五年制中学課本

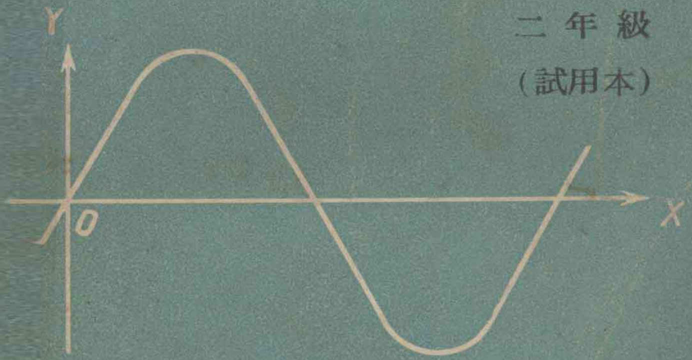
代数与初等函数

DAISHU YU

CHUDENG HANSHU

二 年 級

（試用本）



上 海 教 育 出 版 社

目 录

第六章　三角函数

一　任意角的三角函数

69. 引言　在小学里，我們曾經利用直角三角形中两边的比来规定銳角的正弦、余弦、正切和余切，我們知道，对于一个固定的銳角，它的正弦、余弦、正切和余切的値都是确定的。例如，对于角 30°，就有 $\sin 30^\circ=\frac{1}{2}$，$\cos 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\operatorname{tg} 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{3}$，$\operatorname{ctg} 30^\circ=\sqrt{3}$。但是当角的大小在变化的时候，它的正弦、余弦、正切和余切的値也就跟着变化。例如，当角从 30° 变到 60° 的时候，角的正弦的値就从 $\frac{1}{2}$ 变到 $\frac{\sqrt{3}}{2}$；余弦的値就从 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 变到 $\frac{1}{2}$；正切的値就从 $\frac{\sqrt{3}}{3}$ 变到 $\sqrt{3}$；余切的値就从 $\sqrt{3}$ 变到 $\frac{\sqrt{3}}{3}$。

为了清楚地看出它們变化的情况，我們把直角三角形放到直角坐标系上来討論(图 89)。

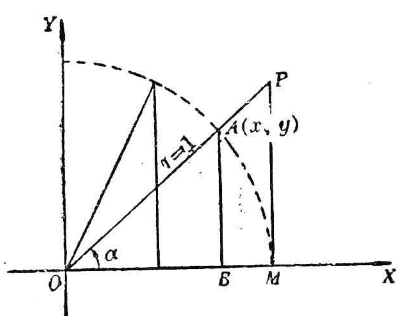


图　89

我們先来研究 $\sin\alpha$ 和 $\cos\alpha$ 的变化情况. 为了討論方便起見,我們取斜边 $r=1$, 那末

$$\sin\alpha=\frac{AB}{OA}=AB.$$

从图上可以看到，当 α 在变化的时候, 比值 AB 也跟着变化, 并且随着 α 的增大而增大; 当 α 取某一确定值的时候, 例如 $\alpha=30^\circ$, 比值 AB 也就随着确定, 例如比值 $AB=\frac{1}{2}$. 因此, 根据函数的定义,我們說:

角 α 的正弦是角 α 的函数,我們把它叫做角 α 的正弦函数, 角 α 是自变量.

同样, $$\cos\alpha=\frac{OB}{OA}=OB.$$

当 α 在变化的时候,比值 OB 也随着变化;当 α 取某一确定值的时候, 例如 $\alpha=60^\circ$,比值 OB 也就确定, 例如比值 $OB=\frac{1}{2}$. 因此,角 α 的余弦也是角 α 的函数. 但是当 α 逐渐增大的时候, 比值 OB 却逐渐减小, 所以这种函数是角 α 的另一种函数,它与角 α 的正弦函数不同,我們把它叫做角 α 的余弦函数.

因为 $\operatorname{tg}\alpha=\frac{AB}{OB}$, 为了研究方便起見, 我們要使这个比只含有一个变量. 为此, 在 x 軸上取 $OM=1$, 过 M 作 BA 的平行綫, 交 OA 的延长綫于 P(图 89), 那末

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{MP}{OM}=MP.$$

同样,当 α 逐渐增大的时候,比值 MP 也随着增大. 但是, 对于每一个确定的角,它的正切的值也就相应地确定,所以角 α 的正切也是角 α 的函数,我們把它叫做角 α 的正切函数. 依此类推, 角 α 的余切也是角 α 的函数,我們把它叫做余切函数.

