高等数学讲义

下　　册

（初　稿）

南京大学数学系《高等数学》编写小组

1972年12月

目　　录

第六章　多元函数微积分……………………………………1

§1.　矢量代数……………………………………1

§2.　多元函数……………………………………9

§3.　偏导数与全微分……………………………………16

§4.　多元函数微分法的应用……………………………………26

§5.　重积分概念……………………………………36

§6.　重积分的变数变换……………………………………45

§7.　重积分的简单应用……………………………………54

习　　题

第七章　场论初步……………………………………62

§1.　数量场的梯度……………………………………62

§2.　曲面积分，矢量场的散度……………………………………67

§3.　曲线积分，矢量场的旋度……………………………………76

§4.　热传导方程及连续性方程……………………………………87

习　　题

第八章　微分方程……………………………………95

§1.　微分方程实例及其基本概念……………………………………95

§2.　一阶微分方程……………………………………101

§3.　二阶线性微分方程……………………………………109

§4.　拉氏变换及其在微分方程上的应用……………………………………124

§5.　几个数学物理方程简介……………………………………136

习　　题

第六章　多元函数微积分

§1. 矢量代数

矢量是由物理学以及某些技术科学的需要而引入的数学概念。它是研究这些学科同时也是研究数学本身的一种重要工具。对于有关这方面的内容，本节不准备作深入的探讨，仅介绍一下矢量概念及其基本代数运算，以备后面的需要。

(一)矢量概念

日常我们所遇到的量可分为两类。一类是由数值来度量的量，称做数量，如温度，密度、质量、功、电位等等；另一类量则除了标出它们的数值外，还必须指出它们的方向，如力、速度、电场强度等等。后面这种既有大小又有方向的量称为矢量。矢量常用拉丁字母上带有箭头的符号来表示，如$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$等，有时也用粗体拉丁字母 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 等表示。

在几何上，矢量常用空间有向线段(具有方向的线段)来表示，线段的长度用以表示矢量的大小，线段的方向用以表示矢量的方向。以A为始点B为终点的有向线段所代表的矢量又可记为$\overrightarrow{AB}$。

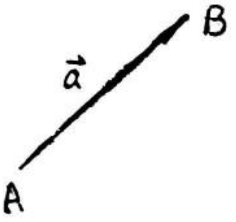

图 6.1

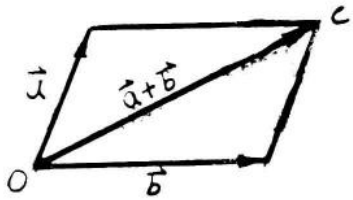

图 6.2

矢量的大小叫做矢量的模或长度，记为$|\boldsymbol{a}|$，$|\vec{a}|$或$|\overrightarrow{AB}|$。如果矢量的模等于零，那末称这个矢量为零矢量。零矢量的始点与终点重合，变为一点，故方向不定。
如果两矢量不但模相等，而且方向也相同，就称这两个矢量是相等的。因为矢量经过平移后方向与大小都没有改变，所以平移后的矢量仍与原来的矢量相等。

1.矢量的加法。两个矢量$\vec{a}$，$\vec{b}$的和仍然是一个矢量。它是由下面的法则确定的：将两个矢量平移，使其起点重合于某点O，以表示这两个矢量的两个有向线段为邻边作平行四边形，则由起点O到平行四边形对角顶点C所确定的矢量$\overrightarrow{OC}$称为矢量$\vec{a}$与$\vec{b}$的和(图 6.2)，记为$\overrightarrow{OC}=\vec{a}+\vec{b}$。由此规定矢量和的法则称为平行四边形法则。它是以物理上两个力的合力所遵循的法则为依据的。

容易验证矢量的加法满足下列两个性质：

① $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$（交换律），

② $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$（结合律）。

矢量减法是加法的逆运算。两矢量$\vec{a}$，$\vec{b}$的差$\vec{a}-\vec{b}$是这样一个矢量，它与矢量$\vec{b}$的和等于矢量$\vec{a}$，即$(\vec{a}-\vec{b})+\vec{b}=\vec{a}$。矢量$\vec{a}-\vec{b}$，可用下法确定；从同一起点作出矢量$\vec{a}$，$\vec{b}$，由$\vec{b}$的终点到$\vec{a}$的终点所确定的矢量即为$\vec{a}-\vec{b}$（图 6.3）。

对于任意矢量$\vec{a}$，有$\vec{a}-\vec{a}=\vec{0}$，其中$\vec{0}$是零矢量。

2. 矢量与数的乘积。 矢量$\vec{a}$与实数λ相乘，定义为一矢量$\lambda\vec{a}$，它的模等于$\vec{a}$的模乘以λ的绝对值，即$|\lambda|\cdot|\vec{a}|$；而方向为：当$\lambda>0$时与$\vec{a}$同向；当$\lambda<0$时与$\vec{a}$的方向相反；当$\lambda=0$时，成为零矢量。

容易验证，数量与矢量乘积满足下列三个性质：

① $\lambda(\mu\vec{a})=(\lambda\mu)\vec{a}$，

② $(\lambda+\mu)\vec{a}=\lambda\vec{a}+\mu\vec{a}$，

③ $\lambda(\vec{a}+\vec{b})=\lambda\vec{a}+\lambda\vec{b}$。

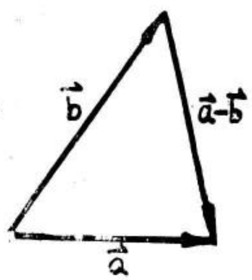

图 6.3

以上所介绍的矢量运算是由几何法则来进行的，这样的运算远远不能满足实际需要。例如要对好几个矢量进行求和(差)时，图形就变得相当复杂和难以辨认，因此需进一步建立形与数之间的联系，使得矢量的性质可以通过代数来研究。要使几何问题与代数问题取得联系，最首要的任务是要建立坐标系。但我们研究的矢量是空间的矢量，不限定在同一个平面上，所以以前引进的平面坐标系远不能适应我们的需要，故有必要引进空间坐标系的概念。

