Situation Analysis and Trick Theory on Games with Entropy

(The Second Volume)

带熵博弈的局势分析学与计策理论

（下册）

姜殿玉(Dianyu Jiang) 著

科学出版社

国家科学技术学术著作出版基金资助

带熵博弈的局势分析学与计策理论

(下册)

Situation Analysis and Trick Theory on Games with Entropy

(The Second Volume)

姜殿玉(Dianyu Jiang)　著

科学出版社

北　京

前　言

搞科学如同淘金. 我作为一位“淘金者”仅仅证明了这里有“金沙”. 如果说我已经淘到了一点“金沙”, 也仅仅是因为这里还没有人来“淘”它. 下手越早, 越容易淘到“金沙”, 但是搞科学又不同于“淘金”, 因为第一个“淘金者”—— 我没有能力也不希望独吞这块宝地, 反而希望一方面有大批人马一道来这里“淘金”, 另一方面有大批人马来“炼金”(真金在冶炼, 真理靠争鸣), 而且炼出来的“真金”归人类科学宝库所有.

本书选题和研究的十几年来的“淘金”历程可分为三部曲. 第一步是从 1995 年开始的所谓“数理谋略论”的研究. 那时大约发表了 30 篇论文. 后经初步整理, 于 2003 年出版了专著《数理谋略论 —— 对策上的计策理论》. 但在研究中发现, 一般情况下“佯策略”集合和“隐蔽策略”集合的基数都是大于 1 的. 这就产生了如何进一步从中选优, 以图达到精炼这些策略的问题. 这个问题困扰着我很长一段时间. 真是“苍天有眼”, 有一次浏览文献时, 突然发现了随机变量的信息熵问题, 它立即引起了我的注意 (虽然很早以前就知道这方面的知识, 但是知道归知道, 并未引起注意), 于是我又将全部精力投入到信息熵问题的学习和研究. 我阅读了很多国内外的信息论和编码理论方面的读物. 于 2004 年又将方向转为所谓“带熵博弈论”的研究. 在国内外发表了这个方向的研究论文大约 20 余篇, 并于 2008 年在科学出版社出版了我的第二部专著《带熵博弈论及其应用》, 并主持了江苏省高校自然科学计划指导项目“对策的计策与信息熵理论”(05KJD110027), 此即上述提到的“三部曲”中的第二部. 接着我又进入简单而又典型的“双行动带熵博弈论 (即每个局中人都恰有两个行动的博弈)”的研究, 于 2009 年, 我主持的与此相关的课题“n 人双行动理性对策及均衡分析与实际案例研究”又获得了国家自然科学基金的资助 (70871051), 于是进入“三部曲”中的第三部. 这部分工作目前大约在国内外发表了和待发表 16 篇论文, 并于 2010 年在美国的 Science Press USA Inc 出版了第三部专著《Analysis of Situation for n-Person Double action Games》.

“奏”完了这“三部曲”, 就可以在已有的研究成果的基础上, 进行更深入、更系统的研究了. 这就是这部专著的写作意图. 其写作路线是将这部专著分为如下新“三部曲”: 第一部曲是基础部分 (即本书第一部分, 第二部分和第三部分), 其中又包括三方面的内容: 第一是研究中所涉及的经典博弈论内容, 第二是博弈的判断理论, 第三是随机变量的信息熵与极大熵、极小熵原理. 第二部曲是“带熵博弈论”的主干部分 (即本书的第四部分). 这部分内容是将信息熵、极大熵和极小熵原理加入

到经典博弈体系中作为局中人的共同知识而得到新的博弈系统. 第三部曲是专题部分 (即本书的第五、六和七部分). 其中第五部分是双行动带熵博弈的局势分析学, 第六、七部分属于带熵博弈上的计策理论. 目前的 “数理谋略论” 部分要比最初时更完备了, 因为它已经建立在 “带熵博弈论” 基础之上了, 以前遗留下来的问题已经得到了很好的解决. 因此可以说这部专著是我十几年来的心血结晶.

