画法几何

上海交通大学

一九八一年

画　法　几　何

650 教 研 组

上 海 交 通 大 學

目　录

第一章　绪　论

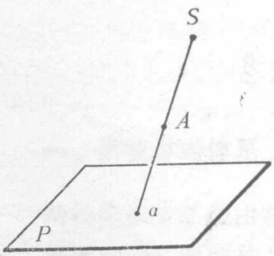
§1-1　画法几何的研究对象

画法几何的研究对象有二：第一是研究空间几何形体在平面上的表示法；第二是研究如何在平面上用几何作图的方法来解决空间几何问题。因此，画法几何是一门研究对空间几何结构进行图示和图解的学科。

画法几何主要是应用投影的方法来解决空间几何结构的图示和图解问题。学习画法几何能培养和发展空间几何结构的想象能力，以及分析和解决空间几何问题的能力。这种能力不仅是对于工程制图和设计有密切的关系，对于其他学科的学习和研究，例如分子结构、空间力学、空间机构学、结晶学、测量学等，也有不可忽视的作用。

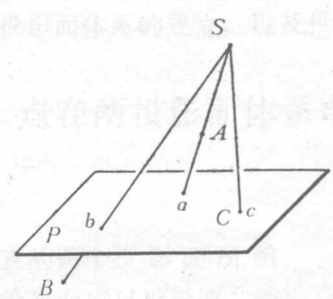
§1-2　投影的基本知识

画法几何中主要应用的方法是投影法，就是作出空间几何形体在平面(或柱面、球面)等上的投影，再加以研究和分析。下面将介绍投影的形成和分类，



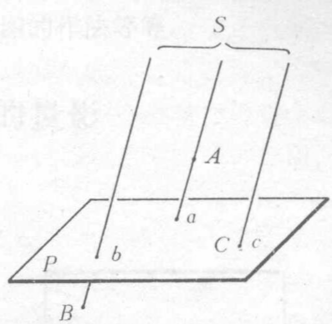
投影概念

图　1-1



中心投影

图　1-2



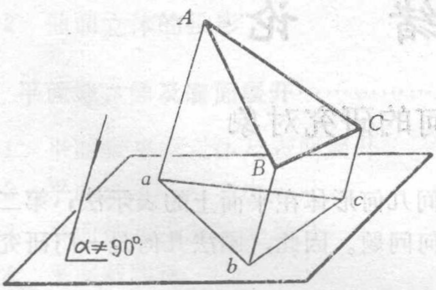
平面投影

图　1-3

图 1-1 中，A为空间一个点。P平面为投影面。不在投影面上的一点S为投影中心。由投影中心S作过A点的直线为A点的投射线，此投射线与P面相交，得到交点a即为A点在P投影面上的投影。

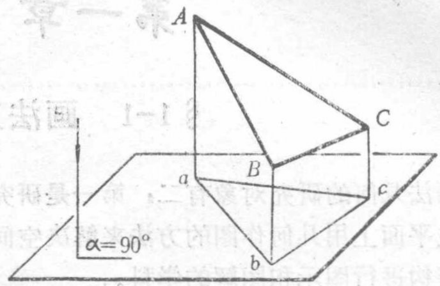
图 1-2 中，A，B，C为空间的三个点。P为投影面。S为投影中心。由S作通过A B，C三点的投射线与投影面相交，得到三个交点a，b，c，为A，B，C三点在P投影面上的投影。由于这里所有的投射线都是由一个点，即投影中心S发出的，这种投影称为中心投影。如S点在无穷远处，则投射线SA，SB，SC可看为相互平行，如图 1-3 所示。对于投射线相互平行的投影，则称为平行投影。

平行投影中，投射线与投影面倾斜的称为斜投影；投射线与投影面垂直的称为正投影。如图 1-4 中，Aa，Bb，Cc 相互平行，投射线与投影面倾斜成 α 角，$\alpha \neq 90°$，是为斜投影。图 1-5 中，投射线 Aa，Bb，Cc 都与投影面 P 垂直，是为正投影。



斜投影

图 1-4



正投影

图 1-5

综上所述，投影的分类可简列为：

$$\text{投影}\begin{cases}\text{中心投影}\\ \text{平行投影}\begin{cases}\text{正投影}\\ \text{斜投影}\end{cases}\end{cases}$$

第二章 点

图 2-1 中，A为空间一点，P为投影面，S为投射线方向。过A点作投射线与投影面相交，所得交点就是A点在P面上的投影a。由于过A点只能作一根投射线与P面相交。因此，交点只有一个，也就是说空间的一个A点，如投射方向S已定，在P面上的投影只能有一个，就是唯一的a点。

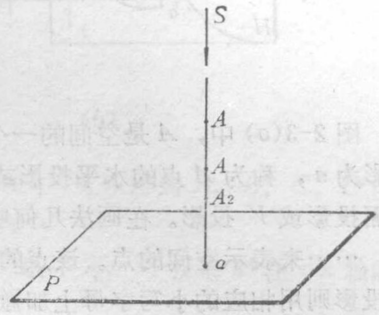


图 2-1

但是如果知道a点是空间一点A的投影，且投射方向已知，则不能根据a点来完全确定A点的空间位置。这是因为任何在过a点的投射线上的点，如图中的A，A_1，A_2等，它们的投影都在a点的位置。也就是说，单单凭点的一个投影是不能确定该点的空间位置的。在画法几何中，可以用正投影法，标高投影法，轴测投影法，透视投影法等不同的投影法来表达空间几何形体的形状的位置。正投影法是利用两个或更多的投影面上的投影来表达空间几何形体的形状和位置的一种方法。这一方法因作图简便而又能准确，在工程技术中应用最为广泛。本书主要是研究用多投影面的正投影法来解决空间几何结构的图示和图解问题。下面将介绍多投影面体系的建立，以及投影图的作法等等。

