

高等代数学习题解答

阜阳师范学院教

05-24/11

# 目 录

|           |       |     |
|-----------|-------|-----|
| 第一章 基本概念  | ..... |     |
| 习题 1.1    | ..... |     |
| 习题 1.2    | ..... | (   |
| 习题 1.3    | ..... | (   |
| 习题 1.4    | ..... | ( 1 |
| 习题 1.5    | ..... | (   |
| 习题 1.6    | ..... | (   |
| 第二章 一元多项式 | ..... | (   |
| 习题 2.1    | ..... | (   |
| 习题 2.2    | ..... |     |
| 习题 2.3    | ..... |     |
| 习题 2.4    | ..... |     |
| 习题 2.5    | ..... |     |
| 习题 2.6    | ..... |     |
| 习题 2.7    | ..... |     |
| 习题 2.8    | ..... |     |
| 第三章 行列式   | ..... |     |
| 习题 3.2    | ..... |     |
| 习题 3.3    | ..... |     |
| 习题 3.4    | ..... |     |
| 习题 3.5    | ..... |     |
| 第四章 线性方程组 | ..... |     |
| 习题 4.1    | ..... |     |
| 习题 4.2    | ..... |     |

|                     |         |
|---------------------|---------|
| . 3 .....           | ( 82 )  |
| <b>矩阵</b> .....     | ( 89 )  |
| 5. 1 .....          | ( 89 )  |
| . 2 .....           | ( 96 )  |
| 5. 3 .....          | ( 103 ) |
| <b>章 向量空间</b> ..... | ( 109 ) |
| 习题 6. 1 .....       | ( 109 ) |
| 习题 6. 2 .....       | ( 113 ) |
| 习题 6. 3 .....       | ( 118 ) |
| 习题 6. 4 .....       | ( 125 ) |
| 习题 6. 5 .....       | ( 134 ) |
| 习题 6. 6 .....       | ( 141 ) |
| 习题 6. 7 .....       | ( 142 ) |
| <b>章 线性变换</b> ..... | ( 149 ) |
| 习题 7. 1 .....       | ( 149 ) |
| 7. 2 .....          | ( 156 ) |
| 7. 3 .....          | ( 160 ) |
| 7. 4 .....          | ( 164 ) |
| 7. 5 .....          | ( 170 ) |
| . 6 .....           | ( 186 ) |
| <b>欧氏空间</b> .....   | ( 199 ) |
| .....               | ( 199 ) |
| .....               | ( 205 ) |
| .....               | ( 217 ) |
| .....               | ( 228 ) |
| .....               | ( 228 ) |
| .....               | ( 238 ) |
| .....               | ( 247 ) |
| .....               | ( 256 ) |

(iii) 若

$$\begin{aligned}
 x \in A \cup (B \cap C) &\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x \in A \\ \text{或 } x \in B \cap C \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x \in B \\ x \in C \end{array} \right\} \end{array} \right\} \\
 &\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x \in A \cup B \\ x \in A \cup C \end{array} \right\}
 \end{aligned}$$

$$\text{即 } A \cup (B \cap C) \subseteq (A \cup B) \cap (A \cup C), \quad (1)$$

反之 若

$$x \in (A \cup B) \cap (A \cup C) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x \in A \cup B \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x \in A \\ \text{或 } x \in B \end{array} \right\} \\ x \in A \cup C \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x \in A \\ \text{或 } x \in C \end{array} \right\} \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow x \in A \cup (B \cap C)$$

$$(A \cap B) \cup (A \cup C) \subseteq A \cap (B \cup C) \quad (2)$$

综合(1), (2)得  $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ 。

6、设  $A$  是含有  $n$  个元素的集合。 $A$  中含有  $k$  个元素的子集共有多少个?

$$\text{〔解〕 共有 } \binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} \text{ 个}$$