然而 “结晶” 不等于高纯度 “真金”. 本书的 “出笼” 一方面或许给读者带来了几颗 “金沙” 以证明这里有 “金”, 另一方面也给读者带来了许多 “淘金” 和 “炼金” 的问题. 例如数学家们能否从数学角度上严格地证明 3 人双行动带熵博弈的局势分析学中的若干个熵函数不等式? 软件工作者能否给出书中若干算法的计算机实现? 熵论工作者能否进一步研究我在第 7 章给出的连续型随机变量的信息熵? 博弈论工作者能否继续深入地研究 4 人以上双行动带熵博弈的局势分析问题? 等等. 我谨通过本书的 “出笼”, 来企盼着更多的有识之士、能人志士来这里 “淘金” 和 “炼金”, 其中 “炼金” 的一项重要内容就是煅烧掉含在本书中的 “杂质”—— 理论中的瑕疵甚至谬误.

衷心感谢国家科学技术学术著作出版基金 (2011-G-001) 和国家自然科学基金 (70871051) 的资助. 感谢淮海工学院学术专著出版基金的资助. 我国德高望重的博弈论老前辈张盛开教授、俞建教授和刘德铭教授曾对我的工作给予过有价值的指导和支持. 感谢北京理工大学经济管理学院张强教授、青岛大学高红伟教授、西北工业大学孙浩教授和中国海洋大学方奇志教授等的支持和帮助. 日本的松久隆博士数次来到中国与我进行面对面的学术交流和探讨, 也常通过电子邮件进行交流. 淮海工学院的领导和同事们为我的学术研究工作提供了方便, 使我能有更多的时间和精力从事学术研究工作. 借此机会一并致以衷心的感谢!

姜殿玉
2012 年 1 月于连云港市
Email: jiangdianyu425@126.com

目　录

第六部分　零和博弈的公平性和刺激性

第七部分　带熵博弈的计策理论

第五部分　双行动带熵博弈的局势分析学

作为本书的专题部分之一，本部分研究双行动带熵博弈的局势分析学，即在全体局中人都偏爱信息熵最小的局势的前提下，研究每个局中人都恰有两个纯策略的二人和三人正规博弈中边际分布恰是唯一完全混合 Nash 均衡的相关均衡的求解问题及其应用.

本部分由第 14~21 章共 8 章组成. 其中第 14 章研究 n 人双行动博弈的对称性判别与 0-1 编号法，其目的是将双行动博弈的局势表示为二进制数，即形成所谓 0-1 博弈. 第 15 章研究 n 人 0-1 博弈的严格纯 Nash 均衡和期望均衡与期望均衡分析. 第 16 章研究 n 人 0-1 博弈的完全混合 Nash 均衡的求解法以及对称 0-1 博弈这一问题的反问题 —— 由给定的完全混合 Nash 均衡求其 0-1 博弈族. 第 17 章研究二人 0-1 博弈的局势分析学. 第 18 章研究三人 0-1 博弈的局势分析学. 作为应用，第 19 章给出二人和三人双行动博弈的局势分析应用举例. 作为应用的专题研究 —— 智猪博弈公理化的初步 —— 大猪和小猪踏出的猪食量和所付出的成本一致条件下，两猪的行为及应用问题，第 20 章研究 Rasmusen 智猪公理系统与 Rasmusen 技术创新博弈，第 21 章研究和平–强成本公理智猪博弈系统与一般技术创新博弈.

第 14 章　n 人双行动博弈的对称性判别与0-1 编号法

第 14~19 章的内容基于文献 [1]. 这部分内容专门讨论每个参与人都恰有两个纯策略的带有信息熵成分的策略博弈, 所以称为*双行动带熵博弈*.

在许多文献中, 为说明方便, 常举囚徒困境、性别战、斗鸡博弈 (或称鹰–鸽博弈)、胆小鬼博弈、智猪博弈、富人–穷人巡逻博弈等例子. 这些例子都属于最简单最基本的正规型博弈, 博弈仅有 2 个局中人, 每个局中人都恰有 2 个纯策略, 此即 2×2 双矩阵博弈.

如果将 2×2 双矩阵博弈加以扩充, 使得每个局中人的纯策略数分别都是大于 1 的自然数 m 和 n, 那么就得到 $m\times n$ 双矩阵博弈. 这种博弈可表示为一个 2 维向量矩阵 $[(a_{ij},b_{ij})]_{m\times n}$, 其中的行标 i 代表第一个局中人的纯策略编号, 列标 j 代表第二个局中人的纯策略编号.