正弦函数、余弦函数、正切函数、余切函数总起来叫做三角函数。在小学里講过的三角函数：

$$\sin\alpha=\frac{y}{r}、\cos\alpha=\frac{x}{r}、\ \operatorname{tg}\alpha=\frac{y}{x}、\operatorname{ctg}\alpha=\frac{x}{y},$$

因为这里 $0°<\alpha<90°$，所以把它們叫做銳角三角函数。

70. 三角函数表 在小学里，我們已經知道，在直角三角形中，可以利用銳角三角函数，从已知的三个元素求出另外三个元素。例如在直角三角形 ABC 中(图 90)，已知 $A=45°36'$，$AB=2$，解这三角形。

我們知道：

$$B=90°-A=44°24';$$

$$BC=AB\sin A=2\times\sin 45°36';$$

$$AC=AB\cos A=2\times\cos 45°36'.$$

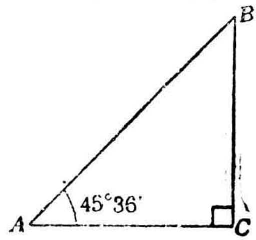


图 90

在小学里，我們已經学会由查表得到某些角，例如 12°、30°、45° 等等角的三角函数值；至于象 30°42′ 一类角的三角函数值，我們同样可以利用三角函数表查得。

現在我們来看怎样利用三角函数表查得 $\sin 45°36'$ 和 $\cos 45°36'$ 的值。

查 $\sin 45°36'$ 的时候，首先在四位数学用表第18頁表 VIII 的左边标有 A 的一行查得 45°，再横着向右查到頂上标有 36′ 的一行得到 0.7145。

查 $\cos 45°36'$ 的时候，首先在第18頁表 VIII 的右边标有 A 的一行查得 45°，再横着向左查到底下标有 36′ 的一行得到 0.6997。那末

$$BC=2\times\sin 45°36'=2\times 0.7145=1.429;$$

$$AC=2\times\cos 45°36'=2\times 0.6997=1.399.$$

下面举一些利用查表来求已知角的三角函数值的例子.

(1) $\sin 52°15'$.

在表上左边标有 A 的一行里查得 52° 后，横着向右在頂上却找不到 15′，而只能够找到 12′ 和 18′. 首先查得 $\sin 52°12'=0.7902$，再向右查到末三行里标有 3′ 的一行得到 5（末三行里的值叫做修正值，5 表示 0.0005）. 因为銳角的正弦随着角的增大而增大，所以应該在 $\sin 52°12'$ 的值上加上修正值 0.0005，得到

$$\sin 52°15'=0.7902+0.0005=0.7907.$$

(2) $\sin 52°34'$.

先查出 $\sin 52°36'$ 的值是 0.7944，再用上面的方法在标有 2′ 的一行里找出修正值 4，得到

$$\sin 52°34'=0.7944-0.0004=0.7940.$$

(3) $\cos 52°15'$.

先查出 $\cos 52°12'$ 的值是 0.6129，再在标有 3′ 的一行里找出修正值 7. 因为銳角的余弦随着角的增大而减小，所以

$$\cos 52°15'=0.6129-0.0007=0.6122.$$

(4) $\cos 52°34'$.

先查出 $\cos 52°36'$ 的值是 0.6074，再在标有 2′ 的一行里找出修正值 5，得到

$$\cos 52°34'=0.6074+0.0005=0.6079.$$

利用三角函数表，我們还可以反过来由已知的三角函数值，求出相应的銳角（精确到 1′）.

現在来看下面的例子.

(1) $\sin\alpha=0.2459$.

先在第 17 頁表 VIII 里找到与 0.2459 最接近的值 0.2453，横着向左，在左边标有 A 的一行里查得 14°；竖着向上，在頂上查

得 $12'$. 因为 $0.2459=0.2453+0.0006$, 所以再横着向右,查得修正值是 6 的度数是 $2'$. 由于銳角增大的时候,它的正弦值也增大,所以

$$\alpha=14°+12'+2'=14°14'.$$

(2) $\cos\alpha=0.0020$.