## 习 题 1.2

1、设  $A$  是前100个自然数所成的集合。找一个  $A$  到自身的映射，但不是满射。

〔解〕 设  $A = \{1, 2, 3, \dots, 100\}$

定义  $f$  如下： $1 \rightarrow 2$   $n \rightarrow n$   $n = 2, 3, \dots, 100$  则  $f$  即为所求。显然  $f(A) \neq A$ ，故  $f$  不是满射。

2、找一个全体实数集到全体正实数集上的1—1映射。

〔解〕 设全体实数集为  $R$ ，全体正实数集为  $R^+$

令  $f: x \mapsto e^x$  (对任意  $x \in R$ ) 则  $f$  即为所求。

〔证〕：(1) 因为对  $\forall x \in R$  都有  $f(x) = e^x > 0$ ，所以  $f$  是  $R$  到  $R^+$  上的一个映射。

(2) 对  $\forall y \in R^+$  取  $x = \ln y$  因为  $y > 0$ ，所以  $x \in R$ ，且  $f(x) = e^x = e^{\ln y} = y$ 。由此说明  $f$  是满射。

(3) 再设  $\forall x_1, x_2 \in R$  且  $x_1 \neq x_2$  则  $e^{x_1} \neq e^{x_2}$  即  $f(x_1) \neq f(x_2)$ ，所以  $f$  是单射，故  $f$  是  $R$  到  $R^+$  的一个1—1映射。

$$3、f: x \mapsto \frac{1}{x}$$

是不是全体实数集到自身的映射。

〔解〕  $f$  不是全体实数集到自身的映射。因为当  $x = 0$  时 ( $0 \in R$ )。0在  $f$  下没有像。

4、设  $f$  定义如下：

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{若 } x < 0; \\ 1, & \text{若 } 0 \leq x < 1; \\ 2x-1 & \text{若 } x \geq 1. \end{cases}$$

$f$ 是不是 $R$ 到 $R$ 的映射？是不是单射？是不是满射？

〔解〕  $f$ 是 $R$ 到 $R$ 的映射，因为按照 $f$ 的定义，对 $\forall x \in R$ ，有唯一确定的 $f(x)$ 与之对应，且 $f(x) \in R$ ，因此 $f$ 是 $R$ 到 $R$ 的映射。

