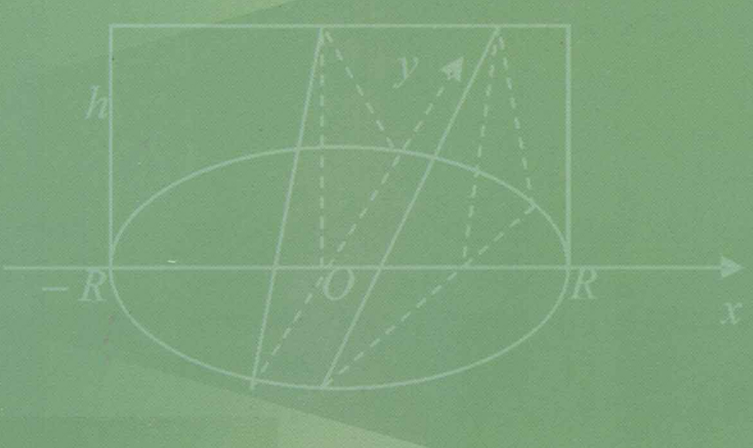
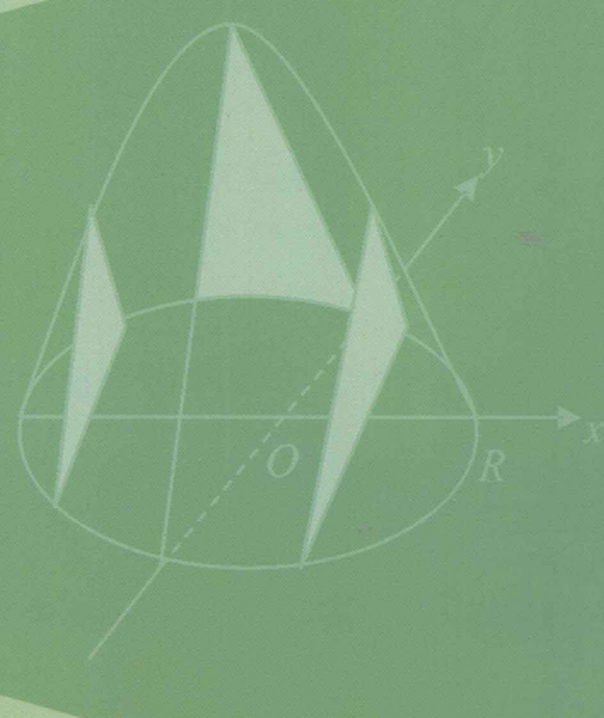
普通高等学校少数民族预科教材（试用）同步辅导

高等数学

导教导学及习题全解

主编 林屏峰





电子科技大学出版社

普通高等学校少数民族预科教材(试用)同步辅导

高等数学

导教导学及习题全解

主编:林屏峰
编委:(排名不分先后)
唐　敏　　冀晓明　　曾　伟
曾纯一　　刘基良　　赵　青

电子科技大学出版社

图书在版编目（CIP）数据

高等数学导教导学及习题全解 / 林屏峰主编. -- 成都：电子科技大学出版社, 2011.5

ISBN 978-7-5647-0819-1

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①林… Ⅲ. ①高等数学－高等学校－教学参考资料 Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 066155 号

高等数学

导教导学及习题全解

林屏峰 主 编

出　　版：电子科技大学出版社（成都市一环路东一段 159 号电子信息产业大厦　邮编：610051）
策划编辑：刘　军
责任编辑：张　鹏
主　　页：www.uestcp.com.cn
电子邮箱：uestcp@uestcp.com.cn
发　　行：新华书店经销
印　　刷：四川经纬印务有限公司
成品尺寸：210mm × 285mm　　印张 9.875　字数 280 千字
版　　次：2011 年 5 月第一版
印　　次：2011 年 5 月第一次印刷
书　　号：ISBN 978-7-5647-0819-1
定　　价：36.00 元

◆ 本社发行部电话：028-83202463；本社邮购电话：028-83208003。
◆ 本书如有缺页、破损、装订错误，请寄回印刷厂调换。

前　言

少数民族预科教育事业随着少数民族地区建设和发展的需要而得到迅速发展。预科《数学》是民族预科教育的核心课程，并且《高等数学》是预科《数学》的一个重要部分。为了使民族预科数学教学体系能够体现新世纪大学预科学生素质教育的战略要求，为了使预科数学教材教辅能够反映时代要求，为了帮助少数民族预科学生能够具有良好的数学修养、扎实的数学基础以及运用数学工具的能力，为了提高民族预科阶段的数学教学质量，从而缓解当前预科阶段高等数学教辅资料紧缺的现象，我们编写了这本教辅导学参考书。

本书与教育部普通高等学校少数民族预科教材编写委员会所编教材《高等数学》同步，以适应少数民族预科学生的数学基础。全书共分为五章：函数极限、一元函数的导数和微分、微分中值定理及导数的应用、不定积分和定积分。每章由三个部分组成。

第一部分是“本章知识要点精要”。每一章中真正应该牢记并成为解题武器的内容其实并不多，这无疑将起到最后复习总结的作用。

第二部分是“教材习题同步解答”。数学学习效果的一个重要标志是会不会做题。我们对教育部普通高等学校少数民族预科教材编写委员会所编教材《高等数学》每节所附习题作了同步的详细解答。从近几年习题课教学的经验出发，尽可能地使用适应民族预科学生的思维方式叙述解答过程，部分习题还给出了两种解法。在使用这部分时，初学者应该先独立思考，自己解答，然后与题解对照，做到理解原理、明确步骤、掌握方法和技巧。只有这样才能有效地提高自己的解题能力。

第三部分是“自测提高题”。在这部分，我们汇集了难度较大的综合题，旨在进一步强化解题训练，巩固和提高复习效果。

此外，最后还附有近两年西南民族大学预科第一学期学期考试和预科直升考试试题，附录部分给出了每章自测提高题和每份试题的简要参考答案。

本书的编写得到“四川省 2009～2010 年高等教育人才培养质量和教学改革项目”、“西南民族大学 2009～2012 年高等教育人才培养质量和教学改革项目”的资助。同时，在编写过程中编者所在单位的领导和老师对编写工作给予全力的支持和鼓励，在此一并表示衷心的感谢。由于经验不足和学识有限，加之时间有限，本书的不足之处，敬请同行和读者热心指正。

编　者

2010.9.1

目　录

第一章 函数与极限

一、本章知识要点精要

(一)极限的概念

极限的定义($\varepsilon-N$ 定义,$\varepsilon-M$ 定义,$\varepsilon-\delta$ 定义)

$\lim\limits_{n\to\infty}f(n)=A\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0,\exists N>0$,当 $n>N$ 时,使得 $|f(n)-A|<\varepsilon$.