先在表 VIII 里找到与 0.0020 最接近的值 0.0017,横着向右,在右边标有 A 的一行里查得 $89°$; 竖着向下, 在底下查得 $54'$. 因为 $0.0020=0.0017+0.0003$, 所以再横着向右, 查得修正值是 3 的度数是 $1'$. 由于銳角增大的时候,它的余弦值縮小,所以

$$\alpha=89°+54'-1'=89°53'.$$

(3) $\operatorname{tg}\alpha=3.431$.

在表 IX 里,用同样方法,可以查得

$$\alpha=73°+42'+3'=73°45'.$$

习 題 十 五

1. 从 $25°$ 到 $30°$, 各三角函数的值发生了多大变化?变化規律怎样? 列表說明.

2. 从 $20°$ 到 $30°$, 从 $40°$ 到 $50°$, 正切函数值的变化情况是不是一样? 在哪个范圍里,正切函数值的变化比較大?

3. 从三角函数表,查出下列各函数的值:

(1) $\sin 15°42'$; (2) $\cos 73°12'$; (3) $\sin 69°28'$;

(4) $\sin 14'$; (5) $\cos 28°16'$; (6) $\operatorname{ctg} 17°41'$;

(7) $\operatorname{tg} 79°17'$; (8) $\cos 56°43'$.

4. 求下列各式里所含的銳角 α:

(1) $\sin\alpha=0.6428$; (2) $\cos\alpha=0.4446$;

(3) $\sin\alpha=0.3440$; (4) $\cos\alpha=0.6439$;

(5) $\operatorname{tg}\alpha=1.4490$;　　(6) $\cos\alpha=0.0949$;

(7) $\operatorname{tg}\alpha=11.47$;　　(8) $\operatorname{ctg}\alpha=8.144$.

5. 求下列各式的值:

(1) $2\cos 31°12'+4\cos 45°+\operatorname{tg}32°6'$;

(2) $\operatorname{tg}78°48'-\operatorname{ctg}49°50'$.

6. (1) 把$\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{2}$写成两个銳角的正弦的差的形式;

(2) 把$\frac{1}{2}\cos\beta+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\beta$写成$\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha$的形式。

7. 如果已知下列銳角α的三角函数值，α可以有怎样的大小?

(1) $\sin\alpha<\frac{1}{2}$;　(2) $\sin\alpha>\frac{1}{2}$;　(3) $\cos\alpha<\frac{1}{2}$;

(4) $\operatorname{tg}\alpha<1$;　(5) $\operatorname{ctg}\alpha>1$.

8. (1) 銳角α取哪些值的时候，$\sin\alpha-\frac{1}{2}$是正的、是負的、等于零?

(2) 銳角α取哪些值的时候，$\operatorname{tg}\alpha-\sqrt{3}$是正的、是負的、等于零?

9. 不用查表判断下列各式的符号:

(1) $\sin 42°72'-\sin 74°$;　(2) $\cos 2°-\cos 75°$;

(3) $\cos 28°-\cos 63°50'$;　(4) $\operatorname{tg}78°-\operatorname{tg}23°$;

(5) $\operatorname{ctg}78°-\operatorname{ctg}23°$;　(6) $\operatorname{ctg}28°-\operatorname{ctg}58°45'$.

10. 求适合于下列各式的0°到90°間的角:

(1) $2\cos x=1$;　(2) $1-\sqrt{2}\sin x=0$;

(3) $\operatorname{tg}^2 x-(1+\sqrt{3})\operatorname{tg}x+\sqrt{3}=0$.

71. 角的概念的推广　任何一个角AOB，我們可以把它看成

是由一条直綫从 OA 的位置开始，繞着頂点 O，旋轉到 OB 而形成的（图 91），旋轉前的位置（OA），叫做角的**始边**，旋轉終止的位置（OB），叫做角的**終边**.

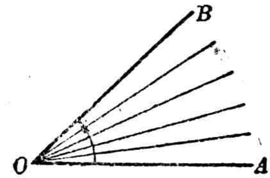


图 91

直綫还沒有旋轉的时候，所得的角是 $0°$，如果直綫繞着 O 点旋轉，那末形成的角 AOB 就逐渐增大，依次得到銳角，$90°$ 的角，鈍角，$180°$ 的角等等；如果直綫継續旋轉，那末就得到大于 $180°$ 的角，例如 $181°$、$182°$、$270°$，$300°$ 等等；当直綫繞过一圈而又与 OA 重合的时候，所得的角就等于 $360°$.

如果直綫継續旋轉而超过一周，就得到大于 $360°$ 的角.