但 $f$ 不是单射。因为当 $0 \leq x \leq 1$ 时，恒有 $f(x) = 1$ 。

$f$ 也不是满射。因当 $0 \leq y < 1$ 时，不存在 $x \in R$  使

$$f(x) = y。$$

5 令 $A = \{1, 2, 3\}$  写出 $A$ 到自身的一切映射。在这些映射中哪些是 $| \text{——} |$ 映射？

〔解〕  $A$ 到自身的映射共有廿七个，它们分别是：

$$\begin{array}{ll} f_1: 1 \mapsto 1 & 2 \mapsto 1 & 3 \mapsto 1 & f_2: 1 \mapsto 1 & 2 \mapsto 1 & 3 \mapsto 2 \\ f_3: 1 \mapsto 1 & 2 \mapsto 1 & 3 \mapsto 3 & f_4: 1 \mapsto 1 & 2 \mapsto 2 & 3 \mapsto 1 \\ f_5: 1 \mapsto 1 & 2 \mapsto 2 & 3 \mapsto 2 & f_6: 1 \mapsto 1 & 2 \mapsto 2 & 3 \mapsto 3 \\ f_7: 1 \mapsto 1 & 2 \mapsto 3 & 3 \mapsto 1 & f_8: 1 \mapsto 1 & 2 \mapsto 3 & 3 \mapsto 2 \\ f_9: 1 \mapsto 1 & 2 \mapsto 3 & 3 \mapsto 3 & f_{10}: 1 \mapsto 2 & 2 \mapsto 1 & 3 \mapsto 1 \\ f_{11}: 1 \mapsto 2 & 2 \mapsto 1 & 3 \mapsto 2 & f_{12}: 1 \mapsto 2 & 2 \mapsto 1 & 3 \mapsto 3 \\ f_{13}: 1 \mapsto 2 & 2 \mapsto 2 & 3 \mapsto 1 & f_{14}: 1 \mapsto 2 & 2 \mapsto 2 & 3 \mapsto 2 \\ f_{15}: 1 \mapsto 2 & 2 \mapsto 2 & 3 \mapsto 3 & f_{16}: 1 \mapsto 2 & 2 \mapsto 3 & 3 \mapsto 1 \\ f_{17}: 1 \mapsto 2 & 2 \mapsto 3 & 3 \mapsto 2 & f_{18}: 1 \mapsto 2 & 2 \mapsto 3 & 3 \mapsto 3 \\ f_{19}: 1 \mapsto 3 & 2 \mapsto 1 & 3 \mapsto 1 & f_{20}: 1 \mapsto 3 & 2 \mapsto 1 & 3 \mapsto 2 \\ f_{21}: 1 \mapsto 3 & 2 \mapsto 1 & 3 \mapsto 3 & f_{22}: 1 \mapsto 3 & 2 \mapsto 2 & 3 \mapsto 1 \\ f_{23}: 1 \mapsto 3 & 2 \mapsto 2 & 3 \mapsto 2 & f_{24}: 1 \mapsto 3 & 2 \mapsto 2 & 3 \mapsto 3 \\ f_{25}: 1 \mapsto 3 & 2 \mapsto 3 & 3 \mapsto 1 & f_{26}: 1 \mapsto 3 & 2 \mapsto 3 & 3 \mapsto 2 \\ f_{27}: 1 \mapsto 3 & 2 \mapsto 3 & 3 \mapsto 3 \end{array}$$

其中：有 $f_6, f_8, f_{12}, f_{16}, f_{20}, f_{22}$ 是 $| \text{——} |$ 映射。

6、设  $a, b$  是任意两个实数且  $a < b$ 。试找出一个  $[0, 1]$  到  $[a, b]$  上的  $| \text{——} |$  映射。

〔解〕集合  $[0, 1]$  和  $[a, b]$  可分别记为  
 $A = \{x \mid 0 \leq x \leq 1\}$ ,  $B = \{y \in \mathbb{R} \mid a \leq y \leq b\}$

定义  $f: A \rightarrow B \quad x \mapsto (b-a)x + a$

则  $f$  是  $A$  到  $B$  的一个映射。下面将证明  $f$  是  $A \rightarrow B$  的  $| \text{——} |$  映射。

设  $A y \in B$ , 取  $x = \frac{y-a}{b-a}$ ,  $\because a \leq y \leq b, \therefore 0 \leq \frac{y-a}{b-a} \leq 1$

即  $0 \leq x \leq 1 \quad \therefore x \in A$ , 且有

$$f(x) = (b-a)x + a = (b-a) \frac{y-a}{b-a} + a = y \quad (b-a > 0)$$

所以  $f$  是满射。

设  $A x_1, x_2 \in A$ , 且  $x_1 \neq x_2$ , 则

$(b-a)x_1 + a \neq (b-a)x_2 + a$  即  $f(x_1) \neq f(x_2)$  因此  $f$  是单射。

综上所述知  $f$  是  $| \text{——} |$  映射。

7、举例说明, 对于一个集合  $A$  到自身的两个映射  $f$  和  $g$  来说,  $f \circ g$  与  $g \circ f$  一般不相等。

〔解〕例如设  $A = \mathbb{R}$  令  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto x^2, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto \sin x$  则:  $f \circ g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto \sin^2 x, g \circ f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto \sin x^2$  但  $\sin^2 x^2 \neq \sin x^2$  所以  $f \circ g \neq g \circ f$ ,

8、设  $A$  是全体正实数所成的集合, 令

$$f: x \mapsto x \quad g: x \mapsto \frac{1}{x} \quad x \in A$$

(1)  $g$  是不是  $A$  到  $A$  上的  $| \text{——} |$  映射? (2)  $g$  是不是  $f$  的逆映射? (3) 如果  $g$  有逆映射? 那么  $g$  的逆映射是什么?