$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0,\exists M>0$,当 $|x|>M$ 时,使得 $|f(x)-A|<\varepsilon$.

$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0,\exists M>0$,当 $x<-M$ 时,使得 $|f(x)-A|<\varepsilon$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0,\exists M>0$,当 $x>M$ 时,使得 $|f(x)-A|<\varepsilon$.

$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$,当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时,使得 $|f(x)-A|<\varepsilon$.

$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=A\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$,当 $-\delta<x-x_0<0$ 时,使得 $|f(x)-A|<\varepsilon$.

$\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=A\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$,当 $0<x-x_0<\delta$ 时,使得 $|f(x)-A|<\varepsilon$.

注意:① 定义中 ε 刻划函数值 $f(n)$ 或 $f(x)$ 与 A 的接近程度,N 刻划 n 充分大的程度,M 刻划 $|x|$ 、x 、$-x$ 充分大的程度,δ 刻划 x 与 x_0 接近的程度,ε 是任意给定的正数,N(或 M,或 δ)是随 ε 而确定的,但并不是 ε 的函数.事实上,ε 是越小,N 和 M 应该越大,δ 应该越小.

注意:② 在上述定义中,若特殊地取 $A=0$,则函数 $f(x)$ 叫做 $x\to x_0$ 或 $x\to\infty$时的无穷小,即无穷小是以 0 为极限的函数.0 是唯一的作为无穷小的数.

注意:③ 单侧极限

在 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$ 的定义中,x 以任何方式趋于 ∞,因此,x 既可以向左侧也可以向右侧趋于 ∞.若仅考虑 x 向左侧趋于 ∞(记为 $x\to-\infty$),此时把 $|x|>M$ 改为 $x<-M$,则 A 称为 $f(x)$ 当 $x\to\infty$时的左侧极限,记为 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$.

若仅考虑 x 向右侧趋于 ∞(记为 $x\to+\infty$),此时把 $|x|>M$ 改为 $x>M$,则 A 称为 $f(x)$ 当 $x\to\infty$时的右侧极限,记为 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$.

容易证明,$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$.

在 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 的定义中,$x\neq x_0$ 且以任何方式趋于 x_0,因此,x 既可以从 x_0 的左侧也可以从 x_0 的右侧趋于 x_0.若仅考虑 x 从 x_0 的左侧趋于 x_0(记为 $x\to x_0^-$),此时把 $0<|x-x_0|<\delta$ 改为 $-\delta<x-x_0<0$,则 A 称为 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的左极限,记为 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=A$.

若仅考虑 x 从 x_0 的右侧趋于 x_0(记为 $x\to x_0^+$),此时把 $0<|x-x_0|<\delta$ 改为 $0<x-x_0<\delta$,则 A 称为 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的右极限,记为 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=A$.

容易证明,$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=A$.

注意:④ 研究 $x\to x_0$ 时 $f(x)$ 的极限,是为了研究在自变量 $x\to x_0$ 的变化过程中 $f(x)$ 的性态,此时 $f(x)$ 有无极限与 $f(x)$ 在 x_0 点有无定义完全无关. 即使 $f(x)$ 在点 x_0 有定义,在讨论时 $f(x)$ 的极限的过程中,函数值 $f(x_0)$ 不起任何作用,因此定义中要求 $0<|x-x_0|<\delta$.

注意:⑤ 无穷大的定义($E-\delta(M)$ 定义).

$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} f(x)=\infty \Leftrightarrow \forall E>0, \exists\delta>0(M>0)$,当 $0<|x-x_0|<\delta(|x|>M)$ 时,$|f(x)|>E$.

注意:⑥ $\lim f(x)=\infty$,此时 $f(x)$ 的极限是不存在的,为了反映 $|f(x)|$ 无限增大这种性态,也说成 $f(x)$ 的极限是无穷大.(说明:符号“ lim ”表示,即对于 $x\to x_0$、x_0^-、x_0^+,或 $x\to\infty$、$+\infty$、$-\infty$,或 $n\to\infty$这几种变化过程均可. 以下不再复述.)

注意:⑦ 在定义中把 $|f(x)|>E$ 换成 $f(x)>E$ (或 $f(x)<-E$),就记为 $\lim f(x)=+\infty$(或 $\lim f(x)=-\infty$).

(二)无穷小阶的比较

设 α 和 β 都是在同一个自变量变化过程中的无穷小量,且 $\alpha\neq 0$.

(1)若 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=0$,则称 β 是比 α 高阶的无穷小,记为 $\beta=o(\alpha)$.

(2)若 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=\infty$,则称 β 是比 α 低阶的无穷小.

(3)若 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=\infty$,则称 β 与 α 是同阶无穷小. 特别,当 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=c\neq 0$ 时,则 β 与 α 是等价无穷小,记为 $\alpha\sim\beta$.

定理 1 $\beta\sim\alpha\Leftrightarrow\beta=\alpha+o(\alpha)$.

定理 2 设 $\alpha\sim\alpha'$,$\beta\sim\beta'$,且 $\lim\dfrac{\beta'}{\alpha'}$ 存在,则 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=\lim\dfrac{\beta'}{\alpha'}$.

(三)极限的性质

1. 极限的唯一性　数列、函数极限都是唯一的.

2. 有界性　收敛数列必有界(有界数列未必收敛,无界数列必发散,发散数列未必无界).

若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$,则 $\exists\delta>0$,$f(x)$ 在邻域 $U^o(x_0,\delta)$ 内有界.

若 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$,则 $\exists M>0$,$f(x)$ 在区域 $(-\infty,-M)\cup(M,+\infty)$ 内有界.

3. 保号性

(1)设 $\lim\limits_{n\to\infty}f(n)=A$. 若 $A>0(<0)$,则 $\exists N>0$,当 $n>N$ 时,$f(n)>0(<0)$.

(2)设 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$. 若 $A>0(<0)$,则 $\exists M>0$,当 $|x|>M$ 时,$f(x)>0(<0)$.

(3)设 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$. 若 $A>0(<0)$,则 $\exists\delta>0$,当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时,$f(x)>0(<0)$.

极限保号性(上述命题的逆否命题)

(1)设 $\lim\limits_{n\to\infty}f(n)=A$. 若 $\exists N>0$,当 $n>N$ 时,$f(n)\geqslant 0(\leqslant 0)$,则 $A\geqslant 0(\leqslant 0)$.

(2)设 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$. 若 $\exists M>0$,当 $|x|>M$ 时,$f(x)\geqslant 0(\leqslant 0)$,则 $A\geqslant 0(\leqslant 0)$.