(二)空间直角坐标系

现仿照平面直角坐标系引入空间直角坐标系。从定点O（称为原点）出发，作三条互相垂直的有向直线确定为坐标轴，并分别称这三个坐标轴为X轴，Y轴和Z轴。三个坐标轴的正方向习惯上常按右手法则来确定，就是将右手的姆指、食指、中指作成互相垂直的形状，若取姆指方向为X轴正方向，食指为Y轴的正方向，则中指就是Z轴的正方向（如图 4.6）。平面XOY，YOZ，ZOX叫做坐标面。

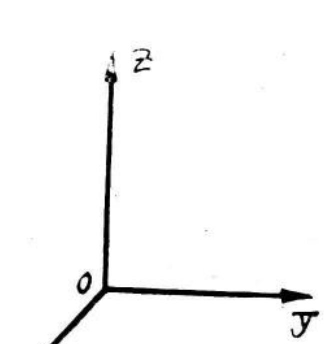

图 6.4

在坐标轴上取定单位长度（通常取相同的单位长度）后，空间点的位置就可用有序的三个实数(x, y, z)来确定。

对于空间任一点P，通过它分别作三个平面垂直于三个坐标轴，交点为M、N、Q，M点在X轴

上的坐标（称为横坐标）是这样一个数，当M点在OX轴正半轴时$x=|OM|$，当M点在OX轴负半轴时，$x=-|OM|$，同样可得N在Y轴上坐标(称为纵坐标)和Q在OZ轴上的坐标(称为立坐标)。这样空间任一点P对应了一组有序的三个实数(x,y,z)。反之，按一定次序排列的任意三个实数(x，y，z)决定空间一点P。称(x，y，z)为点P的坐标。这样便建立了空间点与数量的联系，从而将形与数统一了起来。

点到坐标原点的距离。设P是空间任一点，它的坐标为(x,y,z)，过P点作三个平面分别垂直于三个坐标轴，交点为M、N、Q(图 6.5)。由图6.5 看出，

$$oM=x,\ oN=y,\ oQ=z,$$

$$|oP_1|^2=|oM|^2+|MP_1|^2$$

$$=|oM|^2+|oN|^2$$

$$=x^2+y^2,$$

而

$$|oP|^2=|oQ|^2+|QP|^2$$

$$=|oQ|^2+|oP_1|^2$$

$$=x^2+y^2+z^2,$$

所以 $|oP|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$。 （1）

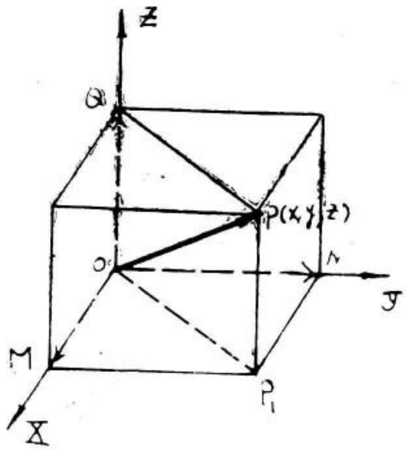

图 6.5

这就是点P到坐标原点O的距离公式。同样可推得空间任意两点$P_1(x_1, y_1, z_1)$与$P_2(x_2, y_2, z_2)$之间的距离为

$$|P_1P_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2} \qquad (2)$$

(三)矢量投影表达式

引进直角坐标系后，我们便可以用代数方法对矢量进行研究。

1.矢量的模，若$\vec{a}$为空间某一矢量，其始点坐标为(x_1,y_1,z_1)，终点坐标为(x_2,y_2,z_2)，则$|\vec{a}|$可由两点距离公式（2）立即得到

$$|a|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2} \qquad (3)$$

2.矢量的方向。设$\vec{a}=\overrightarrow{AB}$为空间一矢量，其始点终点坐标分别为$(x_1, y_1, z_1)$，$(x_2,y_2,z_2)$。今将$\vec{a}$平移，使$A$与原点$O$重合，于是$B$就与空间某一点$P$重合。容易证明$P$的坐标为$(x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1)$且$\overrightarrow{OP}=\vec{a}$(图 6 6)。$\overrightarrow{OP}$与坐标轴$X$，$Y$，$Z$分别有交角$\alpha$，$\beta$，$\gamma$，$(0\leq\alpha,\beta,\gamma\leq\pi)$，由于$OP$与$AB$平行，故$\overrightarrow{AB}$与三坐标轴也有交角$\alpha,\beta,\gamma$。称$\alpha,\beta,\gamma$为$\vec{a}$的方向角。

根据立体几何中著名的三垂线定理，知$PM\perp OM$，$PN\perp ON$，$PQ\perp OQ$，故得

$$\cos\alpha=\frac{x_2-x_1}{|\vec{a}|}=\frac{x_2-x_1}{\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}},$$

$$\cos\beta=\frac{y_2-y_1}{|\vec{a}|}=\frac{y_2-y_1}{\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}},$$

$$\cos\gamma=\frac{z_2-z_1}{|\vec{a}|}=\frac{z_2-z_1}{\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}}。\qquad (4)$$

称 $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ 为 $\vec{a}$ 的方向余弦，我们经常用这三个余弦值来刻划 $\vec{a}$ 的方向，容易验证，任何非零矢量的方向余弦满足关系式

