

“十二五”高等学校
动漫游戏专业设计丛书

游戏数学 基础教程

房晓溪 主 编
侯宇坤 副主编

中国铁道出版社
CHINA RAILWAY PUBLISHING HOUSE

“十二五”高等学校动漫游戏专业设计丛书

游戏数学基础教程

房晓溪 主 编

侯宇坤 副主编

中国铁道出版社
CHINA RAILWAY PUBLISHING HOUSE

内 容 简 介

本书主要讲解了与计算机游戏开发相关的数学知识和物理知识,重点为3D数学。3D数学是一门和计算几何相关的学科,主要研究怎样用数值方法解决几何问题。3D数学和计算几何广泛应用在游戏开发领域中,如图形变换、物理仿真等。本书讲述基本的代数和几何知识,包括向量、矩阵、四元数、几何变换等相关内容;讲述计算机游戏开发的相关数学知识,包括几何图元的碰撞检测、可见性判断、光照等内容;介绍物理的基础知识,包括力学、运动学、碰撞等基础物理理论。本书在对相关数学知识进行讨论的同时,给出了相应的C++实现代码。

本书既可作为高等院校动漫游戏专业的游戏开发教程,也可作为游戏开发人员的参考用书和游戏开发爱好者的自学教材。

图书在版编目(CIP)数据

游戏数学基础教程 / 房晓溪主编. — 北京: 中国铁道出版社, 2012.7

(“十二五”高等学校动漫游戏专业设计丛书)

ISBN 978-7-113-14704-4

I. ①游… II. ①房… III. ①数学—高等学校—教材
IV. ①O1

中国版本图书馆CIP数据核字(2012)第102911号

书 名: 游戏数学基础教程

作 者: 房晓溪 主编

策 划: 巨 凤

读者热线: 400-668-0820

责任编辑: 徐盼欣

封面设计: 一克米工作室

责任印制: 李 佳

出版发行: 中国铁道出版社(100054, 北京市西城区右安门西街8号)

网 址: <http://www.51eds.com>

印 刷: 北京新魏印刷厂

版 次: 2012年7月第1版 2012年7月第1次印刷

开 本: 787mm×1092mm 1/16 印张: 14.5 字数: 346千

印 数: 1~3 000册

书 号: ISBN 978-7-113-14704-4

定 价: 32.00元

版权所有 侵权必究

凡购买铁道版图书, 如有印制质量问题, 请与本社教材图书营销部联系调换。电话: (010) 63550836

打击盗版举报电话: (010) 63549504

前 言

计算机游戏开发技术是一门与数学及物理紧密相关的技术，数学及物理知识在计算机游戏开发中占有重要的位置，正是由于有深厚的数学及物理理论做后盾，计算机模拟的虚拟游戏世界才可以像今天这样逼真。

本书主要介绍了计算机图形学、仿真、计算几何等学科的基础知识，物理方面的基础知识，以及游戏开发中光照的数学计算知识等，旨在使学生对相关知识有更深入的理解。

学习本书前，学生需要掌握一些基本的理论知识和实践知识。此处所说的理论知识主要是指代数和几何知识，具体包括：

- 代数表达式变换；
- 代数运算法则，如结合律、分配律；
- 函数和变量；
- 基本2D欧几里得几何知识；
- 三角函数的基本知识。

而此处所说的实践知识，则主要是指C++编程的基础知识，具体包括：

- 程序流程控制；
- 函数和参数；
- 面向对象编程和类的设计。

这里需要说明的是，本书中的样本代码不受编译器和目标平台的限制，对于“高级”的C++语言特征和可能不熟悉的语言特征（如操作符重载、引用参数等）这里并未涉及，也不需要学生在特定的知识背景下学习。

本书的主要内容有：

第1章 数学基础与坐标系统，主要介绍有关坐标系统的知识及一些游戏和图形应用开发中常用的坐标系统和一些简单的数学概念。

第2章 向量，主要介绍3D数学中的向量，着重介绍向量和向量运算的几何意义。

第3章 矩阵，主要介绍3D数学中的矩阵，从数学的角度讨论矩阵的基本性质和运算，介绍这些性质、运算和几何解释，并深入探讨矩阵与线性变换之间的关系，讨论怎样使用矩阵的运算将基本变换按顺序组合成一个复杂的变换矩阵及各种变换的种