(3)设 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$. 若 $\exists\delta>0$,当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时,$f(x)\geqslant 0(\leqslant 0)$,则 $A\geqslant 0(\leqslant 0)$.

保序性(保号性的推论)

(1)若 $\lim\limits_{n\to\infty}f(n)=A$,$\lim\limits_{n\to\infty}g(n)=B$,并且 $A>B(A<B)$,则 $\exists N>0$,当 $n>N$ 时,$f(n)>g(n)(f(n)<g(n))$.

(2)若 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$, $\lim\limits_{x\to\infty}g(x)=B$,并且 $A>B(A<B)$,则 $\exists M>0$,当 $|x|>M$ 时, $f(x)>g(x)(f(x)<g(x))$.

(3)若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$, $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=B$,并且 $A>B(A<B)$,则 $\exists\delta>0$,当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时, $f(x)>g(x)(f(x)<g(x))$.

4. 收敛数列与其子列间的关系　收敛数列的任一子列必收敛,并且极限相同.

由这一性质可知,如果数列 $\{x_n\}$ 有一个子列发散或两个子列收敛于不同的极限,则数列 $\{x_n\}$ 发散. 当然发散的数列可能有收敛的子列.

5. 函数极限与数列极限的关系　$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 的充要条件是以 x_0 为极限的数列 $\{x_n\}$ ($x_n\neq x_0$),都有 $f(x_n)\to A(n\to\infty)$.

(四)极限存在的判别法

1. 在某一极限过程下, $\lim f(x)=A\Leftrightarrow f(x)=A+\alpha(x)$,其中 $\alpha(x)$ 为无穷小.

2. **夹逼准则**:若数列 $\{x_n\}$, $\{y_n\}$, $\{z_n\}$ 满足

(1)存在某个自然数 N_0 ,当 $n\geqslant N_0$ 时, $x_n\leqslant y_n\leqslant z_n$;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}z_n=A$,

则数列 $\{y_n\}$ 的极限存在,且 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=A$.

这一准则可以推广到函数极限情形.

3. **单调有界准则**:单调有界数列必有极限.

(五)极限的四则运算及复合运算

1. 若 $\lim f(x)=A$, $\lim g(x)=B$,则

(1) $\lim[f(x)\pm g(x)]=\lim f(x)\pm\lim g(x)=A\pm B$;

(2) $\lim f(x)\cdot g(x)=\lim f(x)\cdot\lim g(x)=A\cdot B$.

上述情形均可以推广到有限个函数的和、差、积的极限的情形. 特别地,

$\lim[cf(x)]=c\lim f(x)=cA$ (c 为常数) .

并且有限个无穷小的和、差、积仍为无穷小,有界函数与无穷小之积仍为无穷小.

(3) $\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim f(x)}{\lim g(x)}=\dfrac{A}{B}\ (B\neq 0)$.

上述四则运算对数列极限情形依然成立. 值得注意的是,进行极限的四则运算,必须以函数(数列)有极限为前提,没有极限,不能进行四则运算.

2. 若 $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=a$,但是在 x_0 的某个去心邻域内 $\varphi(x)\neq a$,又 $\lim\limits_{u\to a}f(u)=A$,则

$$\lim_{x\to x_0}f[\varphi(x)]=\lim_{u\to a}f(u)=A.$$

(六) 两个重要极限

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$,及推广形式:设 $\lim\varphi(x)=0$,则有

$$\lim\frac{\sin\varphi(x)}{\varphi(x)}=1,\ \lim\frac{\tan\varphi(x)}{\varphi(x)}=1,\ \lim\frac{\arcsin\varphi(x)}{\varphi(x)}=1,\ \lim\frac{\arctan\varphi(x)}{\varphi(x)}=1.$$

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$ 和 $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}$,及推广形式:设 $\lim\varphi(x)=\infty$,则有

$$\lim\left[1\pm\frac{1}{\varphi(x)}\right]^{\varphi(x)}=\mathrm{e}^{\pm 1};$$

设 $\lim \psi(x)=0$，则有

$$\lim\left[1\pm\psi(x)\right]^{\frac{1}{\psi(x)}}=e^{\pm1}.$$

（七）求极限的方法总结

1. 利用极限定义证明极限.

2. 设 $f(x)$ 是基本初等函数，a 是定义域内的点，则 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=f(a)$. 初等函数在定义区间内求极限 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=f(a)$.

3. 利用四则运算法则.

注意：① 多项式与分式函数代入法求极限（几个公式）.

设 $P(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$ 。则 $\lim\limits_{x\to a}P(x)=P(a)$；

设 $P(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$，$Q(x)=a_0x^m+a_1x^{m-1}+\cdots+a_{m-1}x+a_m$，并且 $a_0b_0\neq0$. 则有

$$\lim_{x\to\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}=\begin{cases}0 & ,\ n<m\\ \dfrac{a_0}{b_0} & ,\ n=m\\ \infty & ,\ n>m\end{cases}.$$

例如，$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-\dfrac{1}{x^2}}{2-\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}}=\dfrac{1}{2}$；又如，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{6^{n+1}-7^n}{5\cdot6^n+7^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{6\left(\dfrac{6}{7}\right)^n-1}{5\left(\dfrac{6}{7}\right)^n+1}=-1$ 属于同一类型的问题.

若 $Q(a)\neq0$，则 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{P(x)}{Q(x)}=\dfrac{P(a)}{Q(a)}$. 例如，$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2+3x+4}{x^2+2}=\dfrac{0+0+4}{0+2}=2$.

② 消去零因子法求极限（分解因式，分子（或分母）有理化等）.

例如，$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-2x+1}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x-1}{x+1}=0$；

$$\lim_{x\to4}\frac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}=\lim_{x\to4}\frac{(2x-8)(\sqrt{x}+2)}{(x-4)(\sqrt{1+2x}+3)}=\lim_{x\to4}\frac{2(\sqrt{x}+2)}{\sqrt{1+2x}+3}=\frac{4}{3}.$$

③ 无穷小与无穷大的倒数关系. 例如，$\lim\limits_{x\to3}\dfrac{\sqrt{3+x}}{x-3}=\infty$，因为 $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x-3}{\sqrt{3+x}}=0$.

4. 复合函数的极限运算法则.

5. 利用左右极限求分段函数在分段点处的极限. 例如，设 $f(x)=\begin{cases}e^x-1 & (x\geqslant0)\\ 0 & (x<0)\end{cases}$.

$\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}0=0$，$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}(e^x-1)=0$，所以 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=0$.

6. 极限存在的判别准则（夹逼原理、单调有界性）.

