



国家科学技术学术著作出版基金资助出版

多体物理中的相干态 正交化方法及其应用

汪克林 陈庆虎 刘涛

著



中国科学技术大学出版社

013334114

0431
13

国家科学技术学术著作出版基金资助

多体物理中的相干态 正交化方法及其应用

汪克林 陈庆虎 刘 涛

著



中国科学技术大学出版社



北航

C1641382

0431
13

内 容 简 介

本书讲述的相干态正交化理论是一种非微扰的新方法,它和 Green 函数相较可以看到,后者按耦合常数的幂展开,而新方法首先将玻色场平移至所有近似理论得到的零级近似所需新的玻色场后,再在新玻色场的“Fock 态”中展开。本书从阐述相干态正交化方法的物理思想出发,叙述其如何严格求解二态单模玻色场的 J-C 模型并与实验结果比较,验证理论的可靠性和精确性,然后推广到高角动量和单模玻色场的 Dicke 模型得到一系列有价值的结论,再将它应用于自旋-玻色模型,包括分离模和连续模的情形;后者与重要的耗散问题有密切关系。书中还讨论了该方法在若干重要领域中的应用,对各种多体系统中的重要物理现象和规律,如对称性、对称的自发破缺、量子相变、量子纠缠、Berry 相、保真度等都做了较为详细的讨论。

本书包含内容十分丰富,研究方法上具有原创性,对物理学的认识理解十分透彻,所介绍的方法在物理学中具有广泛的应用前景,可供相关研究人员参考,对深入认识理解和研究多体问题有较大的借鉴作用。

图书在版编目(CIP)数据

多体物理中的相干态正交化方法及其应用/汪克林,陈庆虎,刘涛著. —合肥:中国科学技术大学出版社,2012.12

ISBN 978-7-312-03041-3

I. 多… II. ①汪… ②陈… ③刘… III. 相干态—正交化—研究 IV. O431

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2012) 第 312470 号

出版 中国科学技术大学出版社
安徽省合肥市金寨路 96 号,230026
<http://press.ustc.edu.cn>
印刷 合肥晓星印刷有限责任公司
发行 中国科学技术大学出版社
经销 全国新华书店
开本 710 mm×960 mm 1/16
印张 13.5
字数 258 千
版次 2012 年 12 月第 1 版
印次 2012 年 12 月第 1 次印刷
定价 48.00 元

前 言

自 1994 年起我们用相干态展开方法讨论极化子问题到现在历时已近 20 年. 在这些年的工作中, 作者和若干同仁一道创建了一类较为完善的求解多体问题的非微扰方法. 在这个理论发展的第一阶段, 我们用相干态展开方法讨论了极化子、激子、双极化子和 Holstein 模型等凝聚态物理理论中的一些基本问题. 当时国际上这一领域的研究尚处在变分法、微扰论、近似变换及数值计算的阶段, 而我们的半解析方法已显现出一些优势. 当国际上一般还停留在讨论极化子的基态时, 我们的方法已能成功地运用于运动极化子问题.

量子光学中的 Rabi 模型一直无法严格解析求解, 只能用旋波近似的方法来处理. 这一近似方法也被推广到其他若干多体物理问题, 如自旋玻色系统. 随着实验的发展及应用的需要, 建立超越旋波近似严格理论的迫切性更加显露出来, 目前国际上也有不少的工作在探索没有旋波近似下的理论. 我们在原有的相干态展开方法基础上, 发展了一种相干态正交化技术, 可以很精确地处理无转动波近似的单模和多模自旋玻色系统. 与他人的理论结果比较, 我们发现文献中很多比较著名的理论实际上只相当于我们方法的初级近似. 随着二能级系统与玻色子耦合强度的加强, 一些初级近似的理论逐渐失效, 我们的理论计算结果与超强耦合实验的结果符合得很好, 显示出一定的优越性.