〔解〕 (i)  $g$  是  $A$  到  $A$  上的  $| \text{---} |$  映射。因为对  $\forall x \in A$ , 有  $\frac{1}{x} \in A$  且  $g\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x} = x$ , 说明  $g$  是满射。又对  $\forall x_1, x_2$

$\in A$ , 且  $x_1 \neq x_2$  则  $\frac{1}{x_1} \neq \frac{1}{x_2}$ , 即有  $g(x_1) \neq g(x_2)$ , 说明  $g$  是单射。故  $g$  是  $A$  到  $A$  上的  $| \text{---} |$  映射。

(2)  $g$  不是  $f$  的逆映射。因为对  $\forall x \in A$ ,  $x \neq 1$  时

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x) = \frac{1}{x} \neq x, \text{ 即 } g \circ f \neq j_A$$

(3) 因为对  $\forall x \in A$ , 有:

$$(g \circ g)(x) = g(g(x)) = g\left(\frac{1}{x}\right) = x$$

$$(g \circ g)\left(\frac{1}{x}\right) = g\left(g\left(\frac{1}{x}\right)\right) = g(x) = \frac{1}{x},$$

故  $g$  有逆映射, 且逆映射与其本身相同。

9、设  $f: A \rightarrow B$ ,  $g: B \rightarrow C$  是映射, 又令  $h = g \circ f$ , 证明:

(i) 如果  $h$  是单射, 那么  $f$  也是单射;

(ii) 如果  $h$  是满射, 那么  $g$  也是满射;

(iii) 如果  $f, g$  都是  $| \text{---} |$  映射, 那么  $h$  也是  $| \text{---} |$

映射, 并且

$$h^{-1} = (g \circ f)^{-1} = f^{-1} \cdot g^{-1}.$$

〔证〕: (i)  $\because f: A \rightarrow B, g: B \rightarrow C, h = g \circ f$

$\therefore h: A \rightarrow C$ , 对  $\forall x_1, x_2 \in A$ , 如  $x_1 \neq x_2$ , 则由  $h$  是单射

可知  $h(x_1) \neq h(x_2)$  即:  $g(f(x_1)) \neq g(f(x_2))$

所以  $f(x_1) \neq f(x_2)$  ( $f(x_1), f(x_2) \in B$ ), 故  $f$  是单射。

(ii) 因为  $l$  是满射, 所以对  $\forall z \in C$ , 有唯一确定的  $x \in A$  与之对应, 使得  $h(x) = z$ , 而  $h(x) = g(f(x))$ , 所以对于  $x \in A$ , 存在  $y \in B$ , 使  $f(x) = y$  于是  $g(y) = g(f(x)) = h(x) = z$  故  $g$  是满射。

(iii) 因为  $f: A \rightarrow B$ ,  $g: B \rightarrow C$ ,  $h = g \circ f$ , 所以  $h: A \rightarrow C$ 。如果  $f, g$  都是  $| \text{——} |$  映射, 则  $f(A) = B, g(B) = C$ , 因此  $h(A) = g(f(A)) = g(B) = C$ 。故  $h$  是满射。

又因为对  $\forall x_1, x_2 \in A$  若  $x_1 \neq x_2$  则  $f(x_1) \neq f(x_2)$ 。

$g(f(x_1)) \neq g(f(x_2))$  即  $h(x_1) \neq h(x_2)$ , 因而  $h$  又是一个单射。所以  $h$  是一个  $| \text{——} |$  映射。