一个角，旣可以看作直綫按照图 91 所表示的方向旋轉而形成，也可以看作沿着相反的方向旋轉而形成．例如，相互銜接的两个具有同样半徑的齿輪，在轉动的时候，按照相反的方向旋轉，其中一个旋轉某一个角，另一个也旋轉同样的角，但是方向相反．（图 92）

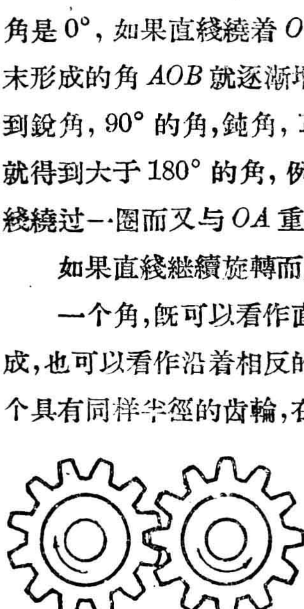


图 92

平面里两个相反的旋轉方向，如果一个取正，那末，另一个就作为負．为了确定起見，我們規定：按照反时針方向旋轉所得的角是正的角；按照順时針方向旋轉所得的角是負的角．例如，在图 92 里，右边的一个齿輪轉动时所得的角是正的；左边的一个齿輪轉动时所得的角是負的.

这样，我們所遇到的角，除銳角、鈍角、大于 $180°$ 的角（角 α）、大于 $360°$ 的角（角 β）以外，还有負角（角 γ）．（图 93）

对于有相同的始边和終边的两个角，如果不指明它們是旋轉几周以及按照什么方向（正方向还是負方向）旋轉而得来的时候，

我們就无法确定它們是不是相等或者哪一个較大．事实上，象角 30°、390°、750°、-330°、-690°、等等，当它們的始边相同的时候，它們的終边都是相同的（图 94）．但是，因为 $390^\circ=360^\circ+30^\circ$，$750^\circ=2\cdot360^\circ+30^\circ$，$-330^\circ=(-1)\cdot360^\circ+30^\circ$，$-690^\circ=(-2)\cdot360^\circ+30^\circ$，……，所以說，它們都可以用 360° 的整倍数加上或者减去 30° 而得到．

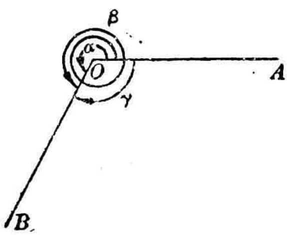


图 93

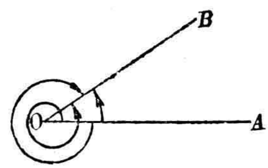


图 94

一般地說，角 $k\cdot360^\circ+\alpha$（k 是正整数，負整数或者零）和角 α 如果始边相同，那末它們的終边是相同的．

72．任意角三角函数的定义 我們知道，对于任何一个銳角 α，可以用它所在的直角三角形的两边的比来定义它的三角函数．如果 $\alpha>90^\circ$，那末，用 α 角当做內角的直角三角形是不存在的．

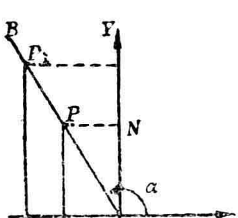


图 95

設 P 是 α 的終边 OB 上的任意一点，在制图里我們已經知道，由 P 向 y 軸和 x 軸分别作垂綫 PN 和 PM，那末 ON 和 OM，就分别表示 OP 在 y 軸上和 x 軸上的正投影．在数学里，我們通常把正投影叫做射影．（图 95）

如果 N 在 y 軸的正方向上，我們就說，OP 在 y 軸上的射影是正的；如果 N 在 y 軸的負方向上，我們就

說，OP 在 y 軸上的射影是負的. 至于 OP 在 x 軸上的射影是正是負，也可以根据 M 点的位置来决定.