§2-1 点在两投影面体系中的投影

一、两投影面体系

两投影面体系是由相互垂直的两个投影面所组成。处于水平位置的称为水平投影面或H投影面。处于正前方且垂直于H投影面的称为正立投影面或V投影面。这两个投影面的交线称为投影轴，如图 2-2 中的OX。

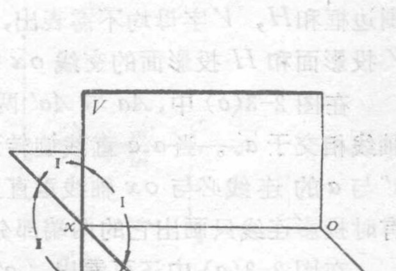


图 2-2

H投影面和V投影面把空间分为四个部分，称为四个分角，它们和投影面的相对位置是：

第一分角　在H上V前
第二分角　在H上V后
第三分角　在H下V后
第四分角　在H下V前

图 2-2 中的Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ、Ⅳ即表示了这四个分角的位置。

二、点的投影

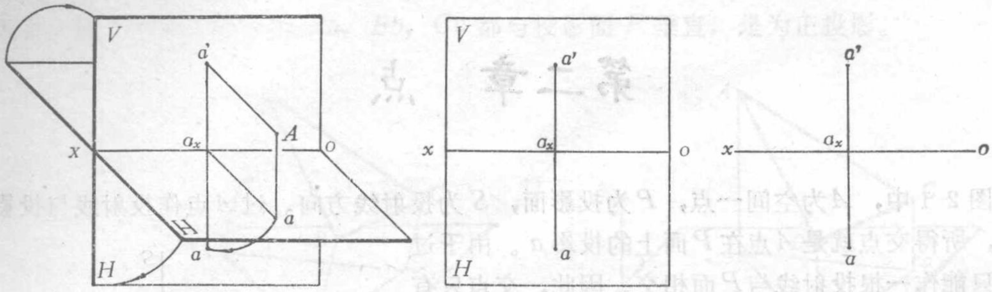


图 2-3

图 2-3(a) 中，A 是空间的一个点，所处的空间是第一分角。A 点在 H 投影面上的投影为 a，称为 A 点的水平投影或 H 投影。A 点在 V 投影面上的投影为 a'，称为 A 点的正面投影或 V 投影。在画法几何中，为便于区分，我们用大写的英文字母，如 A，B，C，……来表示空间的点。该点的水平投影用相应的小写字母 a，b，c……来表示；正面投影则用相应的小写字母上加撇，如 a'，b'，c'……来表示。在我们所讨论的多面体系正投影法中，投射线总是与投影面相垂直的。所以图 2-3(a) 中的 Aa 垂直于 H 投影面，Aa' 垂直于 V 投影面。但是图 2-3(a) 是一个空间情况的立体图，为使在 H 面上的投影和 V 面上的投影都能在同一个平面（例如纸面）上反映出来，我们采用了旋转投影面的方法将两投影面之一旋转到与另一投影面重合。现规定将 H 投影面绕 OX 轴旋转，H 投影面的前半部分向下旋转到与 V 投影面的下半重合；H 投影面的后半部分同时向上旋转到与 V 投影面的上半重合。H 投影面上的投影则跟着一起旋转。图 2-3(a) 中 A 点的两个投影 a 和 a'，经投影面旋转后就成为图 2-3(b) 所示的图形。这时，空间点 A 的位置，已可由它的两个投影来判断决定。在投影面旋转后画出的图形称为投影图。在投影图中空间的点是不画出来的。由于投影面的旋转已有规定，且各个投影又都有字母符号标明，投影面的范围边框和 H，V 字母均不需表出，投影图只要简单的画成如图 2-3(c) 的式样已可。对于 V 投影面和 H 投影面的交线 ox 轴，一般画成细实线。

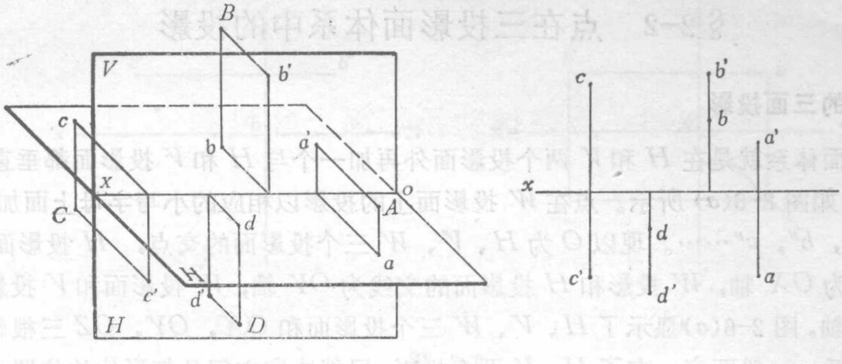
在图 2-3(a) 中，Aa 与 Aa' 两直线构成一个平面。这一平面与 OX 轴线垂直且与 OX 轴线相交于 a_x。当 $a_x a$ 直线旋转到与 V 面重合时 $a_x a$ 仍与 OX 垂直。因此，图 2-3(b) 中 a' 与 a 的连线必与 ox 轴线垂直且相交于 a_x。aa' 连线也称为投影连线，应画成细实线，有时投影连线只画出它的两端部分，以使图面比较清晰。