如果将 2×2 双矩阵博弈的局中人数目从 2 推广到任意一个大于 1 的自然数 n, 那么我们就得到另一种最简单、最基本的 n 人正规博弈: 每个局中人都恰恰有两个纯策略. 这种博弈有许多背景, 例如文献 [2-4]. 这种博弈被称为*n 人双行动博弈*.

本章研究双行动博弈的对称性判别与 0-1 编号法. 14.1 节给出 n 人 0-1 博弈及其对称性与对偶性及其所涉及的基本概念与符号. 14.2 节给出 n 人双行动博弈的显对称性、隐对称性和非对称性的概念. 14.3 节给出 n 人双行动博弈的非对称性和隐对称性的第一判别与编号算法. 14.4 节给出 n 人双行动博弈的非对称性和隐对称性的第二判别与编号算法.

14.1　n 人 0-1 博弈及其对称性与对偶性

定义 14.1.1　*n 人策略博弈 $\Gamma\equiv\langle N,(A_p),(u_p)\rangle$ 称为 0-1 博弈, 其中 $N=\{1,2,\cdots,n\}$ 是局中人集合, $A_p=\{0,1\}$ 是局中人 p 的行动集合, 而 $u_p:\prod\limits_{p\in N}A_p=\{0,1\}^N\to\mathbb{R}$ 是局中人 p 的效用函数. 长度为 n 的二进制数 $b=b_n\cdots b_1\in\{0,1\}^N$ 是这个博弈的局势.*

局势 $b=b_n\cdots b_1$ 可被写成 $(b_n,\cdots,b_1)$ 或 $(b_n\cdots b_1)$. 对于结盟 $C=\{p_1,\cdots,p_r\}\subseteq\{1,2,\cdots,n\}=N$, 以 $-C$ 代替 $N\backslash C$, a_C 代替 $(b_{p_1},\cdots,b_{p_r})$.

定义 14.1.2　定义 0 的对偶为 1,1 的对偶为 0, 并记 $\overline{0}=1,\overline{1}=0$. $b=(b_nb_{n-1}\cdots b_1)$ 的对偶定义为 $\overline{b}=\overline{b_n}\,\overline{b_{n-1}}\cdots\overline{b_1}$.

定义 14.1.3　对 0-1 博弈 $\Gamma\equiv\langle N,(A_p),(u_p)\rangle$, 局势 $b^*=b_n^*\cdots b_1^*$ 称为严格纯 Nash 均衡, 若 $u_p(b^*)>u_p(b_{-p}^*,\overline{b_p^*}),\forall p\in N$. 0-1 博弈 Γ 的全体严格纯 Nash 均衡的集合记作 SPNE(Γ), 于是又记 $b_{N\backslash C}=b_{-C},b=(b_n,\cdots,b_1)=(b_C,b_{-C})$, $b_{\{p\}}=b_p,b_{-\{p\}}=b_{-p}$.

显然有 $\overline{\overline{b_p}}=b_p,b_p+\overline{b_p}=1,\forall p\in N;\ \overline{\overline{b}}=b$.

定义 14.1.4　设 $\Gamma\equiv\langle N,(A_p),(u_p)\rangle$ 和 $\overline{\Gamma}\equiv\langle N,(A_p),(\overline{u}_p)\rangle$ 都是 0-1 博弈. $\overline{\Gamma}$ 称为 Γ 的对偶, 如果 $\overline{u}_p(b)=u_p(\overline{b}),\forall b\in\{0,1\}^N,\forall p\in N$.

显然 $\overline{u}_p(\overline{b})=u_p(b),\forall b\in\{0,1\}^N,\forall p\in N$. 从而 $\overline{\overline{u}}_p(b)=\overline{u}_p(\overline{b})=u_p(b)$, 故 $\overline{\overline{\Gamma}}=\Gamma$. 如

$$\overline{\begin{bmatrix}(a_{00},b_{00}) & (a_{01},b_{01})\\ (a_{10},b_{10}) & (a_{11},b_{11})\end{bmatrix}}=\begin{bmatrix}(a_{11},b_{11}) & (a_{10},b_{10})\\ (a_{01},b_{01}) & (a_{00},b_{00})\end{bmatrix}.$$

定义 14.1.5　对于固定的自然数 n, 二元实值函数 $F(x,y)$ 的对偶函数定义为 $\overline{F}(x,y)=F(1-x,n-y)$.