因为  $f, g, h$  都是  $| \text{——} |$  映射, 并且对任意  $z \in C$  设  $y \in B$ , 使  $g(y) = z$ ,  $x \in A$  使  $f(x) = y$ , 于是  $h(x) = z$  并有

$$(g \circ f)^{-1}(z) = h^{-1}(z) = x = f^{-1}(y) = f^{-1}(g^{-1}(z)) = f^{-1} \circ g^{-1}(z)$$

$$\therefore h^{-1} = (g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$$

### 习 题 1.3

1 证明  $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$ 。

[证] : 1° 当  $n=1$  时,  $1^2 = \frac{1}{6} \times 1 \times 2 \times 3$  所以命题成立,

2° 假设当  $n=k$  时命题也成立, 即

$$1^2 + 2^2 + \dots + k^2 = \frac{1}{6}k(k+1)(2k+1)$$

现在要证当  $n=k+1$  时, 命题成立。即

$$\begin{aligned}
 1^1 + 2^2 + \cdots k^2 + (k+1)^2 &= \frac{1}{6} k(k+1)(2k+1) + (k+1)^2 \\
 &= \frac{1}{6} (k+1) [(k+1)+1] [2(k+1)+1]
 \end{aligned}$$

故由第一归纳法原理知命题对一切自然 $n$ 都成立。

2、证明  $1+3+6+\cdots \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$

〔证〕  $1^\circ$  当 $n=1$ 时，命题显然成立

$2^\circ$  假设当 $n=k$ 时 命题也成立。即

$$1+3+6+\cdots + \frac{k(k+1)}{2} = \frac{k(k+1)(k+2)}{6}$$

现在要证当 $n=k+1$ 时 命题也成立。即

$$\begin{aligned}
 1+3+6+\cdots + \frac{k(k+1)}{2} + \frac{(k+1)(k+2)}{2} \\
 &= \frac{1}{6} k(k+1)(k+2) + \frac{1}{2} (k+1)(k+2) \\
 &= \frac{1}{6} (k+1) [(k+1)+1] [(k+1)+2]
 \end{aligned}$$

所以对一切自然数 $n$  命题皆成立。

3、设 $h$ 是一个正数，证明  $(1+h)^n \geq 1+nh$

〔证〕  $1^\circ$  当 $h=2$ 时  $(1+h)^2 = 1+2h+h^2 \geq 1+2h$

所以命题对 $h=2$ 时成立。

$2^\circ$  假设当 $n=k$  ( $k \geq 2$ ) 时命题成立。即

$$(1+k)^k \geq 1+kh$$

要证当 $h=k+1$ 时 命题也成立。即

$$(1+h)^{k+1} = (1+h)^k (1+h) \geq (1+kh)(1+h) \\ \geq 1 + (k+1)h$$

故对一切自然数 $n$ 命题均成立。

$$4、证明 1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \cdots + n \cdot n! \\ = (n+1)! - 1$$

〔证〕  $1^\circ$  当 $n=1$ 时，命题显然成立。

$2^\circ$  假设当 $n=k$ 时，命题成立。即

$$1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \cdots + k \cdot k! = (k+1)! - 1 \\ \text{在这个等式的两边同时加上 } (k+1)(k+1)! \text{ 于是得} \\ 1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \cdots + k \cdot k! + (k+1)(k+1)! - 1 \\ = (k+1)(k+1)! + (k+1)! - 1 \\ = (k+1)! (k+2) - 1 = [(k+1)+1]! - 1$$

故原命题对一切自然数 $n$ 皆成立。

5、证明第二数学归纳法原理。

〔证〕：假定命题不是对一切自然数 $n$ 都成立。令 $N$ 表示使命题不成立的自然数所组成的集合，则 $N \neq \emptyset$ 。于是由最小数原理知 $N$ 中必有最小数存在设为 $h$ ，且 $h \neq 1$ ，否则与 $1^\circ$ 矛盾。因而 $h-1$ 是一个自然数。因为 $h$ 是 $N$ 中最小数，所以 $h-1 \notin N$ 这就是命题对于一切小于 $h$ 自然数来说都成立。再由 (ii) 可推出命题对于 $h$ 来说也成立，此与 $h$ 使命题不成立矛盾，故命题对一切自然 $h$ 来说都成立。