7. 两个重要极限.

$$\lim_{x\to0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{\tan x(1-\cos x)}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{\tan x}{x}\cdot\frac{2\sin^2\dfrac{x}{2}}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{1}{2}\cdot\frac{\tan x}{x}\cdot\left|\frac{\sin\dfrac{x}{2}}{\dfrac{x}{2}}\right|^2=\frac{1}{2};$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+3}{2x+1}\right)^{x+1}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{2x+1}\right)^{\frac{2x+1}{2}+\frac{1}{2}}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{2x+1}\right)^{\frac{2x+1}{2}}\cdot\left(1+\frac{2}{2x+1}\right)^{\frac{1}{2}}=e.$$

8. 无穷小性质（无穷小与有界变量之积仍是无穷小）. 例如，$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}\cdot\sin x=0$.

9. 等价无穷小的替换(无穷小的乘积与商时可以替换,代数和时要慎用). 例如, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x(1-\cos x)}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cdot\frac{1}{2}x^2}{x^3}=\dfrac{1}{2}$.

10. 连续函数的性质:内层函数极限存在,外层函数连续,则极限符号可与外层函数交换,即:

$\lim f(\varphi(x))=f(\lim\varphi(x))$. 例如, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}=\ln\left[\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\right]=\ln e=1$.

11. 洛必达法则(见第三章).

12. 利用定积分的定义计算(见第五章).

(八) 函数的连续性

1. 连续性定义.

定义: 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某个邻域内有定义. 则有 $f(x)$ 在点 x_0 处连续 $\Leftrightarrow\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$. 若 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=f(x_0)$, 则称 $f(x)$ 在点 x_0 处左连续;若 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=f(x_0)$, 则称 $f(x)$ 在点 x_0 处右连续. 从而有 $f(x)$ 在点 x_0 处连续当且仅当 $f(x)$ 在点 x_0 处左、右连续.

例如,函数 $f(x)=\begin{cases}e^x & x\le 0\\ \dfrac{\sin x}{x} & x>0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续. 因为

$f(0)=1$, $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}e^{-x}=1$, $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sin x}{x}=1$, 即 $\lim\limits_{x\to 0}=f(0)$.

连续性条件: $f(x)$ 在点 x_0 处连续 $\Leftrightarrow\begin{cases}\text{i} & f(x_0)\ \exists\\ \text{ii} & \lim\limits_{x\to x_0}f(x)\ \exists\\ \text{iii} & \lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)\end{cases}$.

2. 间断点:上述连续性条件(i, ii, iii)至少有一个不成立. 间断点的分类:设 x_0 是函数 $y=f(x)$ 的间断点.

第一类间断点: $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$, $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$ 存在.

$\begin{cases}\text{可去间断点: } \lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x), \text{但 } f(x_0) \text{ 不存在或 } \lim\limits_{x\to x_0}f(x)\neq f(x_0);\\ \text{跳跃间断点: } \lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)\neq\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)\end{cases}$

第二类间断点: $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$, $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$ 至少有一个不存在.

$\begin{cases}\text{无穷间断点: } \lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=\infty \text{ 或 } \lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=\infty;\\ \text{振荡间断点: } \lim\limits_{x\to x_0^-}f(x) \text{ 或 } \lim\limits_{x\to x_0^+}f(x) \text{ 不存在,但是在某个范围内来回振荡;}\\ \cdots\cdots\end{cases}$

例如,函数 $f(x)=\begin{cases}|x-1|, & |x|>1\\ \cos\dfrac{\pi}{2}x, & |x|\leqslant 1\end{cases}$ 在区间 $(-\infty,-1)$, $(-1,+\infty)$ 内连续性,由于 $f(1)=0$,

$\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\cos\dfrac{\pi}{2}x=0$, $\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}|x-1|=0$, 即 $\lim\limits_{x\to 1}=f(1)$, 因此函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处连续.

但是 $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^-}|x-1|=2$ ，$\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^+}\cos\frac{\pi}{2}x=0$ ，即 $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)$ ，$\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)$ 存在不相等，因此 $x=-1$ 是函数 $f(x)$ 的第一类间断点中的跳跃间断点.

3. 连续函数的运算：连续函数的和、差、积、商（分母不为零）均为连续函数；连续函数的反函数、复合函数仍为连续函数. 一切初等函数在定义区间内都是连续的.

4. 闭区间上连续函数的性质（最值性、有界性、根的存在定理、介值定理）.

最值定理 设 $f(x)$ 是闭区间 $[a,b]$ 上的连续函数，则 $f(x)$ 是在 $[a,b]$ 上可以取到最小值、最大值，即 $\exists x_1,x_2\in[a,b]$ 使得对 $\forall x\in[a,b]$ 有 $m=f(x_1)\leqslant f(x)\leqslant f(x_2)=M$.

有界定理 设 $f(x)$ 是闭区间 $[a,b]$ 上的连续函数，则 $f(x)$ 是在 $[a,b]$ 上有界，即 $\exists E>0$ 使得对 $\forall x\in[a,b]$ 有 $|f(x)|\leqslant E$.

根的(零点)存在定理 设 $f(x)$ 是闭区间 $[a,b]$ 上的连续函数，并且 $f(a)f(b)<0$ ，则在 (a,b) 内至少存在一个零点，即 $\exists\xi\in(a,b)$ 使得 $f(\xi)=0$.

介值定理 设 $f(x)$ 是闭区间 $[a,b]$ 上的连续函数，则对任意介于 $f(a)$ 与 $f(b)$ 之间的数 C ，在 (a,b) 内至少存在一点 ξ ，使得 $f(\xi)=C$.

介值定理的推广 设 $f(x)$ 是闭区间 $[a,b]$ 上的连续函数，m 是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最小值，M 是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最大值，则对 $C\in[m,M]$ ，$\exists\xi\in[a,b]$ ，使得 $f(\xi)=C$.

二、教材习题同步解答

1.1 数列的极限

1. 下列数列是否单调，是否有界，是否有极限？

(1) $x_n=\dfrac{1}{5n+7}$ ；　(2) $x_n=2n+5$ ；　(3) $x_n=n\sin\dfrac{n\pi}{2}$.

解 (1) 对任意的自然数 n 有 $0<5n+7<5(n+1)+7$ ，所以有 $\dfrac{1}{5n+7}>\dfrac{1}{5(n+1)+7}>0$ ，即 $x_n>x_{n+1}>0$ ，因此数列 $\{x_n\}$ 是单调递减数列.

显然对于任意的自然数 n 有 $5n+7>1$ ，因而有 $0<x_n=\dfrac{1}{5n+7}<1$. 进而存在 $M=1$ ，对任意的自然数 n 有，$|x_n|=x_n<1=M$ ，所以数列 $\{x_n\}$ 是有界的.