因为有 $\overline{\overline{F}}(x,y)=\overline{F}(1-x,n-y)=F(x,y)$, 所以我们才称 $F(x,y)$ 为对偶函数.

定义 14.1.6　一个 n 人 0-1 博弈 $\Gamma\equiv\langle N,(A_p),(u_p)\rangle$ 称对称的, 若有一个二元函数 S 使得

$$A_p=\{0,1\},\quad u_p(b)=S(b_p,s(b)),\quad \forall b\in\{0,1\}^N,\quad s(b)=\sum_{p=1}^{n}b_p.$$

对于对称 0-1 博弈, 各局中人的效用仅与他所取选的纯策略和局势有关, 而与局中人编号无关.

对于自然数 n, 令 B_n 是长度为 n 的二进制数 $b=b_nb_{n-1}\cdots b_1$ 的集合, 其中 $b_i=0,1,\ i=1,\cdots,n$. 例如 $B_1=\{0,1\}$, $B_2=\{00,01,10,11\}$, $B_3=\{000,001,010,011,100,101,110,111\}$. 一般地 $|B_n|=2^n$. 定义 $D_n=\mathrm{d}(B_n)=\{\mathrm{d}(b)\,|b\in B_n\}$, 其中 $\mathrm{d}(b)=\mathrm{d}(b_nb_{n-1}\cdots b_1)=\sum_{p=1}^{n}b_p2^{p-1}$ 是二进制数 $b=(b_nb_{n-1}\cdots b_1)$ 的十进制数, 即 D_n 是长度为 n 的二进制数的十进制数集合, 如 $D_1=\mathrm{d}(B_1)=\{0,1\}$, $D_2=\mathrm{d}(B_2)=\{0,1,2,3\}$, $D_3=\mathrm{d}(B_3)=\{0,1,2,3,4,5,6,7\}$. 一般地, 我们有 $D_n=\mathrm{d}(B_n)=\{0,1,\cdots,2^n-1\}$. 记 $D_p^b=\{\mathrm{d}(b)\,|b_p=b\}$, $b=0,1$. 例如当 $n=3$ 时, 有

$$D_1^0=\{\mathrm{d}(000),\mathrm{d}(010),\mathrm{d}(100),\mathrm{d}(110)\}=\{0,2,4,6\},$$

$$D_1^1=\{\mathrm{d}(001),\mathrm{d}(011),\mathrm{d}(101),\mathrm{d}(111)\}=\{1,3,5,7\}.$$

用 $\mathrm{b}(d)$ 表示十进制自然数 d 的二进制数, 并记 $\mathrm{b}(D_n)=\{\mathrm{b}(d)\,|d\in D_n\}$. 对任意 $b=b_n\cdots b_{p+1}b_pb_{p-1}\cdots b_1\in\{0,1\}^N$, 我们来定义 b 的 p- 对偶为 $\overline{b(p)}=b_n\cdots b_{p+1}\overline{b_p}b_{p-1}\cdots b_1\in\{0,1\}^N$. 如 $\overline{110101(2)}=110111$,$\overline{1011(3)}=1111$. 最后令 $s(b_nb_{n-1}\cdots b_1)=\sum\limits_{p=1}^{n}b_p$ 表示二进制数 $b_nb_{n-1}\cdots b_1$ 中 1 的个数. 记 $S(\Gamma)=\{s(b)\,|b\in\mathrm{SPNE}(\Gamma)\}$.

在对称 0-1 博弈中, 局中人的效用仅仅与使用行动 1 的局中人的数目和这个局中人所采取的行动有关. 因此, 对称 0-1 博弈对于每个局中人而言都是公平的.

例如对于如下 0-1 对称博弈

$$\begin{bmatrix}(a_{00},b_{00}) & (a_{01},b_{01})\\(a_{10},b_{10}) & (a_{11},b_{11})\end{bmatrix},$$