6、证明二项式定理：

$$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1}b + \cdots + \binom{n}{r} a^{n-r}b^r + \cdots + b^n$$

$$\text{这里 } \binom{n}{r} = \frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{1 \cdot 2 \cdots r}$$

是 $n$ 个元素中取 $r$ 个元素的组合数。

〔证〕：对 $n$ 用数学归纳法来证明二项式定理。

1° 当 $n=1$ 时、左端=右端= $a+b$ 二项式定理成立。

2° 假设当 $n=k$ 时二项式定理成立。即

$$(a+b)^k = a^k + \binom{k}{1} a^{k-1} b + \dots + \binom{k}{r} a^{k-r} b^r + \dots + b^k$$

$$\begin{aligned} \text{则 } (a+b)^{k+1} &= (a+b)(a+b)^k = a(a+b)^k + b(a+b)^k \\ &= [a^{k+1} + \binom{k}{1} a^k b + \dots + \binom{k}{r} a^{k-r} b^{r+1} + \dots + a b^k] \\ &\quad + [a^k b + \binom{k}{1} a^{k-1} b^2 + \dots + \binom{k}{r} a^{k-r} b^{r+1} + \dots + b^{k+1}] \\ &= a^{k+1} + [\binom{k}{1} + 1] a^k b + \dots + [\binom{k}{r} + \binom{k}{r-1}] a^{k-r+1} b^r \\ &\quad + \dots + [1 + \binom{k}{k-1}] a b^k + b^{k+1} = a^{k+1} + \binom{k+1}{1} a^k b \\ &\quad + \dots + \binom{k+1}{r} a^{k-r+1} b^r + \dots + \binom{k+1}{k} a b^k + b^{k+1} \end{aligned}$$

故对任何自然 $n$ 皆有

$$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \dots + \binom{n}{r} a^{n-r} b^r + \dots + b^n \text{ 成立。}$$

7、证明：含有 $n$ 个元素的集合的一切子集的个数等于 $2^n$ 。

〔证〕对 $n$ 用数学归纳法来证明此命题。

当 $n=1$ 时 设 $A = \{a_1\}$ ，则 $\{a_1\}$ 和 $\phi$ 是 $A$ 的子集，此命题为真？

设 $n > 1$  且对一切含 $n-1$ 个元素的集合来说命题成立。则含 $n$ 个元素的集合

$A = \{a_1 \cdots a_{n-1} a_n\}$  来说, 由于  $\{a_1 \cdots a_{n-1}\}$  共有  $2^{n-1}$  个子集, 这些子集均是  $A$  的子集, 且它们都不含元素  $a_n$ , 因此在上述每一个子集中都添上  $a_n$  就又到  $A$  的  $2^{n-1}$  个子集, 此时  $A$  的子集个数为  $2^{n-1} + 2^{n-1} = 2$ ,  $2^{1-1} = 2^1$ , 故命题得证。

〔另证〕由 1.1 习题 6 的结果知: 含  $n$  个元素的集合中含有  $k$  个元素的子集共有  $\binom{n}{k}$  个 ( $0 \leq k \leq n$ ) 因此含  $n$  个元素的集合的一切子集的个数为  $C_0^n + C_1^n + \cdots + C_n^n$

再由本节习题已证明的二项式定理中令  $a=b=1$  得

$$C_0^n + C_1^n + \cdots + C_n^n = 2^n$$

## 习 题 1.4

1、计算:

$$1、(2\sqrt{5} - \sqrt{3}i)(-\sqrt{3} + 4\sqrt{5}i)$$

$$(2) \frac{(2+3i)(5-7i)}{(3-2i)(-4+i)}$$

$$(3) (\sqrt{3} + \sqrt{5}i)^2$$

$$(4) (a+bi)^3 - (a-bi)^3$$

$$〔解〕 = 2\sqrt{15} + 43i$$

$$(2) \quad \text{原式} = \frac{31+i}{-10+11i} = -\frac{23}{17} - \frac{27}{17}i$$

$$(3) (\sqrt{3} + \sqrt{5}i)^2 = -2 + 2\sqrt{15}i$$

$$(4) (a+bi)^3 - (a-bi)^3 = 2(3a^2 - b^2)bi$$

2、设  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  是 4 个复数, 其中  $\beta \neq 0, \delta \neq 0$