类，最后介绍关于矩阵的其他有用知识点。

第4章 3D空间的方位与角位移，主要介绍在3D数学中如何描述物体方位，讨论角位移的概念，介绍3D数学中描述方位和角位移的常用方法，如矩阵、欧拉角和四元数等。

第5章 空间几何体，主要介绍几何图形的基本性质，讲解一般和特殊的几何图形，给出这些图形的表达方法和它们的重要性质及操作，并且给出一些C++代码，用于表达图形和实现所讨论的操作。

第6章 几何检测和碰撞检测，主要介绍碰撞检测系统的基础、最近点和相交性检测，这些知识可以帮助学生更好地理解碰撞检测的原理；还介绍了关于可见性检测的方法、概念，并详细讲解四叉树的概念实现。

第7章 物理模拟，主要介绍游戏开发中应用到的物理基础知识。在游戏开发的整个过程中，会用到很多物理学的知识，许多特定游戏的元素都需要通过实际物理的模拟才能达到真实的效果。

第8章 光线的相关算法，主要介绍光线的相关知识。在游戏中，光线跟踪的应用包括光谱的产生、可见性确定、碰撞检测及视线检测。这里重点介绍当光线照射到物体上时，如何确定光线与物体的交点，以及当光线照射到反射面或折射面时，光线的传播路径是如何改变的。

第9章 光照，主要介绍光照的相关知识。首先讲解RGB颜色系统，列举各种各样的光源，然后介绍漫反射光和镜面反射光，最后分析描述渲染表面细节的技术，如纹理映射。

本书由房晓溪任主编，侯宇坤任副主编，其中房晓溪负责全书的策划、内容的审订和章节的安排；侯宇坤负责全书的整理及校对工作。此外，本书的编写工作还得到了中国铁道出版社的编辑同志的帮助，他们提出了宝贵的意见和建议，在此一并表示感谢。希望本书能够给广大游戏开发人员、游戏开发爱好者及游戏专业的学生带来帮助。

由于编写时间有限，书中不足之处在所难免，望各位读者不吝赐教。

编者

2012年2月

目 录

第1章 数学基础与坐标系统.....	1
1.1 3D数学简介.....	3
1.2 数学坐标系.....	3
1.2.1 一维数学.....	4
1.2.2 2D数学.....	5
1.2.3 3D扩展.....	6
1.3 多坐标系.....	8
1.3.1 常见坐标系.....	9
1.3.2 坐标系转换.....	11
1.4 简单的数学概念.....	12
1.4.1 角度、度和弧度.....	12
1.4.2 三角函数.....	13
1.4.3 三角公式.....	14
小结.....	16
习题.....	16
扩展练习.....	16
第2章 向量.....	17
2.1 向量的定义.....	19
2.1.1 向量的数学定义.....	19
2.1.2 向量的几何定义.....	21
2.1.3 向量的大小（模）.....	22
2.2 几种特殊向量.....	23
2.3 向量的运算.....	25
2.3.1 标量与向量的乘法.....	25
2.3.2 向量的加减法.....	26
2.3.3 向量的点乘.....	29
2.3.4 向量的叉乘.....	32
2.4 线性代数公式.....	33
小结.....	34
习题.....	34
扩展练习.....	34

第3章 矩阵.....	35
3.1 矩阵的数学定义.....	37
3.2 矩阵的运算.....	39
3.3 矩阵的几何意义.....	42
3.4 D3DX中的矩阵.....	46
3.5 线性变换.....	48
3.5.1 物体的转换与坐标系的转换.....	49
3.5.2 旋转矩阵.....	51
3.5.3 缩放矩阵.....	56
3.5.4 正交投影.....	60
3.5.5 镜像.....	61
3.5.6 变换的组合.....	63
3.6 变换分类.....	64
3.7 矩阵的行列式.....	66
3.8 逆矩阵.....	67
3.9 正交矩阵.....	68
3.10 齐次矩阵.....	71
3.10.1 基本概念.....	71
3.10.2 透视投影.....	75
3.10.3 小孔成像.....	76
小结.....	78
习题.....	79
扩展练习.....	79
第4章 3D空间的方位与角位移.....	81
4.1 方位的概念.....	83
4.2 方位的矩阵描述.....	84
4.3 欧拉角.....	86
4.3.1 欧拉角定义.....	86
4.3.2 欧拉角的优缺点.....	88
4.4 四元数.....	90
4.4.1 基本概念.....	91
4.4.2 四元数的几种运算.....	93
4.5 表达方式的转换.....	99
4.6 代码实现.....	101
4.6.1 欧拉角类.....	102
4.6.2 四元数类.....	106