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$$

从(3)，(4)式可以看出，当矢量的始点，终点用坐标给出后，它的长度和方向便可确定，所以我们经常用点的坐标(x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1)来描述矢量，有时甚至就用(x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1)来表示 $\vec{a}$，並称为 $\vec{a}$ 的坐标。坐标(x,y,z)既可以看成空间上的一点，也可以看成以原点为始点以点(x,y,z)为终点的矢量。

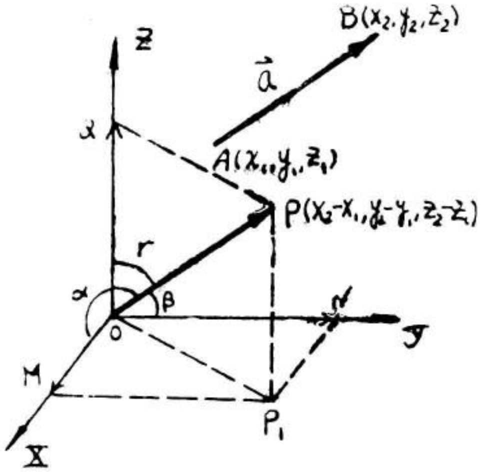

图 6.6

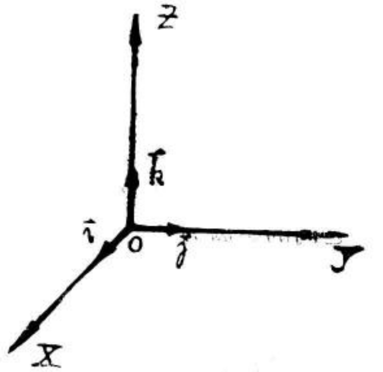

图 6.7

3. **矢量的投影表示**。在每个坐标轴的正向上，我们分别定义一个单位矢量，它们的方向与三坐标轴的正向一致，而模为1(图 6.7)，並分别记为 $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$。显然这三个单位矢量的坐标为

$$\vec{i}=(1,0,0),\ \vec{j}=(0,1,0),\ \vec{k}=(0,0,1)。$$

空间每一矢量 $\vec{a}$，都可以分解为三个与坐标轴平行的矢量之和。

事实上，从图6.5可以看出，$\vec{a}=\overrightarrow{oP}$，又由矢量加法定义，知 $\overrightarrow{oP}=\overrightarrow{oM}+\overrightarrow{oN}+\overrightarrow{oQ}$ 而 $|\overrightarrow{oM}|=x_2-x_1$, $|\overrightarrow{oN}|=y_2-y_1$, $|\overrightarrow{oQ}|=z_2-z_1$，故

$$\overrightarrow{oM}=(x_2-x_1)\vec{i},\quad \overrightarrow{oN}=(y_2-y_1)\vec{j},\quad \overrightarrow{oQ}=(z_2-z_1)\vec{k}。$$

所以有

$$\vec{a}=(x_2-x_1)\vec{i}+(y_2-y_1)\vec{j}+(z_2-z_1)\vec{k}\qquad (6)$$

公式(6)称为矢量的投影表达式，说明了矢量在各个坐标轴上投影等于终点与始点在该

轴上坐标之差。

根据(4)，(6)式还可以表示成

$$|\vec{a}| = |\vec{a}|\cos\alpha\,\vec{i} + |\vec{a}|\cos\beta\,\vec{j} + |\vec{a}|\cos\gamma\,\vec{k}$$

$|\vec{a}|\cos\alpha$，$|\vec{a}|\cos\beta$，$|\vec{a}|\cos\gamma$ 分别称为 $\vec{a}$ 在 X，Y，Z 轴上的分量。因此，坐标为(a_1，a_2，a_3)的矢量，又可以表示为 $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$。

矢量 $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$ 与 $\vec{b} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}$ 的和，及数 λ 与 $\vec{a}$ 的乘积，均可用投影表达式表示：

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1)\vec{i} + (a_2 + b_2)\vec{j} + (a_3 + b_3)\vec{k},$$

$$\lambda\vec{a} = (\lambda a_1)\vec{i} + (\lambda a_2)\vec{j} + (\lambda a_3)\vec{k}。$$

容易看出，矢量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 要相等，当且仅当它们对应的分量相等：

$$a_1 = b_1,\quad a_2 = b_2,\quad a_3 = b_3。$$

例 已知矢量 $\vec{a}$ 的始点坐标为(0，3，7)，终点坐标为(2，4，9)试求矢量 $\vec{a}$ 在坐标轴上的投影，以及它的模和方向余弦。

解 由(6)知

$$\vec{a} = (2-0)\vec{i} + (4-3)\vec{j} + (9-7)\vec{k},$$

即

$$\vec{a} = 2\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k},$$

所以 $\vec{a}$ 在三坐标轴上的投影分别为2，1，2。

由(3)，知

$$|\vec{a}| = \sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2} = \sqrt{9} = 3。$$

所以它的方向余弦为

$$\cos\alpha = \frac{2}{3},\quad \cos\beta = \frac{1}{3},\quad \cos\gamma = \frac{2}{3}。$$

（四） 矢量的数量积，矢量积和混合积

1. 矢量的数量积。

我们知道，力 $\vec{F}$ 作用于物体而使其发生位移时要做功。如果物体是沿着力的方向移动，那末力所做的功就等于力的大小 $|\vec{F}|$ 与物体所移动距离 $|\vec{S}|$ 的乘积。如果物体移动的方向和力的方向不一致，形式一角度 φ，那末所做的功就等于这个力在移动方向 $\vec{S}$ 上的投影 $|\vec{F}|\cdot\cos\varphi$ 再乘以距离 $|\vec{S}|$：

$$W = |\vec{F}|\cdot|\vec{S}|\cdot\cos\varphi。$$

根据这个物理意义，我们定义两矢量 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 的数量积 $\vec{a}\cdot\vec{b}$（有时简记为 $\vec{a}\vec{b}$）为