我們可以看到，OP 在坐标軸上的射影是随着角 α 的变化而变化的. 当 α 取固定的值的时候，OP 在坐标軸上的射影也相应地确定. 由此可以知道，比值：

$$\frac{OP\text{ 在 }y\text{ 軸上的射影}}{OP}=\frac{ON}{OP}=\frac{y}{r};\quad (r\text{ 表示 }OP\text{ 的长})$$

$$\frac{OP\text{ 在 }x\text{ 軸上的射影}}{OP}=\frac{OM}{OP}=\frac{x}{r};$$

$$\frac{OP\text{ 在 }y\text{ 軸上的射影}}{OP\text{ 在 }x\text{ 軸上的射影}}=\frac{ON}{OM}=\frac{y}{x};$$

$$\frac{OP\text{ 在 }x\text{ 軸上的射影}}{OP\text{ 在 }y\text{ 軸上的射影}}=\frac{OM}{ON}=\frac{x}{y}$$

都是角 α 的函数. 我們把它們依次分別叫做**任意角 α 的正弦函数、余弦函数、正切函数、余切函数**，总称为**三角函数**. 它們与 α 是銳角时候的三角函数用同样的符号来表示.

我們可以看到，当 α 是銳角的时候，这个定义也是成立的. 因为 $ON=MP$，$OM=NP$(图 96)，并且 $\triangle OMP$ 是直角三角形，所以

$$\sin\alpha=\frac{ON}{OP}=\frac{MP}{OP}=\frac{\text{对边}}{\text{斜边}};$$

$$\cos\alpha=\frac{OM}{OP}=\frac{\text{邻边}}{\text{斜边}};$$

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{ON}{OM}=\frac{MP}{OM}=\frac{\text{对边}}{\text{邻边}};$$

$$\operatorname{ctg}\alpha=\frac{OM}{ON}=\frac{OM}{MP}=\frac{\text{邻边}}{\text{对边}}.$$

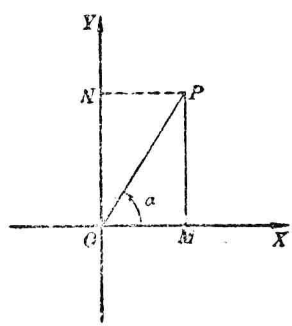


图 96

除了上面指出的四个函数以外，有时我們还会遇到另外两个函数，就是：

$$\sec\alpha=\frac{OP}{OM}=\frac{r}{x}$$，这叫做 α 的**正割函数**；

$$\csc\alpha=\frac{OP}{ON}=\frac{r}{y}$$，这叫做 α 的**余割函数**。

但是，因为这两个函数不常用到，所以我們不专門研究它們。

所有具有相同的始边和終边的角，如果始边在 x 軸上，OP 在坐标軸上的射影都是相同的。因此，根据三角函数的定义，我們很明显地可以知道，这些角的各个三角函数值是相同的，也就是 $\sin(k\cdot 360°+\alpha)=\sin\alpha$，$\cos(k\cdot 360°+\alpha)=\cos\alpha$ 等等。例如：

(1) $\sin 765°=\sin(2\cdot 360°+45°)=\sin 45°=0.7071$；

(2) $\cos(-330°)=\cos(-360°+30°)=\cos 30°=0.8660$。

根据 OP 在坐标軸上的射影的正負，以及三角函数的定义，我們可以知道，正弦和余割对于終边在第一、二象限的角是正的，对于終边在第三、四象限的角是負的；余弦和正割对于終边在第一、四象限的角是正的，对于終边在第二、三象限的角是負的；正切和余切对于終边在第一、三象限的角是正的，对于終边在第二、四象限的角是負的。

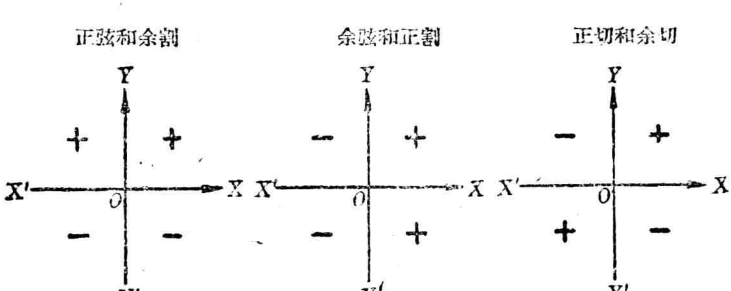


图 97

上面所説的各个三角函数值的符号，可以从图 97 里清楚地看出来。

例 确定下面各个角的三角函数值的符号：

(1) $120°$； (2) $245°$.

解 (1) $\because$ $90°<120°<180°$,

$\therefore$ $120°$ 角的終边在第二象限里（也可以叫做第二象限角）

$\therefore$ $\sin 120°>0$;

$\cos 120°<0$;

$\operatorname{tg} 120°<0$.