综上数列是单调递减有界数列，因此必有极限. 观察出 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$.

$$|x_n-0|=x_n=\frac{1}{5n+7}<\frac{1}{5n}<\frac{1}{n}.$$

$\forall\varepsilon>0$ ，要使 $\dfrac{1}{n}<\varepsilon$ ，只要 $n>\dfrac{1}{\varepsilon}$ ，于是取正整数 $N\geqslant\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]$. 则当 $n>N$ 时，就有 $|x_n-0|<\dfrac{1}{n}<\varepsilon$ ，故 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$.

(2) 对任意的自然数 n 有 $0<2n+5<2(n+1)+5$ ，所以有 $0<x_n<x_{n+1}$ ，因此数列 $\{x_n\}$ 是单调递增数列.

显然对于任意 $M>0$ ，存在 $n_0=\max\left\{1,\left[\dfrac{M-5}{2}\right]\right\}$ ，使得 $|x_{n_0}|=2n_0+5>M$ ，因此数列 $\{x_n\}$ 是无界的.

综上数列是单调递增无界数列，因此数列 $\{x_n\}$ 的极限不存在.

(3) 从数列的前几项 $x_1=1,x_2=0,x_3=-3,x_4=0,x_5=5,\cdots$ 可以看出数列 $\{x_n\}$ 既非单调递减数列

也非单调递增数列.

显然对于任意 $M>0$，存在 $k_0=\max\{1,\left[\frac{M+1}{2}\right]\}$，使得

$$|x_{2k_0-1}|=\left|(2k_0-1)\sin\frac{(2k_0-1)\pi}{2}\right|=2k_0-1>M,$$

因此数列 $\{x_n\}$ 是无界的.

综上数列不是单调数列，但是无界数列，因此数列 $\{x_n\}$ 的极限不存在.

2. 用极限定义证明.

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^4}=0$； (2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n+1}{2n+1}=\frac{3}{2}$； (3) $\lim\limits_{n\to\infty}0.\underbrace{99\cdots9}_{n个9}=1$.

分析 用“$\varepsilon-N$”语言证明数列极限 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$ 的步骤如下：

(1)化简 $|x_n-A|$ (往往需将它适当放大后)得 $f(n)$；

(2)逆序分析求 N. $\forall\varepsilon>0$，要使 $f(n)<\varepsilon$，(解不等式后知) $n>g(\varepsilon)$，于是取正整数 $N\geqslant[g(\varepsilon)]$；

(3)按定义作结论 则当 $n>N$ 时，就有 $|x_n-A|<\varepsilon$. 故 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$.

证明 (1) $\left|\frac{1}{n^4}-0\right|=\frac{1}{n^4}<\frac{1}{n}$. $\forall\varepsilon>0$，要使 $\frac{1}{n}<\varepsilon$，只要 $n>\frac{1}{\varepsilon}$，于是取正整数 $N\geqslant\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$. 则当 $n>N$ 时，就有 $\left|\frac{1}{n^4}-0\right|<\frac{1}{n}<\varepsilon$，故 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^4}=0$.

(2) $\left|\frac{3n+1}{2n+1}-\frac{3}{2}\right|=\frac{1}{4n+2}<\frac{1}{n}$. $\forall\varepsilon>0$，要使 $\frac{1}{n}<\varepsilon$，只要 $n>\frac{1}{\varepsilon}$，于是取正整数 $N\geqslant\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$. 则当 $n>N$ 时，就有 $\left|\frac{3n+1}{2n+1}-\frac{3}{2}\right|<\frac{1}{n}<\varepsilon$，故 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n+1}{2n+1}=\frac{3}{2}$.

(3) $|0.\underbrace{99\cdots9}_{n个9}-1|=\frac{1}{10^n}=\frac{1}{(1+9)^n}=\frac{1}{C_n^0+9C_n^1+9^2C_n^2+\cdots+9^nC_n^n}<\frac{1}{9n}<\frac{1}{n}$.

$\forall\varepsilon>0$，要使 $\frac{1}{n}<\varepsilon$，只要 $n>\frac{1}{\varepsilon}$，于是取正整数 $N\geqslant\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$. 则当 $n>N$ 时，就有 $|0.\underbrace{99\cdots9}_{n个9}-1|<\frac{1}{n}<\varepsilon$，故 $\lim\limits_{n\to\infty}0.\underbrace{99\cdots9}_{n个9}=1$.

3. 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{13n^2+12n+1}{6n^2+5n+6}=\frac{13}{6}$.

证明 $$\lim_{n\to\infty}\frac{13n^2+12n+1}{6n^2+5n+6}=\lim_{n\to\infty}\frac{13+\frac{12}{n}+\frac{1}{n^2}}{6+\frac{5}{n}+\frac{6}{n^2}}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}13+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{12}{n}+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}}{\lim\limits_{n\to\infty}6+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5}{n}+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{6}{n^2}}=\frac{13+0+0}{6+0+0}=\frac{13}{6}.$$

4. 设 $|q|<1$，证明 $\lim\limits_{n\to\infty}q^n=0$.

证明 当 $q=0$ 时，显然 $\lim\limits_{n\to\infty}q^n=\lim\limits_{n\to\infty}0=0$；

当 $q\neq0$ 时，显然 $|q^n-0|=|q|^n$. $\forall\varepsilon>0$ ($0<\varepsilon<1$)，要使 $|q|^n<\varepsilon$，由于 $0<|q|<1$，因此只要 $n>\log_{|q|}\varepsilon$，于是取正整数 $N\geqslant[\log_{|q|}\varepsilon]$. 则当 $n>N$ 时，就有 $|q^n-0|=|q|^n<\varepsilon$，故 $\lim\limits_{n\to\infty}q^n=0$.

综上所述，当 $|q|<1$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}q^n=0$.

5. 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$.

证明 ($\varepsilon-N$ 定义证明)令 $h_n=\sqrt[n]{n}-1>0$，则有 $n=(h_n+1)^n$，即

$$n=(h_n+1)^n=1+nh_n+\frac{n(n-1)}{2}h_n^2+\cdots+nh_n^{n-1}+h_n^n,$$

进而 $n>\frac{n(n-1)}{2}h_n^2$，即 $h_n<\sqrt{\frac{2}{n-1}}(n>1)$.

$\forall\varepsilon>0$，要使 $|\sqrt[n]{n}-1|=h_n<\sqrt{\frac{2}{n-1}}<\varepsilon$，只要 $\frac{2}{n-1}<\varepsilon^2$，即 $n>\frac{1}{\varepsilon^2}+1>1$，于是取正整数 $N\geqslant\left[\frac{1}{\varepsilon^2}+1\right]$. 则当 $n>N$ 时，就有 $|\sqrt[n]{n}-1|<\sqrt{\frac{2}{n-1}}<\varepsilon$，故 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$.