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos(\widehat{\vec{a},\vec{b}})\quad (0\le\widehat{\vec{a},\vec{b}}\le\pi) \tag{7}$$

由此可见，两矢量的数量积已不再是矢量，而是一个数量。

从定义还可以看出，矢量的数量积具有下列三个性质：

i) $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$ （交换律）

ii) $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$ （分配律）

iii) $\vec{a}\cdot(\lambda\vec{b})=\lambda(\vec{a}\cdot\vec{b})$ （其中λ是常数）

矢量$\vec{a}$，$\vec{b}$中有一为零矢量时，显然其数量积为零；如果两矢量均非零矢量时，它们的数量积也有可能变为零，但这当且仅当它们相互垂直的时候。因为当它们垂直时，有 $\cos(\widehat{\vec{a},\vec{b}})=\cos\frac{\pi}{2}=0$，所以$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$；反之，当两非零矢量的数量积$|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos(\widehat{\vec{a}\vec{b}})=0$时，因$|\vec{a}|\neq 0$，$|\vec{b}|\neq 0$，故只有 $\cos(\widehat{\vec{a},\vec{b}})=0$，即 $\widehat{\vec{a},\vec{b}}=\frac{\pi}{2}$。

因为矢量$\vec{i}$，$\vec{j}$，$\vec{k}$彼此垂直，所以

$$\vec{i}\vec{j}=0,\quad \vec{i}\vec{k}=0,\quad \vec{j}\vec{k}=0。\tag{8}$$

考察矢量$\vec{a}$与它自身的数量积。由于$\widehat{\vec{a},\vec{a}}=0°$，故

$$\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|\cdot|\vec{a}|\cos(\widehat{\vec{a}\vec{a}})=|\vec{a}|^2$$

即矢量$\vec{a}$与它自身的数量积等于此矢量模的平方。由此又有

$$\vec{i}\cdot\vec{i}=|\vec{i}|^2=1,\quad \vec{j}\cdot\vec{j}=|\vec{j}|^2=1,\quad \vec{k}\cdot\vec{k}=|\vec{k}|^2=1\tag{9}$$

若矢量$\vec{a}=a_1\vec{i}+a_2\vec{j}+a_3\vec{k}$，$\vec{b}=b_1\vec{i}+b_2\vec{j}+b_3\vec{k}$，根据(8)，(9)，再应用性质ii)，iii)，便有

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2++a_3b_3\tag{10}$$

因而两矢量垂直的条件可写为：

$$a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=0\tag{11}$$

要判别两矢量是否垂直，(11)式是很好的一个方法。

例 考察矢量$\vec{a}:(3,4,-2)$与矢量$\vec{b}:(2,-1,1)$，由于

$$3\times2+4\times(-1)+(-2)\times1=0,$$

所以立即可以判定$\vec{a}$，$\vec{b}$垂直。

我们还可以用矢量的坐标来计算两矢量的交角。这是因为，由(10)

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3,$$

又

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos(\widehat{\vec{a}\vec{b}})=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\quad\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}\quad\cos(\widehat{\vec{a},\vec{b}}),$$

故

$$\cos(\widehat{\vec{a},\vec{b}}) = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\cdot\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}} \tag{12}$$

2. 矢量的矢量积。矢量$\vec{a}$与矢量$\vec{b}$的矢量积$\vec{a}\times\vec{b}$定义为这样一个矢量：它的模等于以矢量$\vec{a}$和$\vec{b}$为边所构成的平行四边形的面积，即

$$|\vec{a}\times\vec{b}| = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\sin(\widehat{\vec{a},\vec{b}}), \tag{13}$$

它的方向垂直于平行四边形所在平面，且按右手法则来确定它的正向（即食指由$\vec{a}$转到$\vec{b}$的方向，姆指就指向矢积的正向(图 6.8)。

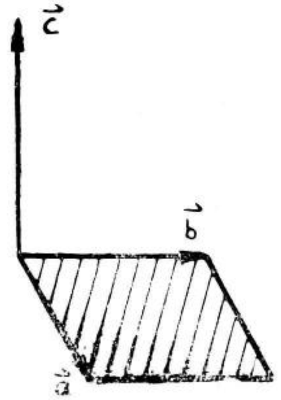

图 6.8*a*

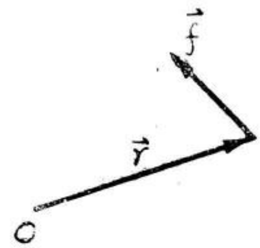

图 6.8*b*

例如力$\vec{f}$对于O点的力矩$\vec{M}$就可用$\vec{f}$与$\vec{r}$的矢积来表示：

$$\vec{M} = \vec{r}\times\vec{f}$$

容易看出矢量积满足下列三个性质：

(i) $\quad \vec{a}\times\vec{b} = -(\vec{b}\times\vec{a})$

(ii) $\quad (\lambda\vec{a})\times\vec{b} = \vec{a}\times(\lambda\vec{b}) = \lambda(\vec{a}\times\vec{b})$

(iii) $\quad \vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}$

$\quad (\vec{b}+\vec{c})\times\vec{a} = \vec{b}\times\vec{a}+\vec{c}\times\vec{a} \qquad$ （分配律）