(2) $\because$ $180°<245°<270°$,

$\therefore$ $245°$ 角的終边在第三象限里。

$\therefore$ $\sin 245°<0$;

$\cos 245°<0$;

$\operatorname{tg} 245°>0$.

很明显的，当角的終边分别落在 x 軸的正方向、y 軸的正方向、x 軸的負方向、y 軸的負方向的时候，它的正弦函数值就分别是 0、1、0、-1；它的余弦函数值分别是 1、0、-1、0；它的正切函数值分别是 0、不存在、0、不存在；它的余切函数值分别是不存在、0、不存在、0；它的正割函数值分别是 1、不存在、-1、不存在；它的余割函数值分别是不存在、1、不存在、-1.（图 98）

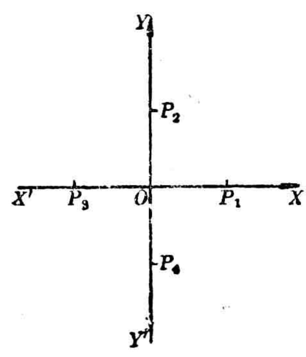


图 98

$0°$ 与 $360°$ 間的这些角的三角函数值，可以列成下表：

三角函数 \ 角	0°	90°	180°	270°
$\sin\alpha$	0	1	0	-1
$\cos\alpha$	1	0	-1	0
$\operatorname{tg}\alpha$	0	不存在	0	不存在
$\operatorname{ctg}\alpha$	不存在	0	不存在	0

73. 三角函数的簡化公式 我們知道，0° 到 90° 的三角函数值是能够直接从三角函数表里查到的. 但是，大于 90° 的角和負角的三角函数值，就不能够直接从三角函数表里查得. 为了解决这个問題，我們有必要来研究怎样把一个任意角的三角函数化成銳角三角函数.

从上面一节里我們知道，任何一个角的三角函数值都可以化成 0° 到 360° 范圍以內的角的三角函数值，因此我們只要研究怎样把 0° 到 360° 范圍以內的角的三角函数值化为銳角三角函数值就行了.

首先，对于任意一个大于 90°、小于 180° 的角，我們都可以找到一个銳角 α，使这个角可以表达为 $180°-\alpha$ 的形式（图 99），例如，$135°=180°-45°$，$166°=180°-14°$ 等等. 我們在 α 角的終边上取一点 P'，使 $OP'=OP$，那末 P 与 P' 关于 y 軸对称. 如果設 OP 在坐标軸上的射影分别是 x, y, OP' 在坐标軸上的射影分别是 x', y'. 那末

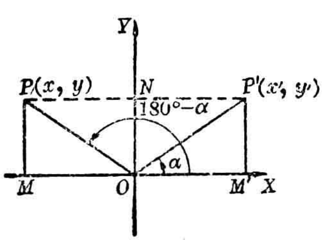


图 99

$$x=-x',\ y=y'.$$

因此

$$\sin(180°-\alpha)=\frac{y}{r}=\frac{y'}{r}=\sin\alpha;$$

$$\cos(180°-\alpha)=\frac{x}{r}=\frac{-x'}{r}=-\cos\alpha;$$

$$\operatorname{tg}(180°-\alpha)=\frac{x}{y}=\frac{-x'}{y'}=-\operatorname{tg}\alpha;$$

$$\operatorname{ctg}(180°-\alpha)=\frac{y}{x}=\frac{y'}{-x'}=-\operatorname{ctg}\alpha.$$

