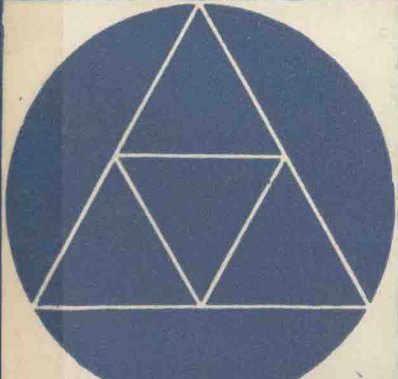
中学教师《专业合格证书》数学教材

SHUXUE

数学分析

下　册

杨守廉　主编



北京师范学院出版社

中学教师《专业合格证书》数学教材

数学分析

（下　　册）

杨守廉　主编

北京师范学院出版社

1988年·北京

内容提要

本书是根据国家教委师范司制定的中学教师《专业合格证书》数学教学大纲组织编写的。

本书分上、下两册，下册包括定积分、定积分的应用、数项级数、函数项级数、多元函数及其连续性、多元函数微分学、重积分等内容。

中学教师《专业合格证书》数学教材
数学分析
下　册
杨守廉　主编

北京师范学院出版社
（北京阜成门外花园村）
新华书店首都发行所发行　　国防工业出版社印刷厂印刷
开本787×1092 1/32　印张14.75　　字数327千
1988年3月第1版　　1988年3月第1次印刷
印数：1—63000

ISBN 7-81014-056-6/G·55
统一书号：7427·181

定　　价：2.60

目录(下册)

第九章 定 积 分

在前一章不定积分中，我们讨论了积分学的第一个基本问题，已知函数的导数，求原函数。本章将要讨论积分学中的第二个基本问题，如何求封闭曲线所包围的图形的面积，进一步抽象化便是如何求一个函数的定积分的问题。最典型的求面积问题要数求圆的面积了。大家知道，求圆面积、圆周长的研究有很长的历史，两千多年前的古希腊时代，就出现了阿基米德[1]用简单的六边形一直到96边形去逼近圆以计算圆周长、圆面积和圆周率的工作。他计算出圆周长和直径之比（圆周率）是一个介于$3\frac{10}{71}$和$3\frac{10}{70}$之间的数。我国古代数学家刘徽[2]在他的《九章算术注》中用它的“割圆术”计算出圆周率是3.14，以后又进一步得到更精确的值3.1416.

到了17世纪，欧洲主要资本主义国家的工业、商业已经发展起来，科学技术也相应地发展到空前的高度。许多科学家的思想已非常接近微积分的发明。最后，牛顿[3]与莱布尼兹[4]互相独立又各具特色地阐明了微积分概念，特别是发现了求定积分（求面积等）与求不定积分之间的关系。这便是本章§9.4中以牛顿-莱布尼兹命名的定理9.19。定积分和

[1] 阿基米德（Archimedes，公元前287—212），古希腊学者。

[2] 刘徽（公元三世纪魏晋时人），中国数学家。

[3] 牛顿（Newton，1643—1727），英国物理学家、数学家。

[4] 莱布尼兹（Leibniz，1646—1716），德国数学家、哲学家。

不定积分之间这种关系的发现通常被认为是“发明”微积分的重要标志。它使微积分学真正成为解决实际问题的有力工具。

既然定积分的概念起源于面积和体积的计算，而面积、体积的概念和计算又是中学数学的一个重要部分，我们有必要从面积的基本概念开始研究。

§9.1　面积的概念和计算、定积分定义

一、多边形面积的概念和计算

中学几何中的面积概念是：“多边形的面积，就是它所围的平面部分的大小，大小是用数来表示的。要表示一个多边形的面积，和度量线段时一样，必须取一个单位，然后看这个多边形所围平面部分是单位的多少倍，这个倍数就是面积的数值”。（人民教育出版社出版的初中课本《几何》第一册 1983 年版 p.206）

依照这个定义，我们首先须取定一个面积单位。以单位长为边长的小正方形，称为单位正方形，然后用“度量线段”一样的办法去度量多边形。那么，线段究竟是怎样度量的呢？中学几何课程中也没有给出完整的方法。下面作一简述。