（夹逼定理证明）由于

$$1\leqslant\sqrt[n]{n}=\sqrt[n]{\sqrt{n}\cdot\sqrt{n}\cdot\underbrace{1\cdot1\cdot\cdots\cdot1}_{n-2\text{个}1}}\leqslant\frac{\sqrt{n}+\sqrt{n}+\overbrace{1+1+\cdots+1}^{n-2\text{个}1}}{n}=\frac{2\sqrt{n}+n-2}{n},$$

并且 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2\sqrt{n}+n-2}{n}=1$，因此 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$.

6. 已知数列 $\{x_n\}$ 有界，$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=0$，证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_ny_n=0$.

证明 由数列 $\{x_n\}$ 有界知，$\exists M>0$，使得数列 $\{x_n\}$ 的每一项都有 $|x_n|\leqslant M$.

又 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=0$，则有 $\forall\varepsilon>0$，存在 $N>0$，当 $n>N$ 时，$|y_n-0|=|y_n|<\frac{\varepsilon}{M}$.

进而当 $n>N$ 时，$|x_ny_n-0|=|x_n||y_n|<M\cdot\frac{\varepsilon}{M}=\varepsilon$. 因此 $\lim\limits_{n\to\infty}x_ny_n=0$.

1.2 **函数的极限**

1. 证明 $\lim\limits_{x\to x_0}c=c$，此处 c 为一常数.

证明 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，$|c-c|=0<\varepsilon$. 因此 $\lim\limits_{x\to x_0}c=c$.

2. 用极限的定义证明 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=0$.

证明 $\left|\frac{\sin x}{x}-0\right|=\frac{|\sin x|}{|x|}\leqslant\frac{1}{|x|}(|\sin x|\leqslant1)$. $\forall\varepsilon>0$，要使 $\frac{1}{|x|}<\varepsilon$，只要 $|x|>\frac{1}{\varepsilon}$，于是取正数 $M\geqslant\frac{1}{\varepsilon}$. 则当 $|x|>M$ 时，就有 $\left|\frac{\sin x}{x}-0\right|\leqslant\frac{1}{|x|}<\varepsilon$，故 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=0$.

3. 求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3-3x+2}{x^4-4x+3}$.

解 $$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3-3x+2}{x^4-4x+3}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}-\frac{3}{x^3}+\frac{2}{x^4}}{1-\frac{4}{x^3}+\frac{3}{x^4}}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}-\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3}{x^3}+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2}{x^4}}{\lim\limits_{x\to\infty}1-\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4}{x^3}+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3}{x^4}}=\frac{0-0+0}{1-0+0}=0.$$

4. 求极限 $\lim\limits_{x\to4}\frac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}$.

解 $$\lim_{x\to4}\frac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}=\lim_{x\to4}\frac{(\sqrt{1+2x}-3)(\sqrt{1+2x}+3)(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)(\sqrt{1+2x}+3)}$$
$$=\lim_{x\to4}\frac{2(x-4)(\sqrt{x}+2)}{(x-4)(\sqrt{1+2x}+3)}=\lim_{x\to4}\frac{2(\sqrt{x}+2)}{\sqrt{1+2x}+3}=\frac{2(\sqrt{4}+2)}{\sqrt{1+8}+3}=\frac{4}{3}.$$

5. 求极限 $\lim\limits_{x\to a}\frac{\sin x-\sin a}{x-a}$.

解 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin x-\sin a}{x-a}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{2\sin\dfrac{x-a}{2}\cos\dfrac{x+a}{2}}{x-a}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin\dfrac{x-a}{2}}{\dfrac{x-a}{2}}\cdot\cos\dfrac{x+a}{2}=1\cdot\cos a=\cos a$.

另解：
$$\lim_{x\to a}\frac{\sin x-\sin a}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{\sin[(x-a)+a]-\sin a}{x-a}$$
$$=\lim_{x\to a}\frac{\sin(x-a)\cos a+\cos(x-a)\sin a-\sin a}{x-a}$$
$$=\lim_{x\to a}\left[\frac{\sin(x-a)}{x-a}\cdot\cos a+\frac{\cos(x-a)-1}{x-a}\cdot\sin a\right]$$
$$=\lim_{x\to a}\left[\frac{\sin(x-a)}{x-a}\cdot\cos a-\frac{\sin\frac{x-a}{2}}{\frac{x-a}{2}}\cdot\sin\frac{x-a}{2}\cdot\sin a\right]$$
$$=1\cdot\cos a-1\cdot0\cdot\sin a=\cos a.$$

6\. 说明函数 $f(x)=\begin{cases}e^x-1, & x\geqslant0\\ 0, & x<0\end{cases}$ 在 $x=0$ 点处极限存在.

解 因为 $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}(e^x-1)=0$，$\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}0=0$，即 $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=0$. 因此函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 点处极限存在，并且 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=0$.

7\. 计算 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1}$.

解
$$\lim_{x\to1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1}=\lim_{x\to1}\frac{(\sqrt[3]{x}-1)(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1)}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(\sqrt{x}+1)}{(x-1)(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1)}=\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1}=\frac{2}{3}.$$

8\. 计算 $\lim\limits_{x\to0}\left[\dfrac{\sin(2+x)}{x}-\dfrac{\sin(2-x)}{x}\right]$.

解
$$\lim_{x\to0}\left[\frac{\sin(2+x)}{x}-\frac{\sin(2-x)}{x}\right]=\lim_{x\to0}\frac{\sin(2+x)-\sin(2-x)}{x}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{2\cos2\cdot\sin x}{x}=\lim_{x\to0}2\cos2\cdot\frac{\sin x}{x}=2\cos2.$$

9\. 计算 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+3}{2x+4}\right)^x$.

解
$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+3}{2x+4}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(1+\frac{3}{2x}\right)^x}{\left(1+\frac{2}{x}\right)^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(1+\frac{3}{2x}\right)^{\frac{2x}{3}\cdot\frac{3}{2}}}{\left(1+\frac{2}{x}\right)^{\frac{x}{2}\cdot2}}=\frac{e^{\frac{3}{2}}}{e^2}=e^{-\frac{1}{2}}.$$

另解：
$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+3}{2x+4}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{2x+4}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{2x+4}\right)^{-(2x+4)\times\left(-\frac{1}{2}\right)-2}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1-\frac{1}{2x+4}\right)^{-(2x+4)}\right]^{-\frac{1}{2}}\cdot\left(1-\frac{1}{2x+4}\right)^{-2}$$
$$=\left[\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{2x+4}\right)^{-(2x+4)}\right]^{-\frac{1}{2}}\cdot\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{2x+4}\right)^{-2}$$
$$=e^{-\frac{1}{2}}\cdot1=e^{-\frac{1}{2}}$$

10. 计算 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{ax+4}{ax+1}\right)^{bx}(ab\neq 0)$.