在图 2-3(a) 中还可看出，$a'a_x$ 等于 Aa，也就是 $a'a_x$ 反映了空间的 A 点到 H 投影面的距离；而 aa_x 则等于 Aa'，反映了 A 点到 V 投影面的距离。因此，有了 A 点的两个投影 a 和 a'，A 点的空间位置就可以完全确定了。

三、点在投影面体系中的各种位置的投影

1．点在四个分角内的投影

图 2-4(a) 中的 A、B、C、D 四个点分别处于第一、二、三、四四个分角内。按照



(a)　　　　　　　　图 2-4　　　　　　　　(b)

前面所介绍过的将 H 投影面旋转到与 V 投影面重合的规定，可以得到 A, B, C, D 四个点的投影图，如图 2-4(b) 所示。从图 2-4(b) 中可看出：

(i) 在第一分角内的点 A，它的 H 投影 a 在 ox 轴的下方，V 投影 a' 在 ox 轴的上方。H 投影和 V 投影分别处于 ox 轴的两侧。

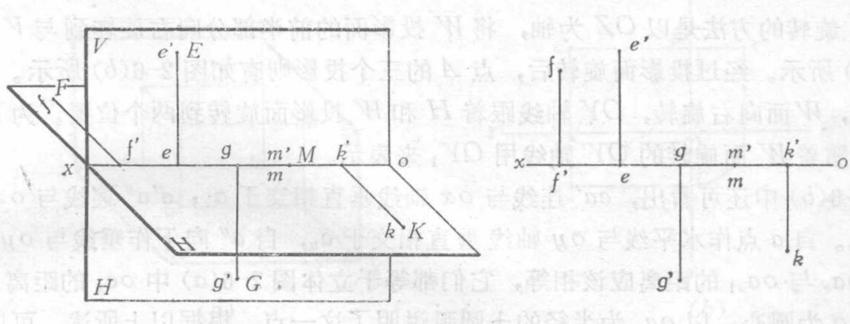
(ii) 在第二分角内的点 B，它的 H 投影 b 和 V 投影 b' 都在 ox 轴的上方；都处于 ox 轴的一侧。

(iii) 在第三分角内的点 C，它的 H 投影 c 在 ox 轴的上方，V 投影 c' 在 ox 轴的下方。H 投影和 V 投影分别处于 ox 轴的两侧，但和第一分角内的点相反。

(iv) 在第四分角内的点 D，H 投影 d 和 V 投影 d' 都在 ox 轴的下方，都处于 ox 轴的一侧，但和第二分角内的点相反。

根据点的投影对 ox 轴的位置，我们可以判断该点处在哪一个分角内。

2. 在投影面上的点的投影



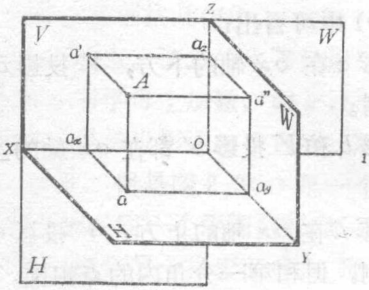
(a)　　　　　　　　图 2-5　　　　　　　　(b)

图 2-5(a) 中的四个点 E、F、G、K 都处在投影面上。E 点和 G 点的 V 投影 e' 和 g' 与空间的点 E 和 G 重合；其 H 投影则在 ox 轴上。F 点和 K 点的 H 投影 f 和 k 与空间点本身重合；其 V 投影则在 ox 轴上。在 ox 轴上的点 M，它的 H 和 V 投影都和空间的点 M 本身重合，m 和 m' 都重合在 ox 轴上。可以看出，投影面上的点必有一个投影是在 ox 轴线上。

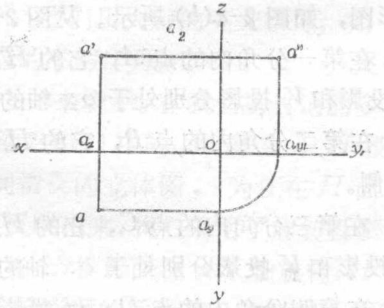
§2-2 点在三投影面体系中的投影

一、点的三面投影

三投影面体系就是在 H 和 V 两个投影面外再加一个与 H 和 V 投影面都垂直的侧立投影面 W，如图 2-6(a) 所示。点在 W 投影面上的投影以相应的小写字母上面加两撇来表示，如 a''，b''，c''……。现以 O 为 H、V、W 三个投影面的交点，H 投影面和 V 投影面的交线为 OX 轴，W 投影和 H 投影面的交线为 OY 轴，W 投影面和 V 投影面的交线则为 OZ 轴。图 2-6(a)显示了 H、V、W 三个投影面和 OX，OY，OZ 三根轴线的相对位置和关系。一般而言，有了 H、V 两个投影，已能决定空间几何形体的位置和形状。但某些特殊情况，为帮助图解或为清晰的表达，作出W投影面的投影则是常用的处理方法。