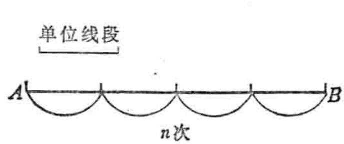


图　9-1

设线段 AB 是被度量的。首先要确定一个单位线段，然后沿线段 AB，自 A 点开始，依次截取单位线段长，如果截取 n 次恰好到达 B 点，即正好量尽（见图9-1），则认为线段 AB 的长

$$l_{AB}=n\text{（个单位）。}$$

如果量不尽，譬如量 n 次不到 B 点，量 $n+1$ 次却超过了 B 点，这就要分两种情况考虑。

（1）单位线段与线段 AB 可公度。这就是说存在自然数 m，把单位线段 m 等分，以其中的一份为单位去度量线段 AB，正好量 n 次量尽（见图9-2）。此时，我们认为线段 AB 的长

$$l_{AB}=\frac{n}{m}\text{（个单位）。}$$

（一般来说，两个线段称为可公度，是指存在另外一个线段，用它去度量这两个线段都能量尽）也就是说，线段的长度是一个有理数。

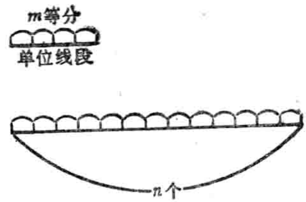


图 9-2

（2）单位线段与线段 AB 不可公度。就是说不论怎样等分单位线段，拿等分中的一份去度量线段 AB，都不能量尽。

首先，以单位线段为单位去度量 AB，因为量不尽，量 m 次得点 A_1，A_1 在 B 点的左边，就称 A_1 为不足点；量 $m+1$ 次得点 B_1，B_1 在 B 的右边，就称 B_1 为过剩点。

再把单位线段 2 等分，用其中一份为单位去度量 AB。因为量不尽，得不足点为 A_2，过剩点为 B_2。

一般地把单位线段 2^n 等分，用其中一份为单位去度量 AB，因为量不尽，得不足点为 A_n，过剩点为 B_n（见图9-3）。

读者不难发现，如果用 l_{AA_n}，l_{AB_n} 分别表示线段 AA_n，AB_n 的长度（它们是可用单位线段的等分段量尽的，因此长度已有定义），则

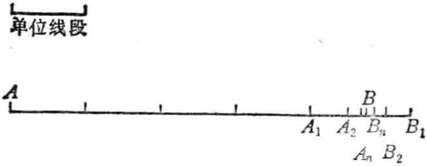


图 9-3

$$[l_{AA_1}, l_{AB_1}], [l_{AA_2}, l_{AB_2}], \cdots, [l_{AA_n}, l_{AB_n}], \cdots$$

是一区间套。据定理 4.23，存在唯一的实数 c，属于所有 $[l_{AA_n}, l_{AB_n}]$。我们就把 c 定义为 AB 的长度，即

$$l_{AB} = c.$$

现在回到多边形面积的度量问题中来。

首先用单位面积去度量矩形 $ABCD$，度量的方法应该象度量线段那样，紧贴在底线 AB，左端线 AD，依次逐个累堆单位正方形。假如矩形的长和宽分别是单位长的整数倍，设长为 n（个单位），宽为 m（个单位），那么度量的结果显然是：矩形 $ABCD$ 中正好包括 $m \cdot n$ 个单位正方形（如图 9-4 所示）。于是我们认为矩形 $ABCD$ 的面积

$$S_{ABCD} = m \cdot n \text{（个面积单位）}.$$

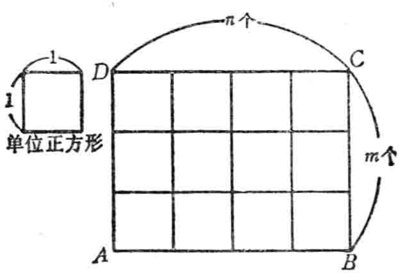


图 9-4

如果矩形的长和宽不是单位线段的整数倍。那又该如何去度量呢？中学几何课本中没有阐明，而是避开了这一问

题，给出了本应证明的一个命题作为公理：

命题9.1 矩形面积等于它的长 a 和宽 b 的积 ab。

在原则上，矩形面积的度量的方法与度量线段类似，但作一般叙述时过于烦杂，我们采用具体例子说明的办法。度量的基本方法和证明命题 9.1 的途径在下面的陈述中将给予阐明。

（1）矩形的长和宽都是有理数。例如 $a=4\frac{1}{5}$，$b=3\frac{1}{2}$，即 $a=\frac{42}{10}$，$b=\frac{35}{10}$。

此时用面积单位去丈量显然是量不尽的，要改用更小的单位。因为所给例子中长和宽是可公度的，其长度是以10为分母的有理数，我们可以$\frac{1}{10}$为边长的小正方形为单位去丈量。设例中给出的矩形是 $ABCD$（图 9-5）。即将底边AB $\left(\text{长为 } a=\frac{42}{10}\right)$分成 42 等分，高$AD$分成 35 等分。过$AB$，$AD$的每一个分点作$AD$，$AB$的平行线，这两组平行线将矩形 $ABCD$ 分成 42×35 个小正方形，每个小正方形都是以$\frac{1}{10}$为边长，它是单位正方形的$\frac{1}{100}$，因此我们说，矩形$ABCD$的面积