小结.....	111
习题.....	112
扩展练习.....	112
第5章 空间几何体	113
5.1 表达方式.....	115
5.2 直线与射线.....	116
5.3 平面.....	120
5.4 球和圆.....	122
5.4.1 表达方法.....	122
5.4.2 包围盒.....	123
5.5 三角形.....	127
5.5.1 基本概念及性质.....	128
5.5.2 三角形的面积.....	128
5.5.3 重心坐标系.....	130
5.5.4 三角形中的特殊点.....	133
小结.....	135
习题.....	135
扩展练习.....	136
第6章 几何检测和碰撞检测	137
6.1 图形上的最近点.....	139
6.2 相交性检测.....	142
6.3 碰撞检测.....	149
6.4 可见性检测.....	150
6.4.1 包围体检测.....	150
6.4.2 空间分割.....	151
小结.....	156
习题.....	156
扩展练习.....	157
第7章 物理模拟	159
7.1 基本概念.....	161
7.1.1 牛顿运动定律.....	161
7.1.2 质量和质心.....	163
7.2 运动学.....	164
7.3 力.....	167
7.3.1 力场和万有引力.....	167

7.3.2	摩擦力.....	168
7.3.3	压力和压强.....	169
7.3.4	浮力.....	170
7.3.5	弹簧力.....	172
7.3.6	离心力.....	173
7.4	动量与碰撞.....	174
7.4.1	冲量、动量定律.....	174
7.4.2	碰撞.....	175
	小结.....	180
	习题.....	180
	扩展练习.....	182
第8章	光线的相关算法.....	183
8.1	根的求解.....	185
8.1.1	二次多项式.....	185
8.1.2	三次多项式.....	186
8.1.3	四次多项式.....	189
8.2	曲面交点.....	190
8.2.1	光线与三角形相交.....	190
8.2.2	光线与长方体相交.....	191
8.2.3	光线与球体相交.....	192
8.2.4	光线与圆柱面相交.....	193
8.2.5	光线与环形圆纹曲面相交.....	193
8.3	法向量的计算.....	194
8.4	反射向量和折射向量.....	195
8.4.1	反射向量的计算.....	195
8.4.2	折射向量的计算.....	196
	小结.....	197
	习题.....	197
	扩展练习.....	198
第9章	光照.....	199
9.1	RGB颜色系统.....	201
9.2	光源.....	202
9.2.1	环境光.....	202
9.2.2	定向光源.....	202
9.2.3	点光源.....	203
9.2.4	聚集光源.....	203

9.3 漫反射光.....	204
9.4 纹理映射.....	204
9.4.1 标准纹理图.....	205
9.4.2 投影纹理图.....	206
9.4.3 立方体纹理图.....	207
9.5 镜面反射光.....	209
小结.....	210
习题.....	210
扩展练习.....	210
附录A 简单的数学公式	211
附录B 常用的物理公式	215
附录C 部分习题参考答案	219
参考文献	222

第1章

数学基础与坐标系统

本章主要内容:

3D 数学简介

一维数学

2D 数学

3D 扩展

世界坐标系

物体坐标系

摄像机坐标系

惯性坐标系

坐标系转换

本章重点:

2D 坐标系的建立

坐标系的种类

坐标系转换

本章难点:

坐标系转换

学完本章您将能够:

- 了解 3D 数学知识
- 掌握坐标系的概念及表示
- 了解各种坐标系的定义
- 了解坐标系转换

引 言

3D数学是一门和计算几何相关的学科。计算几何是研究怎样用数值方法解决几何问题的学科。3D数学和计算几何广泛应用在那些使用计算机来模拟3D世界的领域，如图形学、游戏、仿真、机器人技术、虚拟现实和动画等。3D数学讲解如何在3D空间中精确度量位置、距离和角度，其中使用最广泛的度量体系是笛卡儿坐标系统。本章将介绍有关坐标系统的知识，以及一些在游戏和图形应用开发中常用的坐标系和简单的数学概念。