局势 00 表示 $b_1=b_2=0$, 局势 01 表示 $b_1=0$, $b_2=1$, 等等. 所以

$$a_{00}=u_1(00)=S(b_1,0+0)=a=S(b_2,0+0)=u_2(00)=b_{00},$$

$$a_{01}=u_1(01)=S(b_1,0+1)=b=S(b_2,1+0)=u_2(10)=b_{10},$$

$$a_{10}=u_1(10)=S(b_1,1+0)=c=S(b_2,0+1)=u_2(01)=b_{01},$$

$$a_{11}=u_1(11)=S(b_1,1+1)=d=S(b_2,1+1)=u_2(11)=b_{11}.$$

因此有

$$\begin{bmatrix}(a_{00},b_{00}) & (a_{01},b_{01})\\(a_{10},b_{10}) & (a_{11},b_{11})\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}(a,a) & (b,c)\\(c,b) & (d,d)\end{bmatrix}.$$

容易得到如下关系

$$\overline{\begin{bmatrix}(a,a) & (b,c)\\(c,b) & (d,d)\end{bmatrix}}=\begin{bmatrix}(d,d) & (c,b)\\(b,c) & (a,a)\end{bmatrix}.$$

这说明对称 2×2 双矩阵博弈的对偶博弈是对称的.

14.2 双行动博弈的显对称性、隐对称性和非对称性

定义 14.2.1 $\Gamma\equiv\langle N,(A_p),(u_p)\rangle$ 称为一个 n 人双行动博弈, 其中 $N=\{1,2,\cdots,n\}$ 是局中人有限集, 而 $A_p=\{a_p^1,a_p^2\}$ 是局中人 p 的行动集合, 这里 a_p^1 和 a_p^2 是局中人 p 的行动名称, 映射 $u_p:A=\prod\limits_{p\in N}A_p\to\mathbb{R}$ 是局中人 p 的效用函数.

例如对于性别战博弈, “看足球” 和 “看芭蕾舞剧” 是夫妻的行动名称. 注意, 这里并未给行动名编号 0 和 1 .

定义 14.2.2 n 人双行动博弈 $\Gamma \equiv \langle N, (A_p), (u_p)\rangle$ 称为显对称的, 如果

(1) $A_p = \{a_p^1, a_p^2\} = \{a^1, a^2\}$, 即 $a_p^1 = a^1$, $a_p^2 = a^2$, $p = 1, 2, \cdots, n$.

(2) 效用函数 $a_n a_{n-1} \cdots a_1 (u_n, u_{n-1}, \cdots, u_1)$ 满足 $a_p = a_q \Rightarrow u_p = u_q$, $p, q = 1, 2, \cdots, n$.

换句话说, 若全体局中人的两个行动名称集合相等 (即与局中人的编号无关) 且任意局势中两个局中人所用的纯策略名相同蕴涵这两个局中人的效用相等, 则此博弈就是显对称的. 通过对行动做适当的 0-1 编号可将非显对称博弈化为对称 0-1 博弈的 n 人双行动博弈称为隐对称博弈.

例如对于认错博弈 (见例 15.5.1), 有

认错, 认错, 认错 $(-a, -a, -a)$; 认错, 认错, 不认错 $(-a, -a, 0)$; 认错, 不认错, 认错 $(-a, 0, -a)$; 认错, 不认错, 不认错 $(-a, 0, 0)$; 不认错, 认错, 认错 $(0, -a, -a)$; 不认错, 认错, 不认错 $(0, -a, 0)$; 不认错, 不认错, 认错 $(0, 0, -a)$; 不认错, 不认错, 不认错 $(-b, -b, -b)$. 所以此博弈是显对称的.

注 显对称双行动博弈定义中的第二条的反向箭头未必成立, 例如将上述博弈改为认错, 认错, 认错 (a, a, a); 认错, 认错, 不认错 (c, c, c); 认错, 不认错, 认错 (c, c, c); 认错, 不认错, 不认错 (c, c, c); 不认错, 认错, 认错 (c, c, c); 不认错, 认错, 不认错 (c, c, c); 不认错, 不认错, 认错 (c, c, c); 不认错, 不认错, 不认错 (b, b, b). 它仍然是显对称的, 可是定义中的第二条的反向箭头却不成立.

再例如, 性别战博弈

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cc} \text{足球} & \text{芭蕾} \end{array} \\
\begin{array}{c} \text{足球} \\ \text{芭蕾} \end{array} & \begin{bmatrix} (2.1) & (0,0) \\ (0,0) & (1,2) \end{bmatrix}
\end{array}
$$

可以表示为

足球, 足球 (1, 2); 足球, 芭蕾 (0, 0); 芭蕾, 足球 (0, 0); 芭蕾, 芭蕾 (2, 1).