(a)



(b)

图 2-6

图 2-6(中)，A 为空间一点现处于第一分角内。它的三个投影为 a、a'、a''。要将三个投影面上的投影都绘在一个平面上，除将 H 面绕 OX 轴旋转到与 V 面重合外，还需要将 W 面旋转。旋转的方法是以 OZ 为轴，将 W 投影面的前半部分向右旋转到与 V 面重合，如图 2-6(a) 所示。经过投影面旋转后，点 A 的三个投影则有如图 2-6(b) 所示。由于 H 面向下旋转，W面向右旋转，OY 轴线跟着 H 和 W 投影面旋转到两个位置。为了便于说明，我们把随着 W 面旋转的 OY 轴线用 OY_1 来表示。

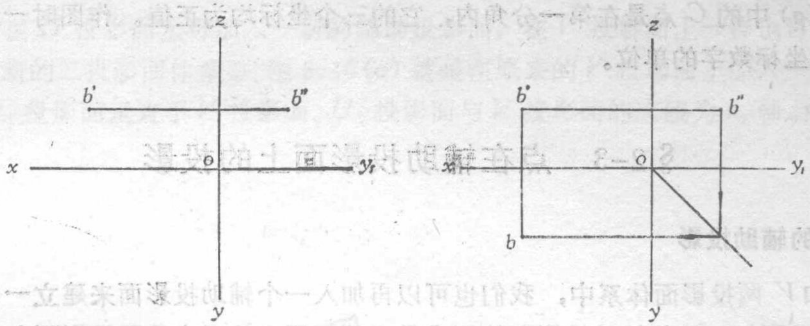
从图 2-6(b) 中还可看出，aa' 连线与 ox 轴线垂直相交于 a_x；$a'a''$ 连线与 oz 轴线垂直相交于 a_z。自 a 点作水平线与 oy 轴线垂直相交于 a_y，自 a'' 向下作垂线与 oy_1 轴线相交于 a_{y1}；oa_y 与 oa_{y1} 的距离应该相等，它们都等于立体图 2-6(a) 中 oa_y 的距离。图 2-6(b) 中，以 o 为圆心，以 oa_y 为半径的 $\frac{1}{4}$ 圆弧说明了这一点。根据以上所述，可以知道在三投影面体系的投影图中，知道了点的两个投影就可以求得该点的第三个投影。这是因为

$a'a_x = a''a_{y1}$　　反映了 A 点与 H 面的距离 Aa

$a\,a_x = a''a_z$　　反映了 A 点与 V 面的距离 Aa'

$a\,a_y = a'a_z$　　反映了 A 点与 W 面的距离 Aa''

例如图 2-7(a) 中，空间一点 B 的两个投影 b' 和 b'' 为已知，要求作出 B 点的 H 投影 b，可作图如下(见图 2-7(b))。



(a) (b)

图 2-7

1. 自 o 点向右下方作 45° 线。

2. 自 b'' 向下作垂线与此 45° 斜线相交

3. 自交点向左作平线与自 a' 向下所作垂线相交，所得交点即 B 点的 H 投影 b。

对于 $ob_y = ob_{y1}$ 这一关系，前面曾介绍过可以用圆弧作图得到。现介绍利用 45° 斜线来作图比较方便。

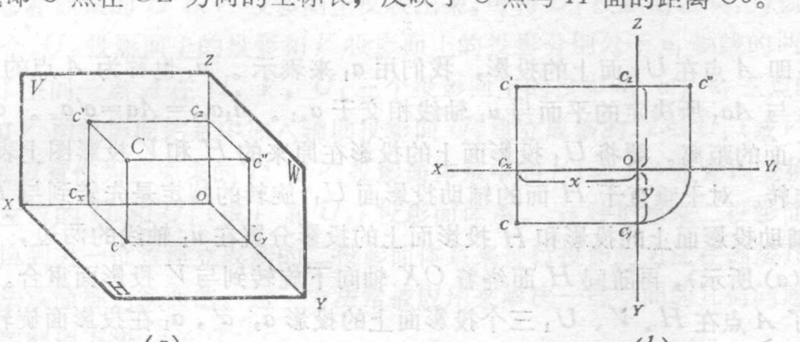
二、点的坐标

H，V，W 三投影面体系中的三根轴 OX，OY，OZ 也可以看成为一个以 O 为原点的空间直角坐标体系。空间的任意点 C 的位置可以用三个轴向的坐标来表示，因为，如图 2-8(a) 所示。

OC_x 也即 C 点在 OX 方向的坐标长，反映了 C 点与 W 面的距离 Cc''。

OC_y 也即 C 点在 OY 方向的坐标长，反映了 C 点与 V 面的距离 Cc'。

OC_z 也即 C 点在 OZ 方向的坐标长，反映了 C 点与 H 面的距离 Cc。



(a) (b)