解 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{ax+4}{ax+1}\right)^{bx}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{3}{ax+1}\right)^{bx}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{3}{ax+1}\right)^{\frac{ax+1}{3}\cdot\frac{3b}{a}-\frac{b}{a}}$

$$=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{3}{ax+1}\right)^{\frac{ax+1}{3}}\right]^{\frac{3b}{a}}\left(1+\frac{3}{ax+1}\right)^{-\frac{b}{a}}=e^{\frac{3b}{a}}\cdot 1=e^{\frac{3b}{a}}.$$

另解：$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{ax+4}{ax+1}\right)^{bx}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\left(1+\dfrac{4}{ax}\right)^{bx}}{\left(1+\dfrac{1}{ax}\right)^{bx}}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\left(1+\dfrac{4}{ax}\right)^{\frac{ax}{4}\cdot\frac{4b}{a}}}{\left(1+\dfrac{1}{ax}\right)^{\frac{ax}{4}\cdot\frac{b}{a}}}=\dfrac{e^{\frac{4b}{a}}}{e^{\frac{b}{a}}}=e^{\frac{3b}{a}}$.

1.3 无穷小与无穷大

1. 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}$.

解 因为 $x\to\infty$，$|\sin x|\leqslant 1$，$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0$，即 $x\to\infty$时 $\sin x$ 是有界变量，$\dfrac{1}{x}$ 是无穷小量，因此 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\sin x\cdot\dfrac{1}{x}=0$.

2. 求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3}{x^2+5}$.

解 （利用无穷大的 $E-\delta(M)$ 定义求解）$\forall E>0$，要使 $\left|\dfrac{x^3}{x^2+5}\right|>E$，只要 $\dfrac{|x|^3}{2|x|^2}>E(|x|>\sqrt{5})$，即 $|x|>2E$，于是取 $M=\max\{2E,\sqrt{5}\}$，当 $|x|>M$时，$\left|\dfrac{x^3}{x^2+5}\right|>E$. 所以 $\dfrac{x^3}{x^2+5}$ 是 $x\to\infty$时的无穷大量，即 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3}{x^2+5}=\infty$.

另解：(利用无穷大与无穷小的关系求解)，显然当 $x\to\infty$时，$\dfrac{x^3}{x^2+5}\neq 0$，但是 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+5}{x^3}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\dfrac{1}{x}+\dfrac{5}{x^3}}{1}=0$，进而根据无穷大与无穷小的关系有，$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3}{x^2+5}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{\dfrac{x^2+5}{x^3}}=\infty$.

3. 求 $\lim\limits_{x\to\infty}(x^2-3x+2)$.

解 （利用无穷大的 $E-\delta(M)$ 定义求解）$\forall E>0$，要使 $|x^2-3x+2|=|x-1||x-2|>E$，只要 $|x-1||x-2|>|x|-1>E(|x|\geqslant 3)$，即 $|x|>E+1$，于是取 $M=\max\{E+1,3\}$，当 $|x|>M$时，$|x^2-3x+2|>E$. 所以 x^2-3x+2 是 $x\to\infty$时的无穷大量，即 $\lim\limits_{x\to\infty}(x^2-3x+2)=\infty$.

4. 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x^2}{\tan 4x^2}$.

解 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x^2}{\tan 4x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{4x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{4}$.

5. 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$.

解 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{2}x^2}{x^2}=\dfrac{1}{2}$.

6. 设 $x\to x_0$ 时，$g(x)$ 是有界量，$f(x)$ 是无穷大量. 证明 $f(x)\pm g(x)$ 是无穷大量.

证明 设 $\delta_0>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta_0$ 时，$g(x)$ 有界，则存在 $M_0>0$，使得当 $0<|x-x_0|<\delta_0$ 时，$|g(x)|\leqslant M_0$.

当 $x\to x_0$ 时，$f(x)$ 是无穷大量，则 $\forall M>0$，存在 $\delta_1>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta_1$ 时，$|f(x)|>M+M_0$. 取 $\delta=\min\{\delta_0,\delta_1\}$，则当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，$|f(x)\pm g(x)|\geqslant|f(x)|-|g(x)|>M+M_0-M_0=M$，因此 $f(x)\pm g(x)$ 是 $x\to x_0$ 时的无穷大量.

7. $y=x\cos x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内是否有界？证明当 $x\to+\infty$ 时，$y=x\sin x$ 不是无穷大量.

解 $y=x\cos x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 不是有界变量，即 $y=x\cos x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 是无界的. 因为 $\forall M>0$，存在 $x_0=\left(\left[\frac{M}{\pi}\right]+1\right)\pi$，使得 $|x_0\cos x_0|=\left(\left[\frac{M}{\pi}\right]+1\right)\pi>M$.

下面证明当 $x\to+\infty$ 时，$y=x\sin x$ 不是无穷大量.

$\exists E=1$，对于 $\forall M>0$，存在 $x_0=\left(\left[\frac{M}{\pi}\right]+1\right)\pi$，使得 $x_0>M$，并且 $|x_0\sin x_0|=0<E$. 因此当 $x\to+\infty$ 时，$y=x\sin x$ 不是无穷大量.

1.4 函数的连续性与间断点

1. 求下列函数的连续区间.

(1) $f(x)=\dfrac{2}{x^2+2x-15}$；　　(2) $f(x)=\sqrt{x-4}+\sqrt{6-x}$；

(3) $f(x)=\begin{cases}1, & -1\leqslant x\leqslant 0\\ \dfrac{\sin x}{x}, & 0<x<1\\ 3x+5, & 1\leqslant x\leqslant 2\end{cases}$.

解 (1) 函数 $f(x)$ 的定义域是 $(-\infty,-5)\cup(-5,3)\cup(3,+\infty)$. 由于函数 $f(x)$ 是初等函数，因此 $f(x)$ 的连续区间是 $(-\infty,-5)$，$(-5,3)$，$(3,+\infty)$.