其虽然满足定义 2.2.2 中的 (1), 但是不满足 (2), 例如足球, 足球 (1, 2) 即如此. 但是通过作 0-1 编号夫芭蕾 =0, 夫足球 =1, 妻足球 =0, 妻芭蕾 =1, 可将其变为 0-1 对称博弈

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cc} \text{芭蕾} & \text{足球} \end{array} \\
\begin{array}{c} \text{足球} \\ \text{芭蕾} \end{array} & \begin{bmatrix} (0,0) & (2,1) \\ (1,2) & (0,0) \end{bmatrix}
\end{array}.
$$

因此它是隐对称的.

双行动博弈按照对称性的分类:

$$\text{双行动对策}\left\{\begin{array}{l}\text{对称对策}\left\{\begin{array}{l}\text{显对称对策,}\\\text{隐对称对策,}\end{array}\right.\\\text{非对称对策.}\end{array}\right.$$

14.3 非对称性和隐对称性的第一判别与编号算法

显对称博弈的 0-1 编号是平凡的, 只要令 $a^1=0$, $a^2=1$ 或 $a^1=1$, $a^2=0$ 即可. 下面研究判别双行动博弈的隐对称性和非对称性的判别程序和 0-1 编号法.

长度为 n 的 2^n 个二进制数的集合记作 $2^{\{0,1\}}=\{b^{(r)}|r=0,1,\cdots,n-1\}$, 其中

$$b^{(0)}=00\cdots00,\quad b^{(1)}=00\cdots01,\quad b^{(2)}=00\cdots10,$$
$$b^{(3)}=00\cdots11,\quad \ldots,\quad b^{(n-1)}=11\cdots11.$$

记 $b^{(r)}=b_n^{(r)}\cdots b_2^{(r)}b_1^{(r)}$, 其中 $r=\mathrm{d}(b^{(r)})$ 是二进制数 $b^{(r)}$ 的十进制, 而 $b^{(r)}=\mathrm{b}(r)$ 是十进制数 r 的长度为 n 的二进制数.

定义 14.3.1 设 $a=a_na_{n-1}\cdots a_1\in A$ 是 $\Gamma\equiv\langle N,(A_p),(u_p)\rangle$ 的一个局势, $a_p\in\{a_p^1,a_p^2\}$, $p=1,2,\cdots,n$, 则 a 的 r 编号定义为 $N_r(a)=b^{(r)}$, $b^{(r)}$ 的逆 r 编号定义为 $N_r^{-1}(b^{(r)})=a=a_na_{n-1}\cdots a_1$; a_p 的 r 编号定义为 $N_r(a_p)=b_p^{(r)}$, 而 $b_p^{(r)}$ 的逆 r 编号定义为 $N_r^{-1}(b_p^{(r)})=a_p$, $p=1,2,\cdots,n$.

定理 14.3.1 设 $N_r(a_n^1\cdots a_p^1\cdots a_1^1)=b_n^{(r)}\cdots b_p^{(r)}\cdots b_1^{(r)}$, 那么

$$N_r^{-1}(1_p)=\begin{cases}a_p^1, & b_p^{(r)}=1,\\ a_p^2, & b_p^{(r)}=0.\end{cases}$$

证 因 $N_r^{-1}(b_n^{(r)}\cdots b_p^{(r)}\cdots b_1^{(r)})=a_n^1\cdots a_p^1\cdots a_1^1$, 故 $N_r^{-1}(b_p^{(r)})=a_p^1$, 即 $N_r(a_p^1)=b_p^{(r)}$. 若 $b_p^{(r)}=0$, 则

$$N_r(a_p^1)=0\Rightarrow N_r(a_p^2)=1\Rightarrow N_r^{-1}(1_p)=a_p^2.$$

若 $b_p^{(r)}=1$, 则 $N_r(a_p^1)=1\Rightarrow N_r^{-1}(1_p)=a_p^1$. 证毕.