在过去的近 20 年里, 我们在国内外发表了不少的成果, 这些成果表明我们的系统理论可以有效地应用于一类多体问题, 即费米(或自旋)-玻色耦合系统. 量子多体系统的问题是原子物理、凝聚态物理、量子光学和量子信息等领域中一个十分重要和基本的内容. 多年来 Green 函数方法一直是讨论多体问题的主要理论工具, 由于应用了费曼图及费曼规则, 使之成为一个系统的解析理论. 主要的 Green 函数方法是一种量子理论中的微扰论方法, 它按耦合常数的幂次展开, 其每一级近似在 Fock 态的一个子空间中展开. 随着实际的需要, 非微扰理论的发展已是必然的趋势. 相干态正交化理论首先将多体问题中的玻色场做一个平移得到新的玻色场, 然

后在新的玻色场中展开. 它的每一级近似都包含了无穷多个原始 Fock 态部分的求和, 因此它的收敛性及精确性都远远高于在原始 Fock 态空间中展开的计算. 以 Dicke 模型基态计算为例, 相干态正交化理论计算展开到六级时已达到饱和结果, 而在原始的 Fock 态中展开, 即使高到两位数量级的展开阶数也达不到这样的精确性.

本书主要阐述了相干态正交化方法由来的物理思想, 叙述了如何严格求解二态系统及单模场耦合 Rabi 模型, 并与实验结果比较, 证实了理论结果的可靠性及精确性. 然后推广到讨论高角动量与单模玻色场耦合的 Dicke 模型, 得到一系列有价值的物理结果. 随后再将该理论推广到自旋-玻色场模型, 包括分离和连续谱两种形式. 本书的另一部分内容是将这一理论应用于物理学的多个方面: 多粒子变量和多模玻色场的 Holstein 模型, 磁系统及磁性质, 发光理论中的激子问题, 诱导透明及极化子等目前大家所关注的研究领域. 书中除讨论多体系统的基态外, 也讨论物理系统完整的能谱及相应的态矢、跃迁频谱、物理系统的对称性及对称的自发破缺、量子相变、量子纠缠及其突然消失与复活、Berry 相、保真度等物理系统的各种重要性质.

在完成本书的研究工作中, 有不少的成果是和中国科学技术大学的完绍龙, 中国科学院武汉物理研究所的冯芒, 华北电力大学的韩榕生, 五邑大学的王忆, 西南科技大学的任学藻诸位教授一道完成的. 在此本书作者向他们表示衷心的感谢.

本书所涉及的范围包含凝聚态物理到量子光学的诸多问题, 我们无法一一提及和引用所有相关的论文和著作, 对那些应该引用而遗漏的文献作者, 我们深表歉意. 由于作者学术水平有限, 书中难免有不妥之处, 我们真诚地希望读者给予批评指正.

作 者
2012 年 9 月

目 次

前言	(i)
第 1 章 多体问题的思考	(1)
1.1 引言	(1)
1.2 玩具模型	(3)
第 2 章 J - C 模型	(9)
2.1 J - C 模型的意义	(9)
2.1.1 腔电动力学与 J - C 模型	(9)
2.1.2 Λ 型原子与 J - C 模型	(10)
2.2 J - C 模型在旋波近似下的严格解	(11)
2.2.1 求解	(11)
2.2.2 演化问题	(13)
2.2.3 暗态	(16)
2.3 J - C 模型的严格求解及宇称	(17)
2.3.1 J - C 模型的哈氏量及宇称	(17)
2.3.2 表象变换与算符变换	(19)
2.3.3 定态解的玻色场态矢中的系数关系	(20)
2.3.4 严格解与旋波近似解的比较	(23)
2.4 J - C 模型严格求解与实验结果的比较	(28)
2.4.1 二能态“原子”与单模玻色场的耦合系统	(28)
2.4.2 二能态“原子”与三模玻色场的耦合系统	(32)
2.5 J - C 模型的解析解法	(38)