同样的，当角是 $180°+\alpha$ 的时候，P 与 P' 关于原点 O 对称(图 100)。这时

$$x=-x',\ y=-y'.$$

因此

$$\sin(180°+\alpha)=-\sin\alpha;$$

$$\cos(180°+\alpha)=-\cos\alpha;$$

$$\operatorname{tg}(180°+\alpha)=\operatorname{tg}\alpha;$$

$$\operatorname{ctg}(180°+\alpha)=\operatorname{ctg}\alpha.$$

当角是 $360°-\alpha$ 的时候，P 与 P' 关于 x 轴对称(图 101)。

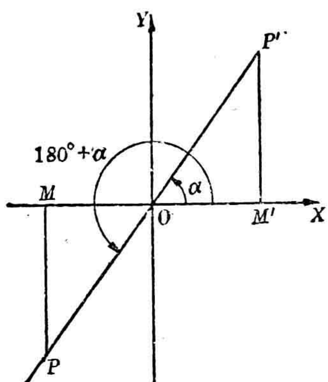


图 100

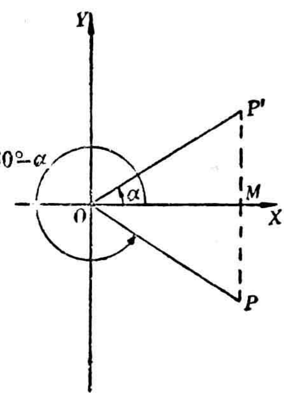


图 101

这时

$$x=x',\ y=-y'.$$

因此
$$\sin(360°-\alpha)=-\sin\alpha;$$
$$\cos(360°-\alpha)=\cos\alpha;$$
$$\operatorname{tg}(360°-\alpha)=-\operatorname{tg}\alpha;$$
$$\operatorname{ctg}(360°-\alpha)=-\operatorname{ctg}\alpha.$$

总結上面所得到的結果，可以得到：

$180°\pm\alpha$, $360°-\alpha$ 的三角函数的絕对值等于銳角 α 的同函数的絕对值，符号就是原来的角所在的象限內原函数的符号.

例 求下列各三角函数的值：

解 $\sin 295°=\sin(360°-65°)=-\sin 65°=-0.9063;$

$\cos 107°=\cos(180°-73°)=-\cos 73°=-0.2924;$

$\operatorname{tg} 251°=\operatorname{tg}(180°+71°)=\operatorname{tg} 71°=2.904;$

$$\begin{aligned}\operatorname{ctg}1000°&=\operatorname{ctg}(2\cdot 360°+280°)=\operatorname{ctg}280°\\&=\operatorname{ctg}(360°-80°)=-\operatorname{ctg}80°\\&=-0.1763.\end{aligned}$$

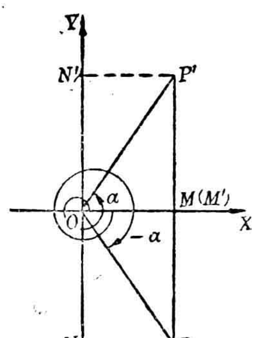


图 102

現在我們再研究負角的三角函数.

設 $-\alpha$ 是任意的負角(图 102)，那末 α 就是与它的絕对值相等的正角. 从图上可以看出，它們是关于 x 軸对称的. 所以我們得到：

$$\sin(-\alpha)=-\sin\alpha;$$
$$\cos(-\alpha)=\cos\alpha;$$
$$\operatorname{tg}(-\alpha)=-\operatorname{tg}\alpha;$$
$$\operatorname{ctg}(-\alpha)=-\operatorname{ctg}\alpha.$$

这就是說，$-\alpha$ 的三角函数的絕对

值等于正角α的三角函数的絕对值，符号就是原函数的第四象限角的符号.

前面所講的几个公式以及在小学里学到的 $90°-\alpha$ 的三角函数(图 103)的公式，不仅当α是銳角的时候适用，而且当α是任意角的时候都适用.

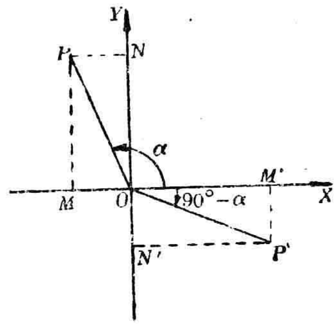


图 103

习 題 十 六

1. 作出下列各角：450°；−150°.

2. 求下列各角所在的象限：

(1) 510°；　　(2) −30°；

(3) $2\times360°+60°$；　　(4) $(-3)\times360°+150°$；

(5) $n\cdot360°+315°$. ($n=0, \pm1, \pm2, \pm3, \cdots\cdots$)

3. 时鐘的分針旋轉所成的角是正的还是負的？經过下列时間所成的角是多少度？

(1) 40分鐘；(2) $1\frac{1}{2}$小时；(3) 2小时10分鐘.

4. 在半徑等于12厘米的輪子的边緣上有一点，求这点繞着圓心旋轉1500°所經过的距离.

5. 机器的軸在3分鐘內旋轉9000轉，平均每秒鐘轉多少度？

6. 用一般形式写出和下列各角終边相同的一切角：

(1) 60°；(2) −135°；(3) 240°；(4) −270°.

7. 写出和下列各角終边相同的0°到360°的角：

(1) 750°；(2) −420°；(3) −585°.