定义 14.3.2 对于 $0\leqslant r,s\leqslant n-1$ 和固定局势 $a^1=a_n^1a_{n-1}^1\cdots a_1^1$, 引进博弈局势集合 $A=\prod\limits_{p\in N}A_p$ 上的一个变换 $M_r^s(a^1)=M_{b^{(r)}}^{b^{(s)}}(a_p^1)$:

$$M_r^s(a_p^1)=M_{b^{(r)}}^{b^{(s)}}(a_p^1)=\begin{cases}a_p^1, & b_p^{(r)}=b_p^{(s)},\\ a_p^2, & b_p^{(r)}\neq b_p^{(s)},\end{cases}\qquad p=1,2,\cdots,n;$$

$$M_r^s(a^1)=M_r^s(a_n^1\cdots a_1^1)=(M_r^s(a_n^1),\cdots,M_r^s(a_1^1)).$$

定理 14.3.2　$N_r[M_r^s(a_p^1)] = b_p^{(s)}$.

证　当 $b_p^{(r)} = b_p^{(s)}$ 时, 有 $M_r^s(a_p^1) = a_p^1$, 于是

$$N_r[M_r^s(a_p^1)] = N_r(a_p^1) = b_p^{(r)} = b_p^{(s)};$$

当 $b_p^{(r)} \neq b_p^{(s)}$ 时, 有 $M_r^s(a_p^1) = a_p^2$, 于是

$$N_r[M_r^s(a_p^1)] = N_r(a_p^2) = \overline{b_p^{(r)}} = b_p^{(s)}.$$

证毕.

定理 14.3.3　(1)$M_r^s(a_p^1) = N_r^{-1}(1_p)$ 当且仅当 $b_p^{(s)} = 1$.

(2)$M_r^s(a_p^1) = N_r^{-1}(0_p)$ 当且仅当 $b_p^{(s)} = 0$.

证　必要性. 设 $M_r^s(a_p^1) = N_r^{-1}(1_p)$. 若 $M_r^s(a_p^1) = N_r^{-1}(1_p) = a_p^1$, 则

$$b_p^{(s)} = b_p^{(r)} = N_r(a_p^1) = 1;$$

若 $M_r^s(a_p^1) = N_r^{-1}(1_p) = a_p^2$, 则 $b_p^{(s)} = \overline{b_p^{(r)}} = N_r(a_p^2) = 1$.

充分性. 设 $b_p^{(s)} = 1$. 若 $M_r^s(a_p^1) = a_p^1$, 则 $b_p^{(r)} = b_p^{(s)} = 1$. 于是

$$N_r(a_p^1) = b_p^{(r)} = 1 \Rightarrow N_r^{-1}(1_p) = a_p^1 = M_r^s(a_p^1).$$

若 $M_r^s(a_p^1) = a_p^2$, 由于 $b_p^{(s)} = 1$, 所以 $b_p^{(r)} = 0$. 因此

$$N_r(a_p^1) = b_p^{(r)} = 0 \Rightarrow N_r(a_p^2) = 1 \Rightarrow N_r^{-1}(1_p) = a_p^2 = M_r^s(a_p^1).$$

第二个命题可对偶地得证. 证毕.

定理 14.3.3 的另外一种等价形式是

定理 14.3.3′　(1) $(N_r^{-1}(1_p), M_r^s(a^1)_{-p}) = M_r^s(a^1)$ 当且仅当 $b_p^{(s)} = 1$.

(2) $(N_r^{-1}(0_p), M_r^s(a^1)_{-p}) = M_r^s(a^1)$ 当且仅当 $b_p^{(s)} = 0$.

由对称博弈的定义和定理 14.3.3, 立即得到

定理 14.3.4(非对称性和隐对称性的第一判别与编号算法)　双行动博弈 $\Gamma \equiv \langle N, (A_p), (u_p)\rangle$ 的对称性和局中人行动的编号可由如下算法得到:

(1) 取定博弈 Γ 的固定局势 $a^1 = a_n^1 a_{n-1}^1 \cdots a_1^1$.

(2) 置 $0 \Rightarrow r$.

(3) 对满足 $s(b^{(s)}) = s(b^{(t)})$ 的 s 和 t, 若 $b_p^{(s)} = b_q^{(t)} = 1$ 蕴涵 $u_p(M_r^s(a^1)) = u_q(M_r^t(a^1))$, $b_p^{(s)} = b_q^{(t)} = 0$ 蕴涵 $u_p(M_r^s(a^1)) = u_q(M_r^t(a^1))$, 则转步骤 (5); 否则转步骤 (4).

(4) 若 $r < n$ 时, 则置 $r + 1 \Rightarrow r$, 转步骤 (3), 否则转步骤 (6).