图 2-8

如 C 点与三个投影面的距离 $Cc''=16$，$Cc'=9$，$Cc=12$，则写成坐标形式为 $C(16, 9, 12)$。坐标值的正负规定为：

o 点向左的 x 值为正，向右为负。

o 点向前的 y 值为正，向后为负。

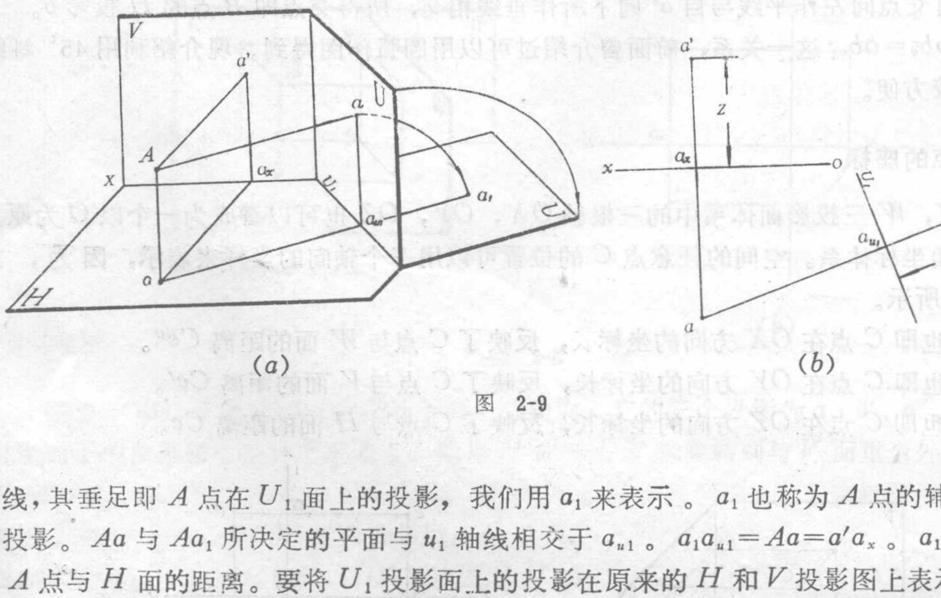
o 点向上的 z 值为正，向下为负。

由于图 2-8(a) 中的 C 点是在第一分角内，它的三个坐标均为正值。作图时一般都采用毫米 mm 作为坐标数字的单位。

§2-3　点在辅助投影面上的投影

一、点的辅助投影

在 H 和 V 两投影面体系中，我们也可以再加入一个辅助投影面来建立一个新的投影面体系。对于所加入的新辅助投影面的要求是必须与原来体系中的两投影面之一垂直。如图 2-9(a) 所示，我们在原来的 H 和 V 投影面体系中加入一个与 H 投影面相垂直的辅助投影面 U_1。U_1 投影面和 H 投影面的交线为 u_1 轴。自空间的点 A 作垂直于 U_1 投影面的投

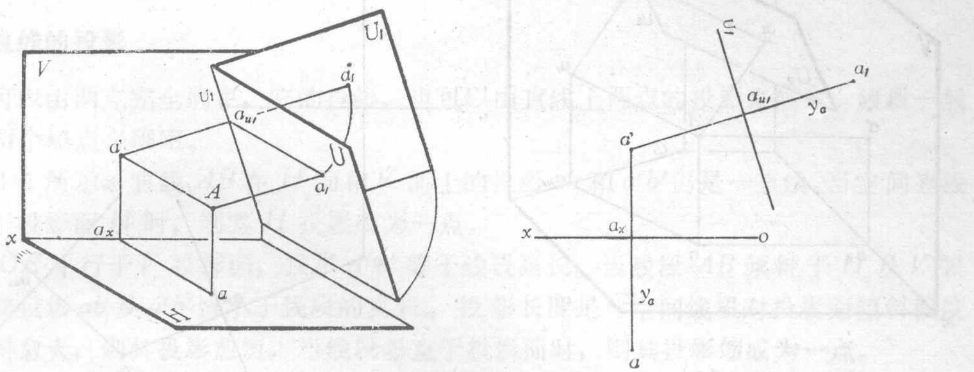


(a)　　　　(b)

图　2-9

射线，其垂足即 A 点在 U_1 面上的投影，我们用 a_1 来表示 。 a_1 也称为 A 点的辅助投影或辅投影。Aa 与 Aa_1 所决定的平面与 u_1 轴线相交于 a_{u1} 。 $a_1a_{u1}=Aa=a'a_x$ 。 a_1a_{u1} 也反映了 A 点与 H 面的距离。要将 U_1 投影面上的投影在原来的 H 和 V 投影图上表示出来，必须将 U_1 面旋转。对于垂直于 H 面的辅助投影面 U_1，旋转的规定是先转到与 H 面重合，(一般是将辅助投影面上的投影和 H 投影面上的投影分置在 u_1 轴线的两边，使作图清晰，如图 2-9(a) 所示)，再随同 H 面绕着 OX 轴向下旋转到与 V 投影面重合。图 2-9 (b) 投影图显示了 A 点在 H、V、U_1 三个投影面上的投影 a, a', a_1 在投影面旋转后的位置。图中 a 及 a' 两点为已知， u_1 轴的位置选定后由 a 点向 u_1 轴线作垂线相交于 a_{u1} 。 延长 aa_{u1} 到 a_1， 令 $a_1a_{u1}=a'a_x$。这样就作出了 A 点的辅助投影 a_1。 加入辅助投影面来得到新投影的目的， 是为了方便解决一些空间的几何问题。辅助投影面 U_1 应该在什么位置是由解题的需要来决定。U_1 辅助投影面的位置在投影图中是由 u_1 轴线来反映的 。 aa_{u1} 的距离并不要求等于 aa_x。U_1 投影面的位置选定后， U_1 投影面就代替了原来的 V 投影面而与 H 投影面建成了新的 H 和 U_1 二投影面体系。原来二投影面体系中的一些规律，在新的二投影面体系中仍完全可以应用。