(2)函数 $f(x)$ 的定义域是 $[4,6]$. 由于函数 $f(x)$ 是初等函数，因此 $f(x)$ 在区间 $(4,6)$ 内连续. 又 $\lim\limits_{x\to4^+}f(x)=\lim\limits_{x\to4^+}(\sqrt{x-4}+\sqrt{6-x})=\sqrt{4-4}+\sqrt{6-4}=f(4)$，则 $f(x)$ 在 $x=4$ 处右连续；$\lim\limits_{x\to6^-}f(x)=\lim\limits_{x\to6^-}(\sqrt{x-4}+\sqrt{6-x})=\sqrt{6-4}+\sqrt{6-6}=f(6)$，则 $f(x)$ 在 $x=6$ 处左连续. 因此 $f(x)$ 的连续区间是 $[4,6]$.

(3)函数 $f(x)$ 的定义域是 $[1,2]$. 显然函数 $f(x)$ 在区间 $(-1,0)$，$(0,1)$，$(1,2)$ 内连续. 又 $\lim\limits_{x\to-1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to-1^+}1=1=f(1)$，则 $f(x)$ 在 $x=-1$ 处右连续；$\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}1=1=f(0)$，$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\sin x}{x}=1=f(0)$，即 $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=f(0)$，则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续；$\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{\sin x}{x}=\sin 1\neq 8=f(1)$，即 $f(x)$ 在 $x=1$ 处不左连续，则 $f(x)$ 在 $x=1$ 处不连续；$\lim\limits_{x\to2^-}f(x)=\lim\limits_{x\to2^-}(3x+8)=14=f(2)$，则 $f(x)$ 在 $x=2$ 处左连续. 因此 $f(x)$ 的连续区间是 $[-1,1)$，$(1,2]$.

2. 求下列函数的间断点，并指出间断点的类型.

(1) $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x^2-9x+14}$；　　(2) $f(x)=\dfrac{x}{\tan x}$；　　(3) $f(x)=\dfrac{1}{1-e^{\frac{x}{x-1}}}$；

(4) $f(x)=\arctan\dfrac{1}{x}$；　　(5) $f(x)=\dfrac{3}{2-\dfrac{2}{x}}$；　　(6) $f(x)=\dfrac{\sqrt{1-\cos x}}{x}$；

(7) $f(x)=\dfrac{2-x}{1-x}$.

解 (1) 函数 $f(x)$ 的定义域是 $(-\infty,2)\cup(2,7)\cup(7,+\infty)$，进而函数的间断点只可能为 $x=2$ 和 $x=7$.

对于 $x=2$，$\lim\limits_{x\to2}f(x)=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-4}{x^2-9x+14}=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{(x+2)(x-2)}{(x-2)(x-7)}=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x+2}{x-7}=-\dfrac{4}{5}$，因此 $x=2$ 是函数 $f(x)$ 的第一类间断点中的可去间断点.

对于 $x=7$，$\lim\limits_{x\to7}f(x)=\lim\limits_{x\to7}\dfrac{x^2-4}{x^2-9x+14}=\lim\limits_{x\to7}\dfrac{(x+2)(x-2)}{(x-2)(x-7)}=\infty$，因此 $x=2$ 是函数 $f(x)$ 的第二类间断点中的无穷间断点.

综上，$x=2$ 是函数 $f(x)$ 的第一类间断点中的可去间断点，$x=7$ 是第二类间断点中的无穷间断点.

(2)显然函数 $f(x)$ 的定义域是 $\left[\bigcup\limits_{k\in Z}\left(k\pi,k\pi+\dfrac{\pi}{2}\right)\right]\cup\left[\bigcup\limits_{k\in Z}\left(k\pi+\dfrac{\pi}{2},(k+1)\pi\right)\right]$，进而函数 $f(x)$ 的间断点只可能为 $x=k\pi$ 和 $x=k\pi+\dfrac{\pi}{2}(k\in Z)$.

对于 $x=0$，$\lim\limits_{x\to0}f(x)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{\tan x}=1$，因此 $x=0$ 是函数 $f(x)$ 的第一类间断点中的可去间断点.

对于 $x=k\pi(k\in Z,k\neq0)$，$\lim\limits_{x\to k\pi}f(x)=\lim\limits_{x\to k\pi}\dfrac{x}{\tan x}=\infty$，因此当 $k\neq0$ 时，$x=k\pi$ 是函数 $f(x)$ 的第二类间断点中的无穷间断点.

对于 $x=k\pi+\dfrac{\pi}{2}(k\in Z)$，$\lim\limits_{x\to k\pi+\frac{\pi}{2}}f(x)=\lim\limits_{x\to k\pi+\frac{\pi}{2}}\dfrac{x}{\tan x}=0$，因此 $x=k\pi+\dfrac{\pi}{2}$ 是函数 $f(x)$ 的第一类间断点中的可去间断点.

综上，$x=0$ 和 $x=k\pi+\dfrac{\pi}{2}(k\in Z)$ 是函数 $f(x)$ 的第一类间断点中的可去间断点，$x=k\pi(k\in Z,k\neq0)$ 是第二类间断点中的无穷间断点.

(3)显然函数 $f(x)$ 的定义域是 $(-\infty,0)\cup(0,1)\cup(1,+\infty)$，进而函数 $f(x)$ 的间断点只可能为 $x=0$ 和 $x=1$.

对于 $x=0$，$\lim\limits_{x\to0}f(x)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{1-e^{\frac{x}{x-1}}}=\infty$，因此 $x=0$ 是 $f(x)$ 的第二类间断点中的无穷间断点.

对于 $x=1$，$\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{1}{1-e^{\frac{x}{x-1}}}=0$，$\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{1}{1-e^{\frac{x}{x-1}}}=1$，即函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处的左右极限存在，但不相等，因此 $x=1$ 是 $f(x)$ 的第一类间断点中的跳跃间断点.

综上，$x=0$ 是 $f(x)$ 的第二类间断点中的无穷间断点，$x=1$ 是第一类间断点中的跳跃间断点.

(4)显然函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，进而 $f(x)$ 的间断点只可能为 $x=0$. $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\arctan\dfrac{1}{x}=\dfrac{\pi}{2}$，$\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}\arctan\dfrac{1}{x}=-\dfrac{\pi}{2}$，即 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的左、右极限存在，但不相等，因此 $x=0$ 函数 $f(x)$ 的第一类间断点中的跳跃间断点.

(5)显然函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,1)\cup(1,+\infty)$，进而 $f(x)$ 的间断点只可能为 $x=0$ 和 $x=1$.

对于 $x=0$，$\lim\limits_{x\to0}f(x)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3}{2-\dfrac{2}{x}}=0$，因此 $x=0$ 是 $f(x)$ 的第一类间断点中的可去间断点.

对于 $x=1$，$\lim\limits_{x\to1}f(x)=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{3}{2-\dfrac{2}{x}}=\infty$，因此 $x=1$ 是 $f(x)$ 的第二类间断点中的无穷间断点.