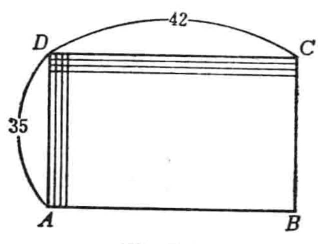


图 9-5

$$S_{ABCD}=42\times35\times\frac{1}{100}=4\frac{1}{5}\times3\frac{1}{2}\text{(单位面积)}.$$

（2）矩形的长和宽都是无理数。例如 $a=\sqrt{3}$ $b=\sqrt{2}$。

取无理数$\sqrt{3}$和$\sqrt{2}$的不足近似值和过剩近似值，见表9-1。

表 9-1

精确度		0.1	0.01	0.001	0.0001	……
$\sqrt{3}$的	不足近似值	1.7	1.73	1.732	1.7321	……
	过剩近似值	1.8	1.74	1.733	1.7322	……
$\sqrt{2}$的	不足近似值	1.4	1.41	1.414	1.4142	……
	过剩近似值	1.5	1.42	1.415	1.4143	……

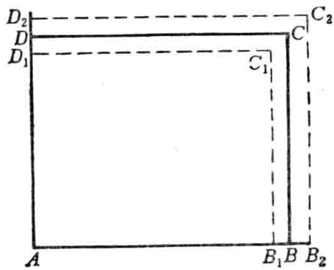


图 9-6

如图 9-6 在矩形$ABCD$底AB及延长线上，分别取B_1和B_2，使$AB_1=1.7$，$AB_2=1.8$，即使AB_1和AB_2的长度分别为$\sqrt{3}$的精确度都是 0.1 的不足近似值和过剩近似值。

同前，在高AD的延长线上，分别取D_1和D_2，使$AD_1=1.4$，$AD_2=1.5$，即使AD_1和AD_2的长度分别为$\sqrt{2}$的精确度都是 0.1 的不足近似值和过剩近似值。

这样得到了底边和高都是有理数的矩形$AB_1C_1D_1$和矩形$AB_2C_2D_2$，由（1）的论证可知它们的面积分别是

$$S_{AB_1C_1D_1}=1.7\times1.4,$$

$$S_{AB_2C_2D_2}=1.8\times1.5,$$

又从图 9-3 可以看出，矩形$ABCD$的面积S_{ABCD}应满足

$$S_{AB_1C_1D_1}<S_{ABCD}<S_{AB_2C_2D_2}.$$

因此有

$$1.7\times1.4<S_{ABCD}<1.8\times1.5,$$

同理，有

$$1.73\times1.41<S_{ABCD}<1.74\times1.42,$$

$$1.732\times1.414<S_{ABCD}<1.733\times1.415,$$

$$1.7321\times1.4142<S_{ABCD}<1.7322\times1.4143,$$

$$\cdots\qquad\cdots\qquad\cdots$$

容易看出以上述不等式左右两端为端点的闭区间序列，即以$\sqrt{2}$，$\sqrt{3}$的不足近似值之积与过剩近似值之积为左右端点的闭区间序列是一个退缩闭区间套，从而据定理 4.15（实数连续性），存在唯一实数 c 属于闭区间套中的所有闭区间。而据前面的分析，矩形$ABCD$之面积也理应属于闭区间套之所有闭区间，于是我们自然地把实数c定义为矩形$ABCD$之面积。另一方面，据定义 4.14 知 $c=\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}$。因此有

$$S_{ABCD}=\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}.$$

以上通过具体例子说明了度量矩形面积的方法，并说明了命题 9.1 的证明途径，解决了矩形面积的定义和计算问题。

解决了矩形面积的确定和计算以后，便可用割补的方法计算出平行四边形、三角形、梯形的面积。这种割补的方法在中学已经熟知，不在这里赘述了。

因为任意一个多边形都可划分为若干个三角形、梯形、矩形（如图 9-7 所示），因此我们就能计算任意多边形的面积了。

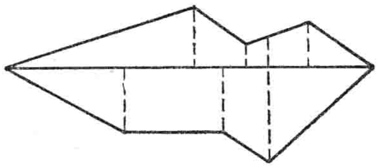


图 9-7

二、曲边梯形的面积和变速直线运动路程计算

上一小节讲了多边形面积的概念和计算。对于那些以曲线为边界的平面图形又该如何处理呢？我们把两边同垂直于第三边而第四边为曲线（可由函数 $y=f(x)$ 表达的曲线）的图形（见图 9-8）称为曲边梯形。每个由曲线围成的图形都可分解为若干曲边梯形，例如在图 9-9 中，可把所示的曲边形分解为：