根据矢量积的定义及性质(i),(ii),(iii)可算出

$$\vec{a}\times\vec{b} = (a_2b_3-a_3b_2)\vec{i}+(a_3b_1-a_1b_3)\vec{j}+(a_1b_2-a_2b_1)\vec{k}$$

$$= \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}\vec{i} + \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\vec{k}$$

$$=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \tag{14}$$

这就是矢量$\vec{a}\times\vec{b}$的投影表示。

由定义可知，两矢量平行当且仅当$\vec{a}\times\vec{b}=0$，

即

$$a_1b_2-a_2b_1=a_2b_3-a_3b_2=a_3b_1-a_1b_3=0.$$

写成比例的形式则为

$$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3} \tag{15}$$

3. 矢量的混合积。现考虑三个矢量$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$的混合积$\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})$。如果已知三个矢量的投影表达式为

$$\vec{a}=a_1\vec{i}+a_2\vec{j}+a_3\vec{k},\quad \vec{b}=b_1\vec{i}+b_2\vec{j}+b_3\vec{k},$$
$$\vec{c}=c_1\vec{i}+c_2\vec{j}+c_3\vec{k},$$

由矢积表示式(14)及数积表示式(10)可推出

$$\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})=a_1(b_2c_3-b_3c_2)+a_2(b_3c_1-b_1c_3)$$
$$+a_3(b_1c_2-b_2c_1)=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}。$$

若矢量$\vec{a}$在矢量$\vec{b}\times\vec{c}$上的投影记为$(\vec{a})_{\vec{b}\times\vec{c}}$那末，$\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})$,便可表示为

$$\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})=|\vec{b}\times\vec{c}|\cdot(\vec{a})_{\vec{b}\times\vec{c}}$$

今以$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$为边作一平行六面体，则$|\vec{b}\times\vec{c}|$等于以$\vec{b}$，$\vec{c}$为边的平行四边形的面积，也即平行六面体的底面积。又因$\vec{b}\times\vec{c}$垂直于底面，故$(\vec{a})_{\vec{b}\times\vec{c}}$等于平行六面体的高，从而在几何上，

$$\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})=|\vec{b}\times\vec{c}|\cdot(\vec{a})_{\vec{b}\times\vec{c}}$$

表示以$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$为边的平行六面体的体积(图 6.9)。

如果三个矢量$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$共面，那末这三个矢量作成平行六面体的体积为零，即$\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})=0$.反之亦然。因而得出结论：**三个矢量共面，当且仅当它们的混合积为零。**

§2. 多 元 函 数

（一） 二元函数概念

以前我们讨论的函数都限定在一元函数的范围，也就是说因变量（函数）只依赖于一个自变量。但在自然科学和工程技术的许多问题中，变量之间的对应关系往往不是只有一个自变量，而是有两个或两个以上的自变量。

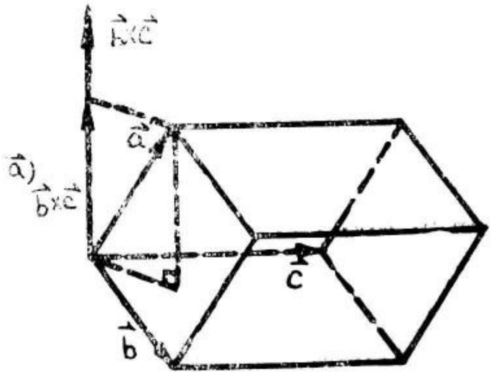

图 8.9

例1. 圆柱体的体积V与它的底半径R及高H之间有关系

$$V=\pi R^2H,$$

这里包含三个变量V，R，H。当底半径R及高H为已知时，体积V的大小就可确定。V的变化与R和H的变化有关，而R和H可以彼此无关地变化。在这个例子中，R和H是自变量，V是因变量。

例2. 理想气体的体积V与温度T成正比而与压力P成反比，变量之间的关系为

$$V=\frac{kT}{P},$$

其中k是常数，V，T，P是变量。由压强P和温度T可以确定体积V，因而P和T是自变量，V是因变量。

例3. 边长分别为a，b，c的长方体的体积为$V=abc$.

这里有四个变量a,b,c,V，其中a,b,c是自变量，V是因变量。

在以上三个例子中，都有两个或两个以上的自变量。对照一元函数的定义，可引入多元函数的定义如下。

二元函数的定义：如果对于两个变量x，y所取的每一对值，都有按一定规则确定的另一变量Z的值与之对应，则称Z是x,y的函数，用符号$Z=f(x,y)$表示。并称x,y为自变量，Z为因变量或函数。因为这种函数依赖于两个自变量，故称为二元函数。

类似地，可给出三元函数、四元函数，……，n元函数的定义。自变量多于一个的函数统称为多元函数。

本章所论述的，均指二元函数而言。由两个自变量推广到更多个自变量并无原则上的困难，故关于多元函数的有关论述，均可与二元函数完全相仿的形式给出。

在学习二元函数时，要经常与一元函数对比，一方面要注意它与一元函数有那些类似的地方，另一方面也要注意自变量个数增多了会出现哪些不同的情况。

变量x,y确定了平面上某一点$P(x,y)$．如果在点P，函数$f(x,y)$有确定的数值与之对应，就说函数在点P是有定义的。平面上所有使$f(x,y)$有定义的点的全体，称为函数的定义域。一般说来，函数的定义域是使表达式$Z=f(x,y)$有意义的点的全体。例如

函数 $Z=ax+by+c(a,b,c$ 是常数)对平面上任一点，均有意义，因此它的定义域是全平面。又如函数 $Z=\sqrt{1-x^2-y^2}$，对于满足 $x^2+y^2\leq 1$ 的一切点 (x,y) 有意义，(我们限定 Z 要取实数值)，它的定义域是平面上由单位圆 $x^2+y^2\leq 1$ 所围成的区域，(包括圆周上的点)。对于实际问题，还必须根据问题的实际意义来确定定义域，如在例 3 所考察的函数 $V=abc$，如果单从数学的角度来看，对一切取实数值的 a,b,c 均有定义，但在这个问题中，a,b，c 代表长方体三棱长，显然只能取正值，故函数 $V=abc$ 的定义域为 $a>0$，$b>0$，$c>0$。