1.1 3D数学简介

本书研究隐藏在3D几何世界背后的数学问题，研究内容包括理论知识和C++实现代码。“理论”部分解释3D中数学和几何之间的关系，列出的技巧与公式可以当做参考手册以方便查找。“实现”部分演示了怎样用代码来实现这些理论概念。本书编程语言使用C++，而实际上，本书的理论知识能用任何编程语言实现。

3D游戏数学填补了讲解图形学、线性代数和编程之间关系的鸿沟，可以作为学生编写游戏和图形程序的重要基础。

1.2 数学坐标系

笛卡儿数学由伟大的法国哲学家、物理学家、生理学家、数学家勒奈·笛卡儿（René Descartes, 1596—1650）发明，并以他的名字命名。笛卡儿不仅创立了解析几何，将当时完全分开的代数学和几何学联系到了一起，他还在回答“我怎样判断某件事情是真的”这个问题上迈出了一大步，使后来的一代哲学家能够轻松愉快地工作。

本节将介绍一维数学、2D数学及3D数学中坐标系的建立和特点。

1.2.1 一维数学

在进入学习3D数学之前，需要了解关于数字系统和计数的一些概念。本节将学习有关一维数学的知识。

数学是一门实用学科，随着历史的发展，人类对数学的利用越来越深入。在很早以前，人们在生活中为了便于计数，他们不准备为所有的自然数命名，而是发展出多种计数系统，在需要时再为自然数命名——使用数字“1”、“2”等。

人们习惯于应用数学的知识把数排成一排，由此产生了数轴的概念，如图1-1所示。

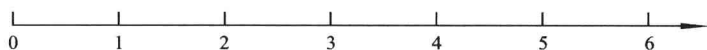


图1-1 自然数数轴

数轴描述为：在一条直线上等间隔地标记数字。理论上，数轴可以无限延长，后面用一个箭头来表示数轴延长的方向。当然，在某些情况下，需要将数轴向反方向延长，表示负值，由此产生了整数，其是由自然数和与自然数相反的数组成，如图1-2所示。



图1-2 整数数轴

在实际应用过程中，人们逐渐发现了分数——由一个整数除以另一个整数所得到的数字，如 $\frac{4}{5}$ ，这些数统称为有理数。有理数填补了之前整数的空白，并出现了小数点的表示方法，如 $\frac{4}{5}$ 的小数表示为0.8。

在逐渐发展中，出现了一些不能由有理数表示的数字，如最常见的“圆周率 π ”，人们把这样的数称为无理数，数的范畴就扩充成了实数。实数包括有理数和无理数，实数数学被很多人认为是数学中重要的领域之一，研究实数的领域被称为“连续数学”。

对于3D虚拟世界的设计者来说，可以使用C++提供的多种数据类型来描述3D虚拟世界，包括short、int、float和double。short是16位整数，可以表示65 536个不同的数值。虽然这个数很大，但度量现实世界还是远远不够的。int是32位整数，可以表示4 294 967 296个不同的数值。float是32位有理数，可以表示4 294 967 296个数值。double与float类似，可以表示64位有理数。

1.2.2 2D数学

1. 引入2D坐标系

2D坐标系又称笛卡儿坐标系，即为矩形坐标系。举一个常用的例子，使用该坐标系来描述一张某城市的平面地图，如图1-3所示。

从图中可以看到，把地图平均分成均匀的若干小区域，中心处贯穿城市东西、南北，将城市分成4个等分区域，其他街道名称分别由中心街区向外扩展。对于此图而言，很容易描述城市中的建筑，如图1-3所示，图中黑色圆圈表示某一建筑，可以很容易地在西三街区与北二街区找到该建筑。