证明:

$$\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\alpha \delta + \beta \gamma}{\beta \delta}, \quad \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\alpha \gamma}{\beta \delta}.$$

[证]：依题意设： $\alpha = (a, b)$ 、 $\beta = (c, d)$ ，  
 $\delta = (e, f)$ ， $\delta = (g, h)$ ，用  $\beta$  ( $\beta \neq 0$ ) 除  $\alpha$ 、 $\delta$  ( $\delta \neq 0$ ) 除  $\gamma$  的商分别是：

$$\frac{\alpha}{\beta} = \left( \frac{ac+bd}{c^2+d^2}, \frac{bc-ad}{c^2+d^2} \right), \quad \frac{\gamma}{\delta} = \left( \frac{eg+fh}{g^2+h^2}, \frac{fg-eh}{g^2+h^2} \right)$$

根据复数的加法有：

$$\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\gamma}{\delta} = \left( \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{eg+fh}{g^2+h^2}, \frac{bc-ad}{c^2+d^2} + \frac{fg-eh}{g^2+h^2} \right) \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \text{而} \quad \frac{\alpha \delta + \beta \gamma}{\beta \delta} &= \left( \frac{(ac+bd)(g^2+h^2) + eg+fh}{(c^2+d^2)(g^2+h^2)}, \right. \\ &\quad \left. \frac{(bc-ad)(g^2+h^2) + fg-eh}{(c^2+d^2)(g^2+h^2)} \right) \\ &= \left( \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{eg+fh}{g^2+h^2}, \frac{bc-ad}{c^2+d^2} + \frac{fg-eh}{g^2+h^2} \right) \end{aligned}$$

由 (1)、(2) 两式的右端而得

$$\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\alpha \delta + \beta \gamma}{\beta \delta},$$

$$\text{同理可证} \quad \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\alpha \gamma}{\beta \delta}.$$

## 习 题 1.5

1、把下列复数写成三角形式：

(1) 1; (2) i; (3)  $\sqrt{3} - i$ ; (4)  $-\sqrt{2} - \sqrt{2}i$

〔解〕：(1)  $1 = 1 \cdot (\cos 0 + i \sin 0)$

(2)  $i = 1 \cdot (\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2})$

(3)  $r = |\sqrt{3} - i| = 2 \therefore \sin \varphi = \frac{1}{2}, \cos \varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\varphi$  在第 IV 象限 故  $\varphi = \frac{11\pi}{6}$  因此

$\sqrt{3} - i = 2 (\cos \frac{11\pi}{6} + i \sin \frac{11\pi}{6})$

(4)  $r = |-\sqrt{2} - \sqrt{2}i| = 2, \cos \varphi = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\sin \varphi = -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \cos \varphi = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\varphi$  在第 III 象限, 故  $\varphi = \frac{5\pi}{4}$  因此

$-\sqrt{2} - \sqrt{2}i = 2 (\cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4})$

2 计算: (1)  $(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4})(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6})$

(2)  $\frac{1 + \cos \theta + i \sin \theta}{1 + \cos \theta - i \sin \theta}$

〔解〕 (1) 原式  $= \cos(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6}) + i \sin(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6})$

$= \cos \frac{5\pi}{12} + i \sin \frac{5\pi}{12}$

(2) 原式  $= \frac{(1 + \cos \theta + i \sin \theta)^2}{(1 + \cos \theta - i \sin \theta)(1 + \cos \theta + i \sin \theta)}$

$$= \frac{2(1+\cos\theta)(\cos\theta + i\sin\theta)}{2(1+\cos\theta)}$$

$$= \cos\theta + i\sin\theta$$

3、证明：对于任意复数  $\alpha$ 、 $\beta$  以下不等式成立：

$$||\alpha| - |\beta|| \leq |\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta|$$