• iv •

第4章 有限分立模式的自旋-玻色模型	(89)
4.1 激光调控的阱中的粒子群	(89)
4.1.1 如何在阱中实现自旋-玻色耦合	(89)
4.1.2 模型具有复苏现象	(90)
4.2 有限分立模 S-B 模型的宇称与求解	(92)
4.2.1 宇称及宇称守恒	(92)
4.2.2 求解	(96)
4.3 宇称对称性是否会破缺——兼论几种模型的对称破缺	(98)
参考文献	(100)
第5章 Holstein 模型	(101)
5.1 Holstein 模型的复杂性	(101)
5.2 Holstein 模型的变分求解	(102)
5.2.1 干 DNA 中的 Holstein 极化子模型的电荷转移	(102)
5.2.2 变分求解 Holstein 模型中考虑进双声子作用的问题	(105)
5.3 两格点 Holstein 模型的严格解	(109)
5.3.1 用相干态展开方法求解两格点 Holstein 模型	(110)
5.3.2 解析解与近似算法得到的结果的比较	(112)
5.4 格点能不同的两格点 Holstein 模型的严格解	(113)
5.4.1 无序性下的两格点 Holstein 模型	(113)
5.4.2 计算的结果和讨论	(115)
参考文献	(116)
第6章 准粒子	(120)
6.1 极化子	(120)
6.1.1 静止极化子	(120)
6.1.2 用相干态正交化方法讨论极化子	(124)
6.1.3 运动的极化子	(130)
6.2 一维双极化子和二维极化子与双极化子	(135)
6.2.1 双极化子的变分算法	(135)

6.2.2	二维极化子	(138)
6.2.3	各个维度下的双极化子	(141)
6.3	激子	(143)
6.3.1	激子的变分计算	(144)
6.3.2	激子的相干态展开方法的计算	(147)
6.4	Polariton	(149)
6.4.1	Polariton 的简单模型	(150)
6.4.2	另一 Polariton 系统的基态解	(153)
参考文献		(155)
第 7 章 耗散		(158)
7.1	单比特的耗散	(158)
7.1.1	热库的振子分布	(158)
7.1.2	单比特的耗散问题	(160)
7.2	两比特纠缠态的耗散	(166)
7.2.1	两比特耗散的求解	(166)
7.2.2	纠缠受耗散的影响	(172)
7.3	热库零频邻域性质的关键作用及其重要结论	(174)
7.3.1	Spin-Boson 模型中的对称破缺和标度行为	(174)
7.3.2	无定域场的 SBM 没有量子的相变	(179)
附录 7.1 连续谱相干态矩阵元		(182)
附录 7.2 连续谱相干态与 Fock 态矩阵元		(188)
参考文献		(199)
名词索引		(201)

第 1 章 多体问题的思考

1.1 引言

多体问题,即量子多体系统的研究,是物理和化学中不少领域的一个重要研究方向.这些领域包括核物理、原子物理、凝聚态物理、理论化学、物理化学、量子光学、量子信息和生物物理等.量子多体系统是指具有离散多自由度和连续多自由度的量子系统,研究它的性质和动力学行为是多体物理的主要内容.

由于多体系统是多个自由度的系统,必然具有复杂性和多样性.除了气、液和固三种形态外,对于同一物质的液态和固态也常有不同的结构方式和不同的物理性质的相存在.这些不同的相呈现出不同的,甚至是完全相反的一些物理性质,如导电性质不同的绝缘相和导体相、铁磁性和反铁磁性等.导致多体系统相变的外部因素一般是外部环境的温度变化,而在零温时基于同一种物质中相互作用的强弱或某些物理参量的变化使系统从一种相过渡到另一种相,这种类型的相变被称为量子相变.