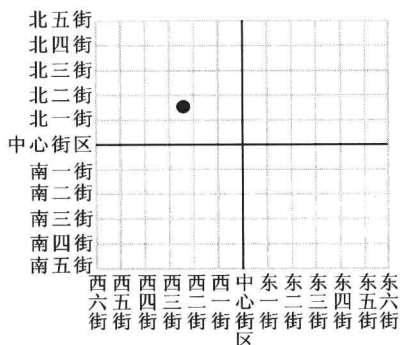


图1-3 某城市平面地图

2. 2D坐标系的建立

前面通过实例引入笛卡儿坐标系的概念，利用坐标系作为一个城市平面地图的表示方法，当然，可以把此方法应用到任何一个地方，如一个房屋的平面图、一个场景关卡的俯视图等。下面将建立一个2D笛卡儿坐标系，如图1-4所示。

2D笛卡儿坐标系的解释如下：

1) 每个2D笛卡儿坐标系都有一个特殊的点，称为原点，它是坐标轴的中心，如图1-4中原点所示。

2) 每个2D笛卡儿坐标系都有两条过原点的直线向两侧无限延伸，称为“轴”。两个轴互相垂直，即图1-4中的x轴、y轴。

3) 上面所介绍的城市平面地图的例子与2D笛卡儿坐标系有了很明显的区别：城市是有范围的区域，而2D空间是无限延伸的，表现为x轴和y轴向正负两个方向延伸；对于城市的任意街道都是有宽度的，其中容纳建筑等设施，而坐标系中的任意直线是没有宽度的。

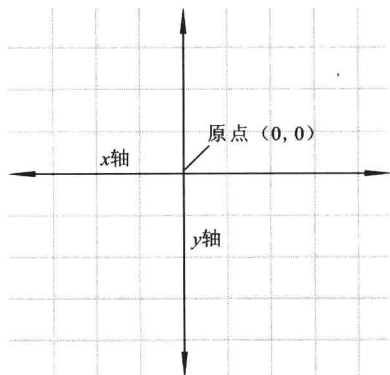


图1-4 2D笛卡儿坐标系

3. 2D笛卡儿坐标系中任意一点的表示

2D中，两个数 (x, y) 就可以定位一个点（因为是2D空间，所以使用两个数。与此类似，3D空间中使用3个数）。与某城市平面地图中描述建筑的位置一样，坐标系中每个分量都表明了该点与原点之间的距离和方位。确切地说，每个分量都是到相应轴的有符号距离。图1-5所示为表示坐标系中任意一点的定位。

如图1-5所示， x 分量表示该点到 y 轴的有符号距离，同样， y 分量表示该点到 x 轴的有符号距离。“有符号距离”是指在某方向上距离为正，而在相反的方向上为负。

下面来表示2D笛卡儿坐标系中任意一点的坐标。图1-6展示了坐标系中多个任意点。

应该注意的是， y 轴左侧点的 x 坐标值都是负值，右侧则是正值， x 轴上侧点的 y 坐标值都是正值，下侧则是负值。当然，图中为了感官上清晰，将坐标轴分为了很多区域，有些点在区域的交点上，也有些点不在区域的交点上，但对于任意一点，都是可以用 (x, y) 表示的。

1.2.3 3D扩展

在上一节中讲解了2D坐标系的建立及表示，本节将2D扩展到3D的空间中，将讲解3D坐标系的建立、3D空间中任意点的描述及两种非常重要的3D坐标系。

1. 3D坐标系建立

在2D空间中需要2个坐标轴表示。3D空间与2D空间的不同，在于除了能表示平面上的点以外，加入了一个深度的概念，使坐标系可以表示3D空间中的任意一点。为表示空间中的点，新加入一个坐标