不单是在 H 投影面上可加入一新的辅助投影面，在 V 投影面上一样也可以加入辅助投影面成立新的二投影面体系。图 2-10 (a) 就是在原来的 V 投影面上加入一新的辅助投影面 U_1，U_1 投影面垂直于 V 投影面。U_1 投影面与 V 投影面的交线为 u_1 轴。由 A 作垂直



(a) (b)

图 2-10

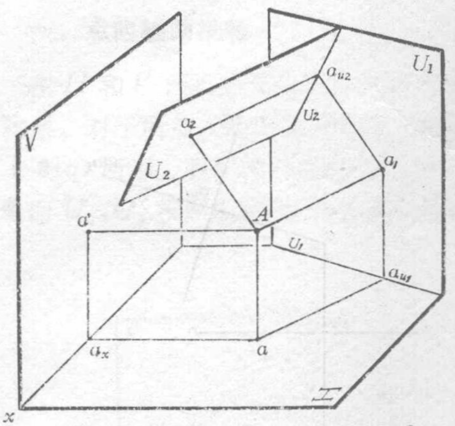
于 u_1 投影面的投射线，垂足就是 A 点在 u_1 投影面上的投影。Aa' 和 Aa_1 所决定的平面与 u_1 轴线相交于 a_{u1}。$a_1a_{u1}=Aa'=aa_x$。a_1a_{u1} 也反映了 A 点与 V 投影面的距离。要将 U_1 投影面上的投影在原来的 H 和 V 投影图上反映出来，可将 U_1 投影面以 u_1，为轴线旋转至与 V 投影面重合。U_1 投影面上的投影和 V 投影面上的投影分别处于 u_1 轴线的两边。图 2-10 (b) 就显示了空间一点 A 在 H，V，U_1 三个投影面上的投影 a，a'，a_1 三点的位置。

在 H 和 V 两投影面体系中加入辅助投影面 U_1 建立成新的 H 和 U_1（或 V 和 U_1）投影面体系，也可以看作为把原来的 H 和 V 投影面体系中的 V（或 H）投影面变换到 U_1 投影面的位置建立成的 H 和 U_1（或 V 和 U_1）投影面体系。这种把原来二投影面体系中的一个投影面变换到另一位置建立成新的二投影面体系来进行投影的方法在画法几何中也称为变换投影面法或简称为换面法。这一方法常被应用来解决一些空间的几何问题，是一种经常用到的重要解题方法。

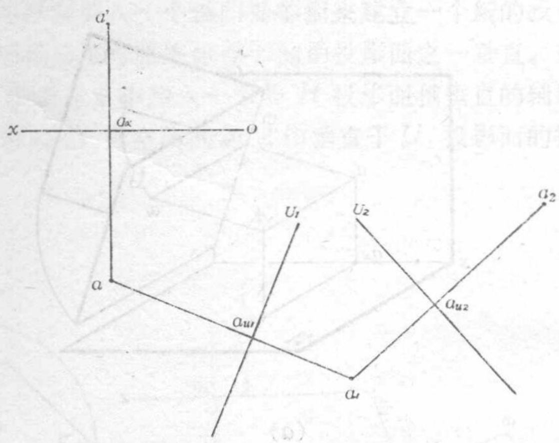
二、点的二次辅助投影

辅助投影面的设立，可以根据需要连续多次进行。如在原来的 H 和 V 投影面体系中，设立一垂直于 H 投影面的 U_1 投影面，如图 2-11 (a) 中所示，建成了新的 H 和 U_1 两投影面体系之后。还可以继续设立一个垂直于 U_1 投影面的辅助投影面 U_2，建立成 U_1 和 U_2 两投影面体系。U_2 投影面和 U_1 投影面的交线为 u_2。点 A, B, C……在 U_2 投影面上的投影用 a_2, b_2, c_2……来表示。我们对第一次加入的辅助投影面称为 U_1 第二次加入的辅助投

影面称为 U_2，以此类推。a_1，a_2，a_3……分别称为 A 点的一次、二次、三次…辅助投影。在二次辅助投影面建立后的 U_2 与 U_1 投影面体系中，投影图中的 a_1a_2 连线和 u_2 轴线仍保持垂直。a_1a_2 和 u_2 轴成的交线为 a_{u2}。$a_2a_{u_2}$ 和 aa_{u_1} 则仍应保持相等。如果解题需要的话还可以第三次、第四次……进行辅助投影。



(a)



(b)