多体系统是由物理性质相同的个体组成的体系,它的结构形式是多种多样的.尽管如此,它仍然具有这样或那样的规律性和规则的整体性质,例如固体中的原子、分子排列的周期性、自旋取向的一致性,这种整体的规则性质的变化表征多体系统的一些对称性变化,更确切地说——从保有某种对称性过渡到对称性的破缺.通常总是可用一些物理量来标志不同的相和表征这些相的对称特性,它们被称为系统的序参量.

量子多体系统中的个体,例如原子、分子、离子、光子、声子等,可分为两大类:具有半整数自旋的费米子和具有整数自旋的玻色子.这两类粒子具有不同的统计性质,它们的多体波函数或多体态矢也具有显著不同的特征.费米系的多体态矢是全反对称的,而玻色系的多体态矢是全对称的.因此费米系具有重要的泡利不相容

原理,而玻色子却没有.这两种粒子系显著的不同特性来自它们服从不同的对易和反对易的基本对易关系.

在多体系统中,不论是费米子还是玻色子都具有一定大小的自旋或轨道角动量.角动量算符服从的对易关系既不同于费米子的产生、湮灭算符满足的反对易关系,也不同于玻色子的产生、湮灭算符满足的对易关系.它们满足的对易关系既有对称的,也有反对称的,所以处理起来较为困难.过去已由 Schwinger 提出了双振子理论以及 Holstein - Primakov 的单振子变换理论来帮助减轻这一困难.这两种理论可统称为角动量算符的玻色化方法,它们使得具有自旋的量子多体系统的处理得到一定的简化.

量子多体系统可以是单纯的费米子多体系统,如电子气问题;也可以是单纯的玻色子系统,如固体中的热声子系.不过,更多见的是既包含费米子又包含玻色子的量子多体系统.这是因为费米粒子间相互作用的中介粒子总是玻色子的缘故.例如电磁作用的中介粒子是光子以及存在于粒子间的属于玻色子的声子的作用.这种作用贯穿于粒子与固体中的离子集体振动间交换能量的过程之中.

在非相对论的理论框架下,即粒子速度远低于光速的情形下,费米子的粒子数是守恒的,也即在系统的动力学演化中费米子的总数始终保持不变,但作为传递作用的中介粒子的光子或声子的总数在演化过程中却是变化的.换句话说,在量子多体系统中费米子的波函数或态矢常固定在一个确定的粒子数的 Hilbert 子空间里,而玻色子部分的态矢则不然.因此,就既有费米子又有玻色子的量子多体系统而言,其动力学演化规律用传统的粒子数一定的 Fock 态来描述可能不是一种方便和可行的方法.

原子或分子中的电子在不同能级上的自发辐射、受激辐射和受激吸收都属于电磁相互作用.它和带电粒子与声子的作用以及描述基本粒子相互作用规律的规范场相互作用都可归之于同样的 Yukawa 型相互作用.所以,可以说求解多体物理问题的传统的 Green 函数方法是来自和相对论性量子场论的相互借鉴.在这种方法中利用费曼图可以形象和清楚地描述相互作用的物理过程,并由于它具有系统的费曼规则可以阐释和分析有关的量子多体系统的物理规律,因而使它成为多体物理领域中的主要理论工具.从另一个角度来看,我们知道它的系列费曼图是按耦合强度常数的幂次展开的.尽管严格的解需要考虑到全部的无穷阶费曼图形的贡献,但是如果只要求近似到一定的精确程度时,则可以只计算有限的费曼图形,所以它也是一个系统的求解多体系统的近似方法.