一元函数的定义域通常是直线上某一区间，而二元函数的定义域通常是由平面上一条曲线或数条曲线所围成的区域。

（二） 二元函数及其图形

在第一章，我们已经讲过一元函数可以看成平面上的一条曲线。这种由几何图形来表示函数，可增强函数的直观性，启发我们去推断函数的某些性质，另一方面也可以根据函数与方程的研究来解决一些几何问题。因此与图形的结合是高等数学方法的一个特点。

正如一元函数可用平面曲线表示一样，二元函数 $Z=f(x,y)$ 也可用空间的几何图形来表示。确定空间直角坐标系后，函数的定义域 D 便是 xoy 平面上某一区域。设 $P(x,y)$ 是 D 内一点，通过 P 作 xy 平面的垂线，在垂线上按数值 $Z=f(x,y)$ 取定一点 M，M 的坐标为 $(x,y,f(x,y))$。当 P 在 D 内变动时，点 M 在空间的轨迹就是函数 $Z=f(x,y)$ 的几何图形。一般说，这是一个曲面，而等式 $Z=f(x,y)$ 就是这个曲面的方程。由此可见，二元函数可用空间一个曲面表示。

包含三个变量 x,y,z 的方程

$$F(x,y,z)=0 \tag{1}$$

表示点 (x,y,z) 的三个坐标之间的关系，如对 x,y 所能取的每一对值，均可由(1)确定 Z 值与之对应，这样(1)就确定了 x,y 的一个函数 Z。因为在(1)中，Z 没有象 $Z=f(x,y)$ 那样明显的表示式，故由方程(1)那样确定的函数 Z 称为 x,y 的隐函数。满足(1)的一切点构成空间一曲面。反之，给出空间一曲面，其点的坐标 (x,y,z) 亦必满足某种关系 $F(x,y,z)=0$，故关系式 $F(x,y,z)=0$ 和 $z=f(x,y)$ 一样，均代表空间曲面的方程。

下面给出几个常见的空间曲面与曲线的方程：

(1) 平面与一次方程。我们知道，通过某一定点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 且与某一矢量 $\vec{n}=A\vec{i}+B\vec{j}+C\vec{k}$(其中 A,B,C 不同时为零)垂直的平面是唯一确定的。因为若 $M(x,y,z)$ 是平面上任一动点，那末矢量 $\overrightarrow{M_0M}$ 与 $\vec{n}$ 互相垂直。根据矢量性质，有 $\vec{n}\cdot\overrightarrow{M_0M}=0$，但

$$\overrightarrow{M_0M}=\overrightarrow{oM}-\overrightarrow{oM_0}=(x-x_0)\vec{i}+(y-y_0)\vec{j}+(z-z_0)\vec{k},$$

所以对平面上任何一点 (x,y,z)，必满足方程：

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0 \tag{2}$$

因而(2)就是通过点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 且垂直于矢量 $\vec{n}$ 的平面方程。

方程(2)又可写为

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

其中 $$D = Ax_0 - By_0 - Cz_0.$$

可见平面的方程是 x，y，z 的一次方程。反之，我们可以证明，任意一个 x，y，z 的一次方程都表示空间一个平面。事实上，设已给方程为

$$Ax + By + Cz + D = 0. \tag{3}$$

(其中 A，B，C 不同时为零)。取它的一组解(x_0，y_0，z_0)，则

$$Ax_0 + By_0 + CZ_0 + D = 0. \tag{4}$$

两方程相减，得

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

这就是通过点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 而与矢量 $\overrightarrow{n} = (A, B, C)$ 垂直的平面方程，它与方程(3)有同解，故方程(3)是一平面方程。

凡与某平面垂直的矢量 $\overrightarrow{n}$，称为这个平面的法矢量(图 6.10)。故对于以形式(3)给出的平面方程，必有法矢量 $\overrightarrow{n} = (A, B, C)$.

例4. 求通过点 $A(2,0,1)$，$B(1,1,0)$ 且垂直于平面 $x + y + z = 1$ 的平面方程。

解：设经过点(1,1,0)的平面方程为

$$A(x - 1) + B(y - 1) + Cz = 0, \tag{5}$$

其中 A，B，C 是平面法矢量 $\overrightarrow{n}$ 的坐标，是待求的。(图 6.11)。因为点 (2,0,1) 在所求的平面上，其坐标要满足方程(5)，故

