$ (B) $[-2, 2]$ (C) $[0, 2]$ (D) $[0, 4]$

(3) 设 $b > -a > 0$, 若函数 $y = f(x)$ 的定义域是 $[a, b]$, 则函数 $y = f(x) + f(-x)$ 的定义域是()

- (A) $[-b, -a]$ (B) $[-b, b]$ (C) $[a, -a]$ (D) $[a, b]$

(4) 已知 $f(x - \frac{1}{x}) = x^2 + \frac{1}{x^2}$, 则函数 $f(x+1)$ 的表达式是()

- (A) $(x+1)^2 + \frac{1}{(x+1)^2}$ (B) $(x+1)^2 + 2$
 (C) $(x - \frac{1}{x})^2 + \frac{1}{(x + \frac{1}{x})^2}$ (D) $(x+1)^2 + 1$

2. 填空题

(1) 函数 $y = \frac{\sqrt{2x-x^2}}{|x|-1}$ 的定义域是_____.

(2) 若函数 $y = f(x^2 - 1)$ 的定义域为 $(-2, 1]$, 则函数 $f(x)$ 的定义域是_____.

(3) 设 $f(x) = 2^x$, $g(x) = x^2$, 则 $f(g(x)) =$ _____;
 $g(f(x)) =$ _____.

(4) 已知 $f(x) = \begin{cases} 3x^2 - 4, & (x > 0); \\ \pi, & (x = 0); \\ 0, & (x < 0); \end{cases}$ 则 $f[f(1)] =$ _____;

$f[f(2)] =$ _____, $f\{f[f(-5)]\} =$ _____.

3. 作出下列函数的图象.

(1) $y = x - |1 - x|$;

(2) $y = \frac{x(1+x^2)}{|x|}$.

4. 已知 $f(x)$ 是一次函数, 且 $f[f(x)] = 4x + 1$, 求 $f(x)$ 的解析式.

5. 已知 $f(x) = \frac{1}{1-x}$, $f_1(x) = f(x)$,
 $f_2(x) = f[f_1(x)]$, $\dots$, $f_n(x) = f[f_{n-1}(x)]$, 求 $f_{1993}(x)$ 的表达式.

6. 如图 1-3, 等腰梯形 ABCD 中, $AB = 3$, $CD = 1$, 高 $DH = 2$, 直线 $MN \parallel DH$, A 到 MN 的距离 $AM = x$ ($0 \leq x \leq a$). 试将梯形位于 AD 和 MN 之间部分的面积 S 表示为 x 的函数.

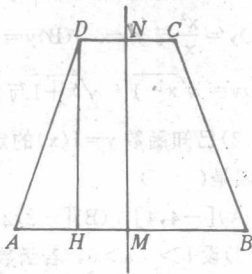


图 1-3

三、幂函数

例 11 知识要点、方法技巧: 根据幂函数的定义和性质求参数 m 的值, 可得函数解析式.

已知函数 $y=f(x)=(m^2+m-1)x^{2m}$ 是幂函数, 在 $(0, +\infty)$ 上是减函数, 求 $f(x)$ 的表达式.

解: $\because y=f(x)=(m^2+m-1)x^{2m}$ 是幂函数,

$$\therefore m^2+m-1=1,$$

解得 $m=1$ 或 $m=-2$.

$\because$ 幂函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上是减函数,

$$\therefore 2m < 0, \text{ 因此, } m = -2.$$

$$\therefore f(x) = x^{-4}.$$

例 12 知识要点、方法技巧: 根据奇函数、偶函数的定义, 判定函数的奇偶性.

判定下列函数的奇偶性:

$$(1) f(x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{|x+2|-2};$$

$$(2) f(x) = \begin{cases} \sqrt{x}+1, & (x>0); \\ \sqrt{-x}+1, & (x<0). \end{cases}$$

思路分析: 判定函数的奇偶性应先看其定义域是否是关于原点的对称区间. 若是, 再考查 $f(-x)$ 与 $f(x)$ 之间的关系, 否则, $f(x)$ 为非奇、非偶函数.

$$\text{解: (1) 要使函数式有意义} \Leftrightarrow \begin{cases} 1-x^2 \geq 0, \\ |x+2|-2 \neq 0. \end{cases}$$

$$\text{解得 } -1 \leq x < 0 \text{ 或 } 0 < x \leq 1.$$

$\therefore$ 函数的定义域是 $[-1, 0) \cup (0, 1]$, 它是关于原点对称的区间.

$$\therefore \text{原函数可化简为 } f(x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x+2-2} = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}.$$

$$\therefore f(-x) = \frac{\sqrt{1-(-x)^2}}{-x} = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} = -f(x),$$

$$\text{又 } f(x) \neq 0,$$

$\therefore f(x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{|x+2|-2}$ 是奇函数.