Green 函数方法实质上是量子理论中的微扰论方法,因为它是按耦合常数的

幂次展开的,这就要求耦合强度较弱,以保证其收敛性和有限阶计算的可行性.然而在凝聚态物理中多体系统的电声相互作用的耦合通常并不属于弱耦合的范围,随着激光技术的出现和进步,强激光作用下的物理和化学过程也常不能看作是弱耦合的过程,因此在许多重要的多体系统的物理问题中用 Green 函数方法去处理不一定切实可行.多年来,人们就一直在探索建立一个不以耦合强度幂次来展开的非微扰的理论工具.当然这种努力的目标不是寻找一种严格的解析方法,因为大家清楚这种设想的要求太高了.比较现实的是寻求另一种近似程度不按耦合强度展开的方法,用费曼图的语言来讲,就是设想非微扰的每一步近似中包含的费曼图将不是 Green 函数方法中对应于一定耦合强度幂次的那些费曼图.新方法的每一阶近似中包含的图可能是 Green 函数的各阶费曼图中一部分的某种组合,更确切一点说是全部费曼图中的某些无穷的部分求和.

如何寻找一种有效的非微扰理论方法应用于讨论量子多体物理这个问题还可以从另一角度来设想.我们知道 Green 函数方法除了按照耦合常数的幂次展开这一特点外,还有一点是它将费米子及玻色子的态矢都用粒子数一定的 Fock 态来展开.这对演化中保持不变的费米子系统来说是恰当和方便的,但对粒子数会不断变化的玻色子系统来说可能不是最恰当的办法.这就启示我们如何去探索建立一种非微扰理论的可能性.本书的内容就是围绕这一主题来进行的,循着这一思路提出了一个求解多体物理的非微扰方法,并将它应用于各个有关物理领域及各种物理模型中,从已经得到的结果来看,至少可以说这是行之有效的.当然还有很多的工作及改进需要继续去做,现在把它归纳起来写成一本书的目的,一方面供同行们参考,另一方面也想得到同行们的批评及指正,使得这一探讨能更加深入地进行下去.

1.2 玩具模型

前面已谈过,由于多体系统的复杂性导致的结果,我们会看到即使是单模的玻色子和粒子的作用,例如一个二能态系统与一个单模光相互作用的 J-C 模型要严格求解也是一件困难的事情,长期以来人们一直采用旋波近似(RWA)去讨论相关的一些问题.为了找到一个超出 RWA 近似的非旋波近似的新方法,这里举出一个单个费米子与多模玻色子系统相互作用的简单模型,这个模型是严格可解的.我们要

看的是从它的严格求解过程中我们能得到什么样的启发。

这个模型的哈氏量如下：

$$H = c^+ c \left[\epsilon + \sum_q g_q (a_q + a_q^+) \right] + \sum_q \omega_q a_q^+ a_q \quad (1.2.1)$$

其中, c, c^+ 是费米子的湮灭、产生算符; ϵ 是费米子的固有能量; a_q, a_q^+ 是 q 模玻色子的湮灭、产生算符, q 模玻色子的能量为 ω_q ($\hbar$ 取为 1). 费米子与 q 模玻色子间相互作用的耦合常数为 g_q . 对于这样一个耦合系统, 从它的玻色子是多模的情形, 不同模式玻色子的能量各异以及它们与费米子的耦合强度也不相同的这些特点来看, 这一模型是具有一定普遍性的. 因此, 似乎它应该是不易求解的, 然而它却是一个严格可解的模型。

实际上, 这一系统严格求解的方法是比较直截了当的, 即我们可以通过一个正则变换将 (1.2.1) 式对角化. 引入的正则变换算符为

$$U = \exp \left[-c^+ c \sum_q \frac{g_q}{\omega_q} (a_q^+ - a_q) \right] \quad (1.2.2)$$

容易看出它是一个么正算符, 即

$$U^+ = \exp \left[c^+ c \sum_q \frac{g_q}{\omega_q} (a_q^+ - a_q) \right] = U^{-1} \quad (1.2.3)$$

在下面的讨论中我们要用到 Hausdorff 公式. 该公式告诉我们, 对于任意的两个算符 A, S 有如下的关系:

$$\bar{A} = e^S A e^{-S} = A + [S, A] + \frac{1}{2!} [S, [S, A]] + \dots \quad (1.2.4)$$