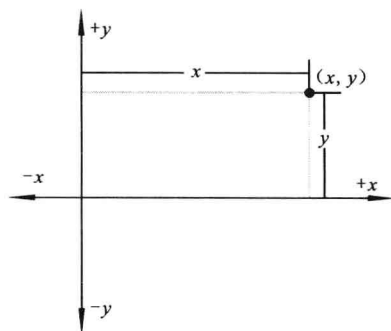


图1-5 2D笛卡儿坐标系中定点的表示

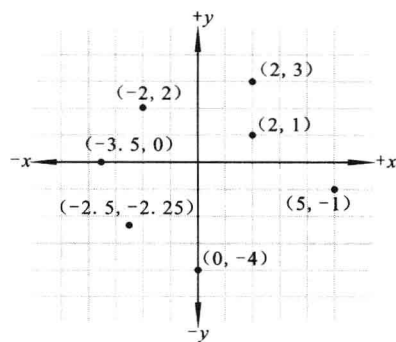


图1-6 2D笛卡儿坐标系中任意一点坐标

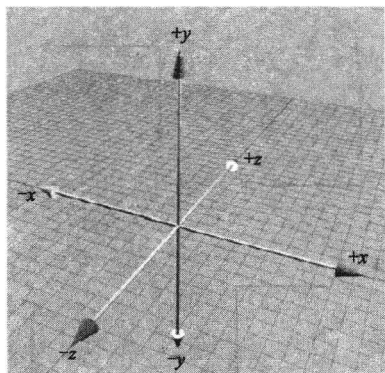


图1-7 3D笛卡儿坐标系

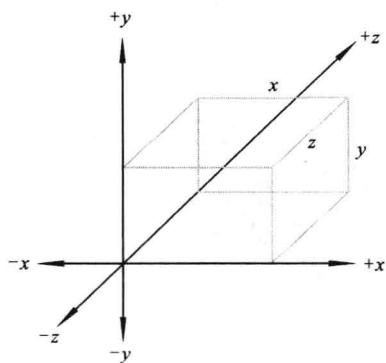


图1-8 3D笛卡儿坐标系中定点的表示

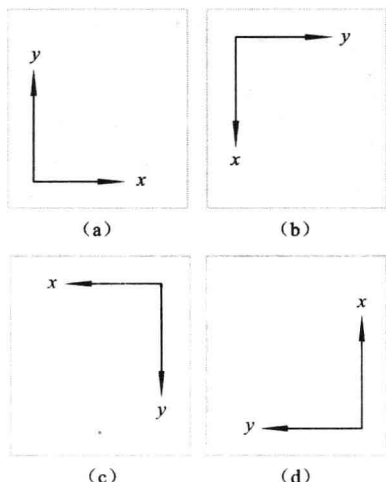


图1-9 不同坐标轴方向的表示

轴 z 轴， z 轴和 x 轴、 y 轴相互垂直，即每个轴都垂直于另外两个轴。图1-7展示了一个3D坐标系。

在之前的一节中已经讲过，2D坐标系的统一标准： x 轴正向为向右， y 轴正向为向上，但是，在3D坐标系中并没有统一的标准，因为在不同领域研究时，将使用不同的标准，图1-7中定义 z 轴正方向是指向本书纸面里的。下面将讨论3D坐标系的两种坐标系种类。

这里需要注意的是，将3D坐标系中的 x 、 y 轴等同于2D坐标系中的 x 、 y 轴是不准确的。在3D坐标系中，任意两个坐标轴所构成的平面都垂直于第三个轴，所以，可以认为在3D坐标系中3个轴建立了3个2D坐标系（ x 、 y 轴的 xy 平面； x 、 z 轴的 xz 平面； y 、 z 轴的 yz 平面）。

将2D坐标系对于定点的表示扩展到3D空间，即在3D中表示一个点，需要3个数： x 、 y 和 z 分别表示到 yz 、 xz 和 xy 平面的有符号距离，如图1-8所示。

2. 右手坐标系与左手坐标系

上面提到了3D坐标系两种标准的问题。首先，先从2D坐标系来讨论关于定义坐标轴的问题。在2D笛卡儿坐标系中，可以根据自己的需要定义坐标轴的指向，例如规定 x 轴向右为正方向， y 轴向下为正方向等，可能的轴向共8种，如图1-9所示。

对于图1-9（a）至图1-9（d），在2D坐标系中，无论 x 、 y 轴的方向如何，都能通过旋转使 x 轴的正方向为向右， y 轴正方向为向上；而对于图1-9（e）至图1-9（h），则可以通过绕 x 轴或 y 轴翻转得到，比如图1-9（e）所示是通过图1-9（d）绕 x 轴翻转的结果，即可得出结论：所有2D坐标系都是“等价”的。

那么，在3D坐标系中是一样的吗？试着将3D坐标系做旋转，以图1-7所示，是否能将 z 轴方向与