(2) 当 $x < 0$ 时, $-x > 0$, $\therefore f(-x) = \sqrt{-x} + 1$.

又 $x < 0$ 时, $f(x) = \sqrt{-x} + 1$,

$\therefore$ 当 $x < 0$ 时, $f(-x) = f(x)$.

同理可得 当 $x > 0$ 时, $f(-x) = f(x) = \sqrt{x} + 1$.

$\therefore$ 函数 $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} + 1, & (x > 0); \\ \sqrt{-x} + 1 & (x < 0). \end{cases}$ 是偶函数.

例 13 知识要点、方法技巧:按函数 $f(x)$ 的奇偶性,进行分类讨论,从而确定 $F(x)$ 的奇偶性.

已知 $f(x)$ 是定义在 $\mathbb{R}$ 上的任一函数,判定函数 $F(x) = f(x) + f(-x)$ 的奇偶性.

解: $\because f(x)$ 的定义域是 $\mathbb{R}$,

$\therefore F(x) = f(x) + f(-x)$ 的定义域是 $\mathbb{R}$.

(1) 当 $f(x)$ 是奇函数时, $f(-x) = -f(x)$,

$\therefore F(x) = f(x) - f(x) = 0$.

$\therefore F(x)$ 既是奇函数又是偶函数.

(2) 当 $f(x)$ 是偶函数时, $f(-x) = f(x)$,

$\therefore F(x) = f(x) + f(x) = 2f(x)$,

$F(-x) = 2f(-x) = 2f(x)$.

$\therefore F(x)$ 是偶函数.

(3) 当 $f(x)$ 既是奇函数又是偶函数时, $f(x) \equiv 0$,

$\therefore F(x) \equiv 0$.

$F(x)$ 既是奇函数又是偶函数.

(4) 当 $f(x)$ 既不是奇函数又不是偶函数时, $F(-x) = f(-x) + f(x) = F(x)$,

$\therefore F(x)$ 是偶函数.

例 14 知识要点、方法技巧:利用求差法比较 $f(x_1)$ 与 $f(x_2)$ 的大小.

根据函数单调性的定义,证明函数 $f(x) = -x^3 + 1$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上是减函数.

思路分析:要判定差式 $f(x_1) - f(x_2)$ 的符号,常常将差式分解因式或配方.

证明:在 $(-\infty, +\infty)$ 上任取 x_1, x_2 , 且 $x_1 < x_2$, 则 $f(x_1) - f(x_2) = x_2^3 - x_1^3 = (x_2 - x_1)(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2) = (x_2 - x_1)\left[\left(x_1 + \frac{x_2}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}x_2^2\right]$.

$$\because x_1 < x_2$$

$$\therefore x_2 - x_1 > 0.$$

$$\because x_1, x_2 \text{ 不可能同时为零}, \quad \therefore \left(x_1 + \frac{x_2}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}x_2^2 > 0.$$

$$\therefore f(x_1) - f(x_2) = (x_2 - x_1)\left[\left(x_1 + \frac{x_2}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}x_2^2\right] > 0,$$

$$\text{即 } f(x_1) > f(x_2).$$

$\therefore$ 函数 $f(x) = -x^3 + 1$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上是减函数.

例 15 知识要点、方法技巧:利用函数的单调性和奇偶性判断差式 $[f(x_1)]^2 - [f(x_2)]^2$ 的符号.

$f(x)$ 是定义在 $\mathbb{R}$ 上的奇函数, 在区间 $[-a, -b] (a > b > 0)$ 上 $f(x)$ 是减函数, 且 $f(-b) > 0$, 利用函数单调性的定义证明: 函数 $[f(x)]^2$ 在区间 $[b, a]$ 上是增函数.

证明: 设 $b \leq x_1 < x_2 \leq a$, 则 $-a \leq -x_2 < -x_1 \leq -b$

$$[f(x_2)]^2 - [f(x_1)]^2 = [f(x_2) + f(x_1)][f(x_2) - f(x_1)]$$

$\because f(x)$ 在 $[-a, -b]$ 上是减函数, $f(-b) > 0$,

$$\therefore f(-x_2) > f(-b) > 0 > f(-x_1) \geq f(-b) > 0,$$

$$\therefore f(-x_2) > f(-x_1).$$

又 $f(x)$ 是奇函数,