现在用 (1.2.2) 式及 (1.2.3) 式来对系统的哈氏量 (1.2.1) 式作正则变换:

$$\bar{H} = U^+ H U \quad (1.2.5)$$

首先利用 (1.2.4) 式分别计算 (1.2.1) 式中的各个算符在正则变换下的结果, 得出

$$\begin{cases} \bar{C} = U^+ C U = C \exp \left[- \sum_q \frac{g_q}{\omega_q} (a_q^+ - a_q) \right] \\ \bar{C}^+ = U^+ C^+ U = C^+ \exp \left[\sum_q \frac{g_q}{\omega_q} (a_q^+ - a_q) \right] \end{cases} \quad (1.2.6)$$

$$\begin{cases} \bar{a}_q = U^+ a_q U = a_q - \frac{g_q}{\omega_q} C^+ C \\ \bar{a}_q^+ = a_q^+ - \frac{g_q}{\omega_q} C^+ C \end{cases} \quad (1.2.7)$$

由以上的结果可得变换后的哈氏量为

$$\begin{aligned}
\bar{H} &= U^+ H U \\
&= \epsilon \bar{C}^+ \bar{C} + \sum_q g_q (\bar{a}_q + \bar{a}_q^+) + \sum_q \omega_q \bar{a}_q^+ \bar{a}_q \\
&= \epsilon C^+ C + \sum_q g_q \left(a_q + a_q^+ - 2 \frac{g_q}{\omega_q} C^+ C \right) C^+ C \\
&\quad + \sum_q \omega_q \left(a_q^+ - \frac{g_q}{\omega_q} C^+ C \right) \left(a_q - \frac{g_q}{\omega_q} C^+ C \right) \\
&= \epsilon C^+ C - C^+ C \left(\sum_q \frac{g_q^2}{\omega_q} \right) + \sum_q \omega_q a_q^+ a_q
\end{aligned} \tag{1.2.8}$$

其中用到

$$\begin{aligned}
\bar{C}^+ \bar{C} &= C^+ \exp \left[\sum_q \frac{g_q}{\omega_q} (a_q^+ - a_q) \right] C \exp \left[- \sum_q \frac{g_q}{\omega_q} (a_q^+ - a_q) \right] \\
&= C^+ \exp \left[\sum_q \frac{g_q}{\omega_q} (a_q^+ - a_q) \right] \exp \left[- \sum_q \frac{g_q}{\omega_q} (a_q^+ - a_q) \right] C \\
&= C^+ C
\end{aligned} \tag{1.2.9}$$

及

$$C^+ C C^+ C = C^+ (1 - C^+ C) C = C^+ C - C^+ C^+ C C = C^+ C \tag{1.2.10}$$

经过正则变换后得到的(1.2.8)式的哈氏量已经成为对角化的形式了,其能谱如下:

(1) 基态能量

$$E_0 = \epsilon - \sum_q \frac{g_q^2}{\omega_q} \tag{1.2.11}$$

(2) 所有的激发态能量

$$E_{\{n_q\}} = \epsilon - \sum_q \frac{g_q^2}{\omega_q} + \sum_q n_q \omega_q \tag{1.2.12}$$

至此,这一问题便得到了完全的解决.不过,为了从这一模型中得到启发,我们现在换一种解法来讨论.由于这是一个严格可解的问题,很容易判断新的解法是否正确.同时也可看出,从这一新的解决方法的讨论中如何启发我们找到解决这类多体问题的一个新的有效的途径.为此,令(1.2.1)式的定态解取如下形式:

$$|\rangle = C^+ |0\rangle \cdot |\varphi\rangle \tag{1.2.13}$$

其中 $|0\rangle$ 是真空态, $C^+ |0\rangle$ 表示一个费米子的态, $|\varphi\rangle$ 为相应的玻色子的态矢.将(1.2.13)式代入(1.2.1)式决定的定态方程中,有

$$\begin{aligned}
 H|\rangle &= C^+|0\rangle\left[\epsilon + \sum_q g_q(a_q + a_q^+)\right]|\varphi\rangle + C^+|0\rangle\sum_q \omega_q a_q^+ a_q |\varphi\rangle \\
 &= EC^+|0\rangle|\varphi\rangle
 \end{aligned} \quad (1.2.14)$$