〔证〕 设  $\alpha = (a, b)$   $\beta = (c, d)$  则

$$\begin{aligned} & \left| |\alpha| - |\beta| \right|^2 = \left( \sqrt{a^2 + b^2} - \sqrt{c^2 + d^2} \right)^2 \\ &= (a^2 + b^2 + c^2 + d^2) - 2\sqrt{(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)} \\ & \quad | \alpha + \beta |^2 = (a+c)^2 + (b+d)^2 = (a^2 + b^2 + c^2 + d^2) \\ & \quad \quad + 2(ac + bd) \\ & \quad (|\alpha| + |\beta|)^2 = (\sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{c^2 + d^2})^2 \\ &= (a^2 + b^2 + c^2 + d^2) + 2\sqrt{(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)} \\ & \text{于是 } \frac{(\sqrt{(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)})^2}{(ac + bd)^2} = \frac{(ac + bd)^2 + (ad - bc)^2}{(ac + bd)^2} \\ &= 1 + \frac{(ad - bc)^2}{(ac + bd)^2} \geq 1. \end{aligned}$$

所以

$$||\alpha| - |\beta|| \leq |\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta|$$

4 证明，对于任意复数  $\alpha$ 、 $\beta$  以下等式成立。

$$|\alpha + \beta|^2 + |\alpha - \beta|^2 = 2(|\alpha|^2 + |\beta|^2)$$

〔证〕 设  $\alpha = (a, c)$   $\beta = (c, d)$ ，则

$$|\alpha + \beta|^2 = (a+c)^2 + (b+d)^2$$

$$\begin{aligned}
 |\alpha - \beta|^2 &= (a-c)^2 + (b-d)^2 \\
 |\alpha + \beta|^2 + |\alpha - \beta|^2 &= 2(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) \\
 &= 2(|\alpha|^2 + |\beta|^2)
 \end{aligned}$$

5, 试将  $\sin 5\theta$  和  $\cos 5\theta$  用  $\sin \theta$  和  $\cos \theta$  表示,

[解] 由棣美弗公式有

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^5 = \cos 5\theta + i \sin 5\theta$$

$$\begin{aligned}
 \text{而 } (\cos \theta + i \sin \theta)^5 &= \cos^5 \theta - 10 \cos^3 \theta \sin^2 \theta + 5 \cos \theta \sin^4 \theta \\
 &\quad + i(5 \cos^4 \theta \sin \theta - 10 \cos^2 \theta \sin^3 \theta + \sin^5 \theta)
 \end{aligned}$$

比较等式  $(\cos \theta + i \sin \theta)^5 = \cos 5\theta + i \sin 5\theta$  两端的实部与虚部系数得:

$$\cos 5\theta = \cos^5 \theta - 10 \cos^3 \theta \sin^2 \theta + 5 \cos \theta \sin^4 \theta$$

$$\sin 5\theta = 5 \cos^4 \theta \sin \theta - 10 \cos^2 \theta \sin^3 \theta + \sin^5 \theta$$

6 求  $\frac{1}{2}(\sqrt{2} + i\sqrt{2})$  的三次方根

$$[\text{解}] Z = \frac{1}{2}(\sqrt{2} + i\sqrt{2}) = \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}$$

$$\sqrt[3]{z} = \sqrt[3]{\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}}$$

$$= \cos \frac{2k\pi + \frac{\pi}{4}}{3} + i \sin \frac{2k\pi + \frac{\pi}{4}}{3}$$

( $k=0, 1, 2$ ) 因此所求的三根为:

$$\omega_0 = \cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} + i \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4};$$

$$\omega_1 = \cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{4} + i \frac{\sqrt{2}}{4};$$