$$A - B + C = 0. \tag{6}$$

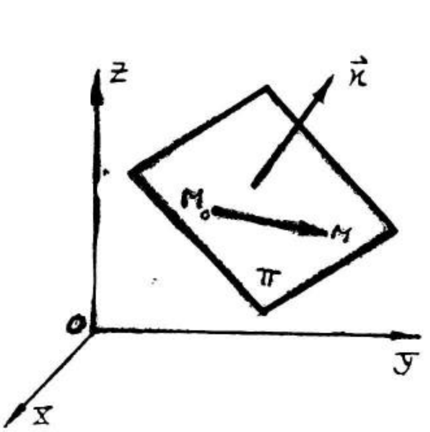

图 6.10

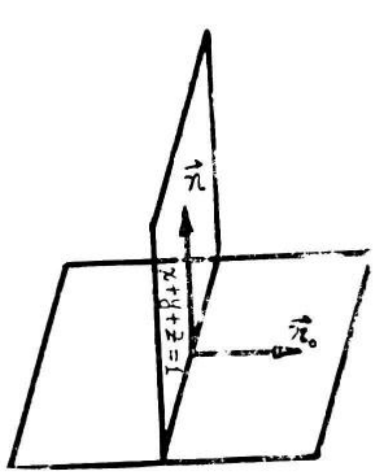

图 6.11

另一方面，此平面与平面 $x+y+z=1$ 垂直，故两平面的法矢量也互相垂直(即 $\vec{n}\perp\vec{n}_0$)．因而有

$$A\times1+B\times1+C\times1=0. \tag{7}$$

由式(6)，(7)可以解出

$$B=0,\qquad A=-C,$$

代入(5)，有

$$A(x-1)-Az=0.$$

约去A，得

$$x-z-1=0.$$

这就是所求平面的方程。

(2) 空间直线方程。空间直线可以看为两个平面的交线，因此直线方程可用方程组

$$\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,\\A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0,\end{cases}$$

表示，称之为空间直线的一般方程。

但表示空间直线还可用别的形式，例如，通过已知点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 且与某定矢量 $\vec{a}(l,m,n)$ 平行的，直线方程可写为

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}. \tag{8}$$

事实上，设 $M(x,y,z)$ 是直线上一动点，应用矢量$\overrightarrow{M_0M}$与 $\vec{a}$ 平行的条件 §1(15) 即可得上述关系式。方程(8)称为直线的标准方程。

矢量 $\vec{a}(l,m,n)$ 叫做这直线的方向矢量。如果直线与 $\vec{a}(l,m,n)$ 平行，那末直线与 $\lambda\vec{a}=(\lambda l,\lambda m,\lambda n)$亦平行($\lambda$ 为 >0 的任意实数)，所以$(\lambda l,\lambda m,\lambda n)$亦为直线的方向矢量。方向矢量的坐标 l,m,n 叫做直线的一组方向数。

如令

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}=t,$$

其中 t 为比例参数，可得直线的参数方程为

$$\begin{cases}x=x_0+lt\ ,\\y=y_0+mt,\\z=z_0+nt\ 。\end{cases} \tag{9}$$

空间中任意曲线可看成是空间两曲面的交线。因此空间曲线的一般方程为

$$\begin{cases} F(x,y,z)=0, \\ G(x,y,z)=0. \end{cases}$$

除此以外，还可用参数方程表示空间曲线，即将 x,y,z 都表示为另一变量 t（称为参变量）的函数

$$x=f(t), \qquad y=\varphi(t), \qquad z=\psi(t) \qquad (a\le t\le b).$$

(3) 球面，球面是与一定点 P_0（球心）等距离的动点的轨迹（图 6.12）。设动点坐标为 (x,y,z)，球心坐标为 (a,b,c)，由距离公式有

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2. \tag{10}$$

这就是球面方程，其中 R 是球的半径。平行于坐标面的平面与它相交得到的截线是圆（在特殊情形交于一点），例如平面 $z=d$ （$|d-c|<R$）与球面(10)相交是 $z=d$ 平面上的一个圆，方程为

$$\begin{cases} z=d, \\ (x-a)^2+(y-b)^2=R^2-(d-c)^2=k^2. \end{cases}$$

如果球心在原点，那么球面方程变为

$$x^2+y^2+z^2=R^2. \tag{11}$$

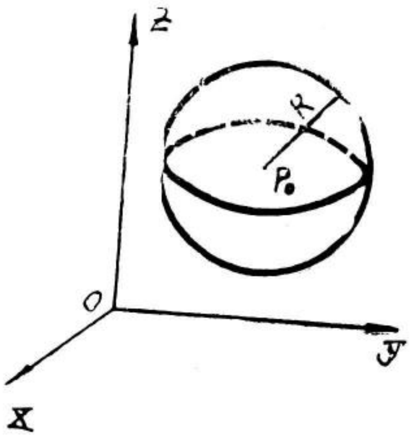

图 6.12

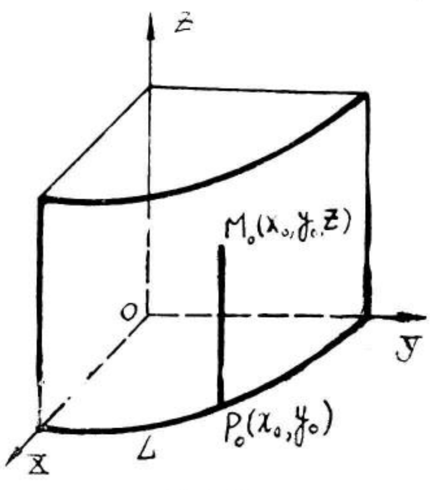

图 6.13

(4) 柱面。设给定一条平面曲线及一条定直线，过曲线上每一点作与定直线平行的诸直线，这种直线所围成的曲面叫柱面。已给平面曲线叫做柱面的准线，组成柱面的诸直线叫柱面的母线。

现在来建立以 xoy 平面上一条曲线 L 为准线，平行于 oz 轴的直线为母线的柱面方程(图 6.13)。

设准线 l 的方程为

$$\begin{cases} f(x,y)=0, \\ Z=0. \end{cases} \tag{12}$$

如 xoy 平面上一点 $P_0(x_0,y_0)$ 满足方程 (12)，即 $f(x_0,y_0)=0$. 那末点 $M_0(x_0,y_0,z)$（z 为任意）也满足 (12)，因为方程不含 z。这就是说，过 P_0 的母线上任一点 M_0 必满足方程(12)，而柱面上任一点必在某一母线上，故柱面上任一点必满足方程(12)。

反之，如空间一点的坐标满足方程(12)，则这点必在上述柱面上,因此以 L 为准线，以平行于 z 轴的直线为母线的柱面方程为 $f(x,y)=0$.