两端消去 $C^+|0\rangle$ 得到 $|\varphi\rangle$ 满足的方程:

$$\left[\epsilon + \sum_q g_q(a_q + a_q^+) + \sum_q \omega_q a_q^+ a_q\right]|\varphi\rangle = E|\varphi\rangle \quad (1.2.15)$$

观察上式会发现,如果我们引入一组新的玻色算符:

$$\begin{cases} A_q = a_q + g_q \\ A_q^+ = a_q^+ + g_q \end{cases} \quad (1.2.16)$$

(1.2.15)式即可写成对角的形式从而成为严格可解的. 也很容易证明引进的新算符满足玻色子算符的基本对易关系:

$$\begin{cases} [A_q, A_{q'}] = [A_q^+, A_{q'}^+] = 0 \\ [A_q, A_{q'}^+] = \delta_{qq'} \end{cases} \quad (1.2.17)$$

以及在新算符($\{A_q\}, \{A_q^+\}$)相应的 Fock 空间里同样有以下一些性质.

(1) 可以引入算符 $\{A_q\}$ 的 Fock 空间里的真空态 $|0\rangle_A$. 它具有以下的性质:

$$A_q|0\rangle_A = 0 \quad (1.2.18)$$

(2) 引入新算符的粒子数为 $\{n_q\}$ 的新的 Fock 态矢:

$$|n_{q_1}, n_{q_2}, \dots\rangle_A$$

它的意义是

$$A_{q_i}^+ A_{q_i} |n_{q_1}, n_{q_2}, \dots, n_{q_i}, \dots\rangle_A = n_{q_i} |n_{q_1}, n_{q_2}, \dots, n_{q_i}, \dots\rangle_A \quad (1.2.19)$$

注意,在上面的那些公式中态矢 $|\dots\rangle_A$ 都加上一个下标 A ,其目的是表明现在写出的态矢都是在算符($\{A_q\}, \{A_q^+\}$)的 Fock 空间中的态矢,以便和原来的($\{a_q\}, \{a_q^+\}$)的 Fock 空间中的态矢相区别. 为了看得更清楚一些,下面将阐明新、旧两种 Fock 空间的态矢间的关系及其物理意义.

先从系统的求解问题谈起. 将(1.2.15)式用(1.2.16)式的($\{A_q\}, \{A_q^+\}$)来表示,有

$$\left[\epsilon + \sum_q \omega_q A_q^+ A_q - \sum_q \frac{g_q^2}{\omega_q}\right]|\varphi\rangle = E|\varphi\rangle \quad (1.2.20)$$

立即看到它已是对角化的形式,即已严格可解,而且得到和(1.2.11)式、(1.2.12)式一样的能谱:

$$E_{\{n_q\}} = \epsilon + \sum_q n_q \omega_q - \sum_q \frac{g_q^2}{\omega_q} \quad (1.2.21)$$

那么两种方法得到的基态和激发态是否也是一样的呢? 从(1.2.20)式看出新

解法得出的对应于能量 $E_{\{n_q\}}$ 的态矢就是 $C^+ |0\rangle n_{q_1}, n_{q_2}, \dots, n_{q_i}, \dots\rangle_A$, 那么我们是否可以说原来的解法按(1.2.8)式的对角化形式看对应于 $E_{\{n_q\}}$ 的态矢是 $|n_{q_1}, n_{q_2}, \dots, n_{q_i}, \dots\rangle C^+ |0\rangle$ 这样的形式呢? 如果是这样, 那么两种方法解出的本征态矢岂不是就不相同了吗? 问题是(1.2.8)式是经过么正变换过来的, 由(1.2.8)式直接得出的态矢应该再作一个相应的反变换才能得到真正的态矢, 而在变换以后, 我们就会发现它们是相同的.