图 2-11

第三章　直　线

§ 3-1　直线的投影

一、直线的投影

直线可以由两点完全确定，它的投影，也可以由直线上两点的投影来确定。线段一般都由它的两个端点来确定。

如图 3-1 所示，直线 AB 在 H 面和 V 面上的投影 ab 和 $a'b'$ 仍是一直线。当空间直线 DE 垂直于投影面 H 时，则其 H 投影成为一点。

线段 DE 平行于 V 投影面，投影 $d'e'$ 等于线段真长。当线段 AB 倾斜于 H 及 V 投影面时，其投影 ab 及 $a'b'$ 皆小于线段的真长。投影长度是与空间线段对投影面倾斜程度有关，倾斜愈大，则其投影愈短，当线段垂直于投影面时，则其投影缩成为一点。

图 3-2 示出了直线 AB 的三投影。当线段延长时，其投影也相应地作同方向的延长。

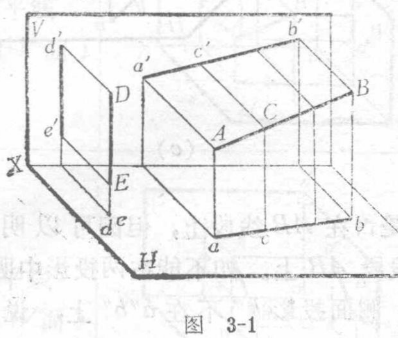


图　3-1

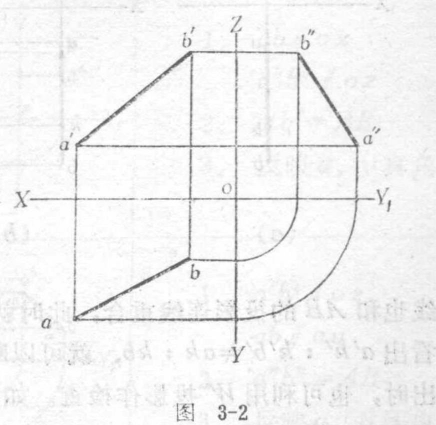


图　3-2

二、直线上的点

1. 如图 3-1 所示，点在直线上，则点的各个投影必定在直线的同面投影上。反之，若某一点的各个投影都在直线的同面投影上，则此空间点一定在直线上。例如图 3-3 中的 C 点，它的各个投影都在直线 AB 的同面投影上，因此可以确定 C 点是在直线 AB 上。而 D 点则虽然 d 在 ab 上，但因 d' 不在 $a'b'$ 上，所以空间 D 点并不在直线 AB 上。

图 3-4 表示了在已知线段 AB 及线段 AB 上 K 点的水平投影 k 时，如何求出投影 k' 和 k'' 的作图情形。

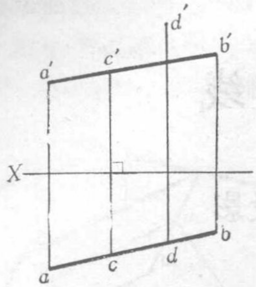


图 3-3

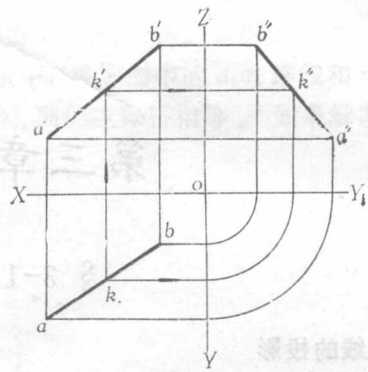
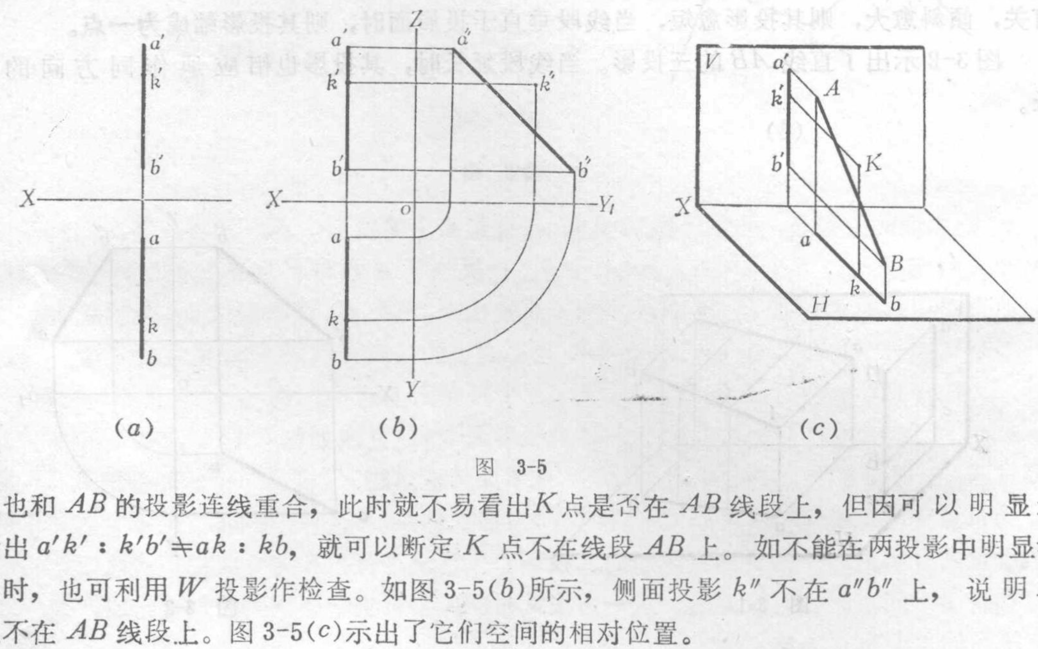