例如以平行 z 轴的直线为母线的圆柱面方程为 $x^2+y^2=a^2$，椭圆柱面方程为 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0$，双曲柱面方程为 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-1=0$.

同样可得母线平行于 ox 轴的柱面方程为 $f(y,z)=0$，母线平行于 oy 轴的柱面方程为 $f(x,z)=0$.

(5) **旋转面**。一平面曲线绕此平面上某一直线旋转所得的曲面叫做旋转面。

yoz 平面上的曲线 $f(y,z)=0$ 绕 z 轴旋转所得的旋转面的方程为

$$f(\sqrt{x^2+z^2},\ y)=0. \tag{13}$$

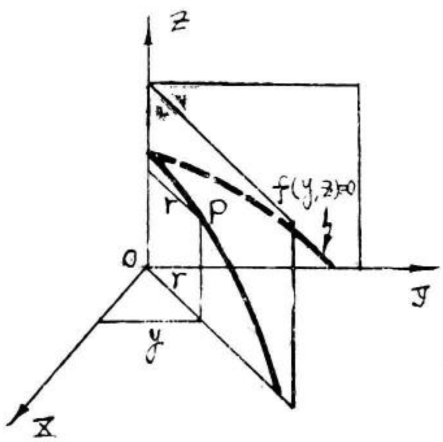

图 6.14

事实上，当曲线 $f(y,z)=0$ 绕它的旋转轴（z 轴）旋转至图 6.14 所示位置时，$P(x,y,z)$ 为旋转面上一点，则 P 必满足方程 $f(r,z)=0$. 其中 r 是 P 到 oz 轴的距离，且 $r^2=x^2+y^2$. 因此可得旋转面方程为

$$f(\sqrt{x^2+y^2},\ z)=0.$$

例如，以 yoz 平面上半直线 $y=z(y\geq 0)$ 绕 oz 轴旋转所得的旋转面方程为

$$z=\sqrt{x^2+y^2}$$

这是正圆锥面(图 6.15)。

又如曲线 $y=\sqrt{z}$ 绕 oz 轴旋转所得的旋转抛物面(图 6.16)，满足方程

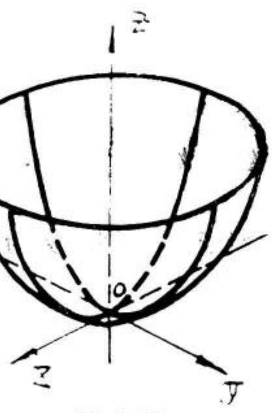

图 6.16

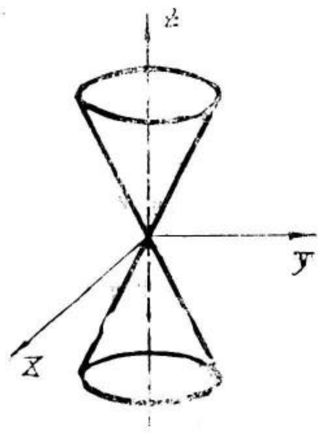

图 6.15

$$\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{z},$$

即
$$z=x^2+y^2.$$

对于其它坐标面上的曲线，绕该坐标面内任一坐标轴旋转所得旋转面的方程均可用类似方法得到。

（三）二元函数的极限与连续性

我们看到，在研究一元函数微积分时，极限思想在那里起了相当基本而重要的作用。现在研究多元函数微积分，自然要再一次运用这一基本思想。

在研究一元函数时，我们往往将其自变量 x 看作数轴上点 P 的坐标，并记为 $y=f(P)$，同样我们也可以将二元函数 $z=f(x,y)$ 的自变量 x,y 看作平面上点 P 的坐标，并记为 $z=f(P)$. 这样，不论一元函数还是二元函数，均可统一在点函数的观点之下，所不同的只是前者的 P 是在直线上变动，而后者的 P 是在平面上变动。

一元函数中，当 $x\to a$ 时 $f(x)$ 以 l 为极限这一句话意味着：当 P 无限制地逼近于点 P_0（数轴上以 a 为坐标的点）时，函数 $f(P)$ 就无限地逼近 l，并记为

$$\lim_{P\to P_0} f(P)=l.$$

类似地，可引入二元函数值 $f(P)$ 极限概念如下：

定义，设函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 的某个邻域 $U(P_0,\delta)$ 内（以 P_0 为中心，以 δ 为半径的某个小圆域内）有定义。又 P 是 $U(P_0,\delta)$ 内任一点，如果 P 以各种可能方式无限的逼近 P_0 时，函数值 $f(P)$ 均无限制地接近某一常数 l，就称函数 $f(x,y)$ 当 $P\to P_0$ 时有极限 l，并记为

$$\lim_{P\to P_0} f(P)=\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=l.$$

在这个定义中，特别要强调的是以各种可能方式这一句话。由于考察的点 P 是在平面上变动的，因此它趋于 P_0 的情况就比直线情况复杂得多。当一元函数在某一点左极限和右极限存在且相等时，函数在这一点的极限就存在。而对于二元函数的极限，不仅要求以某一些方式趋向于这一点时，极限存在且相等，而且要求依任意方式趋向于这一点时极限都存在且相等。

例　函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2} & (x,y\text{ 不同时为零}),\\ 0 & (x=y=0).\end{cases}$$

显然当点 $P(x,y)$ 沿 ox 轴和 oy 轴趋于点 $(0,0)$ 时，它们的极限存在而且相等，即

沿 ox 轴，　$\lim\limits_{x\to 0} f(x,0)=0,$

沿 oy 轴，　$\lim\limits_{y\to 0} f(0,y)=0.$