不过在这里我们不去作态矢的反变换, 只是从 $|n_{q_1}, n_{q_2}, \dots\rangle_A$ 出发, 把它用 $(\{a_q\}, \{a_q^+\})$ 算符的 Fock 空间的态矢表示出来, 看这些态矢应当是什么样的. 为了更加简单明了地找出两者的关系, 下面以单模为例来表述, 因为单模的情形弄清楚了, 多模的情形就可以直截了当地得出. 在简单的单模情形下, (1.2.16)式改写为

$$\begin{cases} A = a + g \\ A^+ = a^+ + g \end{cases} \quad (1.2.22)$$

这时仍然将 A 空间中的态矢加一个下标 A 和原来的 a 空间中的态矢相区别. 其基态矢 $|0\rangle_A$ 满足

$$A |0\rangle_A = 0 \quad (1.2.23)$$

上式也可写成

$$(a + g) |0\rangle_A = 0 \quad (1.2.24)$$

把它和 a 空间中的相干态满足的关系

$$(a + g)e^{-\frac{g^2}{2} - ga^+} |0\rangle = 0 \quad (1.2.25)$$

作比较就知道 $|0\rangle_A$ 就是 a 空间中的相干态:

$$|0\rangle_A = e^{-\frac{g^2}{2} - ga^+} |0\rangle \quad (1.2.26)$$

而一般的激发态矢可表示为

$$\begin{aligned} |n\rangle_A &= \frac{1}{\sqrt{n!}} (A^+)^n |0\rangle_A \\ &= \frac{1}{\sqrt{n!}} (a^+ + g)^n e^{-\frac{g^2}{2} - ga^+} |0\rangle \end{aligned} \quad (1.2.27)$$

即它们是 a 空间中的相干态矢用算符 $(a^+ + g)^n$ 作用后得到的态矢.

由以上的单模讨论可直接推广到多模的情形, 因此我们立即可以写出多模情形的相应于能量本征值 $E_{\{n_q\}}$ 的本征态矢:

$$C^+ |0\rangle |n_{q_1}, n_{q_2}, \dots\rangle_A = C^+ |0\rangle \frac{1}{\sqrt{\prod_q n_q!}} \prod_q (a_q^+ + g_q)^{n_q} e^{-\sum_q \left(\frac{g_q^2}{2} + g_q a_q^+\right)} |0\rangle \quad (1.2.28)$$

最后,将这一简单玩具模型的讨论归纳为以下几点:

(1) 这一模型过去用传统的正则变换使哈氏量对角化而得到严格解,在这里我们引入一种新的严格求解的方法,而且将在后面的讨论中看到这个新的解法为我们提供了一种切实可行的求解一系列多体问题的方法.

(2) 从这个模型的各种激发态的态矢表示式可以看出,它们不是 $\{a_q, a_q^+\}$ 空间中的粒子数一定的 Fock 态矢,而是相干态形式的态.这种态含有各种粒子数的 Fock 态,这点从哈氏量的表示式可以清楚看到,因为通过 $\{a_q\}$ 及 $\{a_q^+\}$ 的作用便会产生出许多不同粒子数的 Fock 态来.

(3) 这个玩具模型不是一个物理实际的模型.原因是模型中的费米子能量始终是恒值 ϵ ,在相互作用下费米子的能量应当是变化的.

(4) 可以预料,当我们应用这一新的解法去讨论各种相关的实际多体问题时,由于那些系统中存在的这样或那样的复杂性,一定还会有不少的困难需要一一地加以解决.