AEA，ABF，$BDEF$，BCB，BCD，等曲边梯形。不

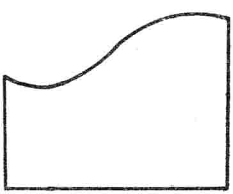


图 9-8

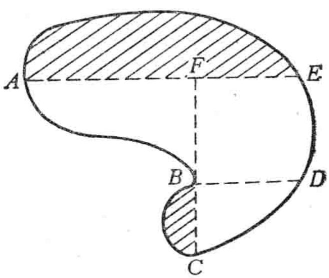


图 9-9

过其中除 $BDEF$ 是地道的曲边梯形外，其余都是一些“退化”了的特殊曲边梯形。AEA，BCB（即图中阴影部分）

曲边梯形的两条平行边都退缩成了点 A，E 和 B，C；在曲边梯形 ABF 和 BCD 中，有一条边退缩成一点，所以也可以说是曲边三角形。

由于由曲线围成的图形都可分解成若干个曲边梯形，因此只要解决了曲边梯形的求积问题，其它曲线形的面积也就会计算了。

把曲边梯形置入坐标系中，它的两条平行边所在直线分别是 $x=a$ 与 $x=b$，底边所在直线为 $y=0$，曲边为 $y=f(x)$（见图9-10）。

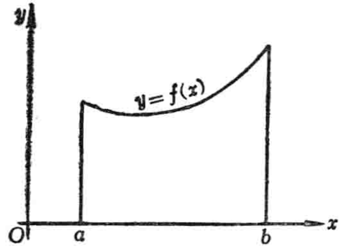


图 9-10

我们面临的问题是给出曲边梯形面积的定义和计算方法。

首先把曲边梯形的底边，x 轴上的闭区间〔a，b〕分成若干份，分点为：x_1，x_2，…，x_{n-1}（图 9-11），为了方便起见，令 $x_0=a$，$x_n=b$。这样

$$a=x_0<x_1<\cdots<x_{n-1}<x_n=b.$$

这些分点确定了〔a，b〕的一个划分，记作 T。

划分 T 把〔a，b〕分成了几个小区间

$$[x_0,\ x_1],\ [x_1,\ x_2],\ \cdots,$$
$$[x_{i-1},\ x_i],\ \cdots,\ [x_{n-1},\ x_n]$$

第 i 个小区间〔x_{i-1}，x_i〕的长表示为 $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$（$i=1$，2，…，$n-1$）。过每个分点 x_i 作 x 轴的垂线，这些垂线与曲线 $y=f(x)$ 相交，将曲边梯形分成 n 个小曲边梯形。

在第 i 个小区间〔x_{i-1}，x_i〕上任取一点 ξ_i（$x_{i-1}\leqslant\xi_i\leqslant x_i$），

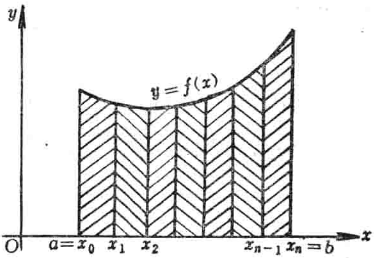


图 9-11

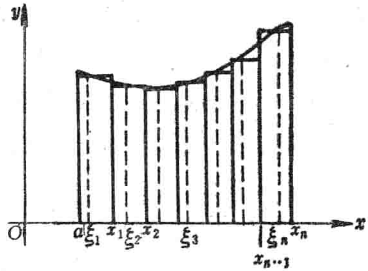


图 9-12

从图 9-12可以看出，以 $f(\xi_i)$ 为长以 Δx_i 为宽的矩形面积 $f(\xi_i)\Delta x_i$ 与第 i 个小曲边梯形的面积非常近似。(图 9.12) 把 n 个矩形面积加起来，和

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

是曲边梯形面积值很好的近似。显然，如果对[a，b]的划分越来越细，那么不论ξ_i怎么选取，$\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ 应该越近似于曲边梯形的面积。但是，不论分得多么细，“以直代曲”，即以小矩形面积代替小曲边梯形面积所得的和总是近似值，而非曲边梯形的精确值。只有把细分的过程无限继续下去，即应用极限方法才能得曲边梯形的精确值。

令

$$l(T)=\max\{\Delta x_1,\ \Delta x_2,\ \cdots,\ \Delta x_n\},$$

$l(T)\to 0$ 就相当于将区间无限分下去，使每个小区间的长都趋近于零。

根据上述分析，曲边梯形的面积可定义如下：如果当