图 3-4

2. 如果线段上的一点将线段分成某一比例的长度时，则该点的各投影也一定将该线段的各同面投影分成同一比例。

如图 3-1 所示，C 点把 AB 分成 AC 和 CB 两线段，则 $AC:CB=ac:cb=a'c':c'b'$。

图 3-5 的 AB 线平行于 W 投影面，H、V 两投影都垂直于 ox 轴，K 点的投影连



(a)　　(b)　　(c)

图 3-5

线也和 AB 的投影连线重合，此时就不易看出K点是否在 AB 线段上，但因可以明显地看出 $a'k':k'b' \neq ak:kb$，就可以断定 K 点不在线段 AB 上。如不能在两投影中明显看出时，也可利用 W 投影作检查。如图 3-5(b)所示，侧面投影 k'' 不在 $a''b''$ 上，说明 K 点不在 AB 线段上。图 3-5(c)示出了它们空间的相对位置。

§ 3-2　各种位置直线的投影特性

直线的各种位置是相对于投影面而言的。它可以是和投影面平行、垂直或倾斜。

平行于某一个投影面的直线统称为“投影面平行线；

垂直于某一个投影面的直线统称为“投影面垂直线”；

和三个投影面都倾斜的直线称为“一般位置直线”。

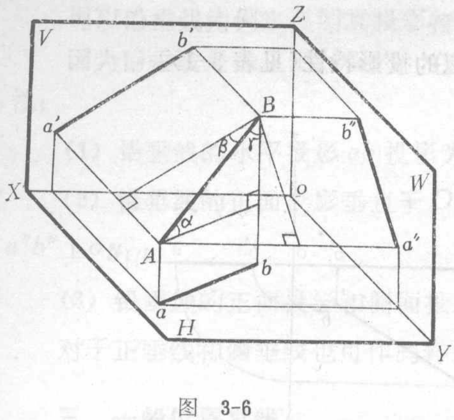


图 3-6

前两种直线因对投影面处于平行或垂直的特殊位置，所以又统称为特殊位置直线。

直线对 H、V、W 三个投影面的倾角分别用 α、β、γ 来表示，（见图 3-6）。它们也是直线本身和它在各投影面上的投影之间的夹角，如 α 是 AB 与水平投影 ab 之间的夹角。

现将各种位置直线的投影特性分述于下：

一、投影面平行线：

平行于 H 面的称为水平线；平行于 V 面的称为正平线；平行于 W 面的称为侧平线。

投影面平行线（表 3-1）

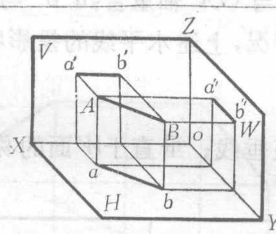
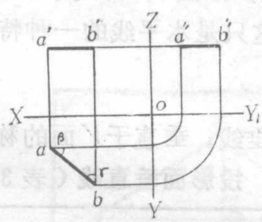
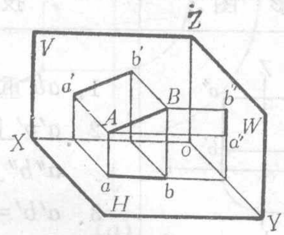
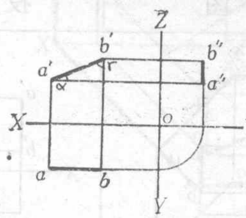
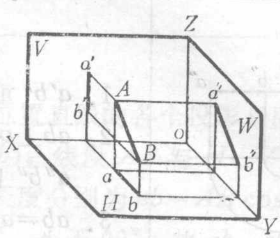
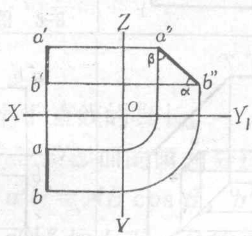
直线的名称	轴测图	投影图	投影特性
水平线（∥于H面）			1. $a'b' \parallel ox$ $a''b'' \parallel oy_1$ 2. $ab = AB$ 3. 反映 β、γ 真角
正平线（∥于V面）			1. $ab \parallel ox$ $a''b'' \parallel oz$ 2. $a'b' = AB$ 3. 反映 α、γ 真角
侧平线（∥于W面）			1. $a'b' \parallel oz$ $ab \parallel oy$ 2. $a''b'' = AB$ 3. 反映 α、β 真角

表 3-1 列出了这三种投影面平行线的投影特性。

现以水平线为例来加以说明(参阅表 3-1)。

因为水平线平行于 H 面,故线上任何点与 H 面的距离都相同,因此它有如下的投影特性。

(1) 水平线的正面投影平行于 OX 轴，侧面投影平行于展开后的 oY 轴。即 $a'b' \parallel ox$，$a''b'' \parallel oy_1$；

(2) 水平线的水平投影反映线段真长，即 $ab = AB$；