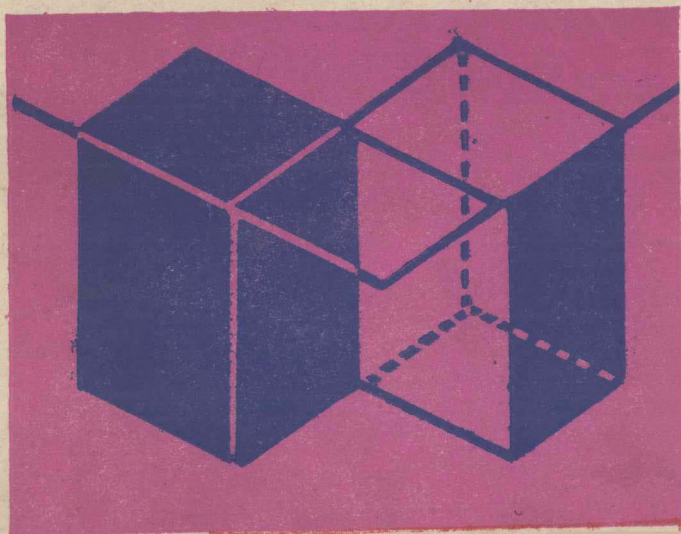


高级中学课本

立体几何全一册

(必修)

学习指导



人民教育出版社 重庆出版社

495661

G633.634
01

高级中学课本

立体几何全一册(必修)

学习指导

《学习指导》编写组 编

1-5

人民教育出版社 重庆出版社

样

编委：（按姓氏笔画排列）

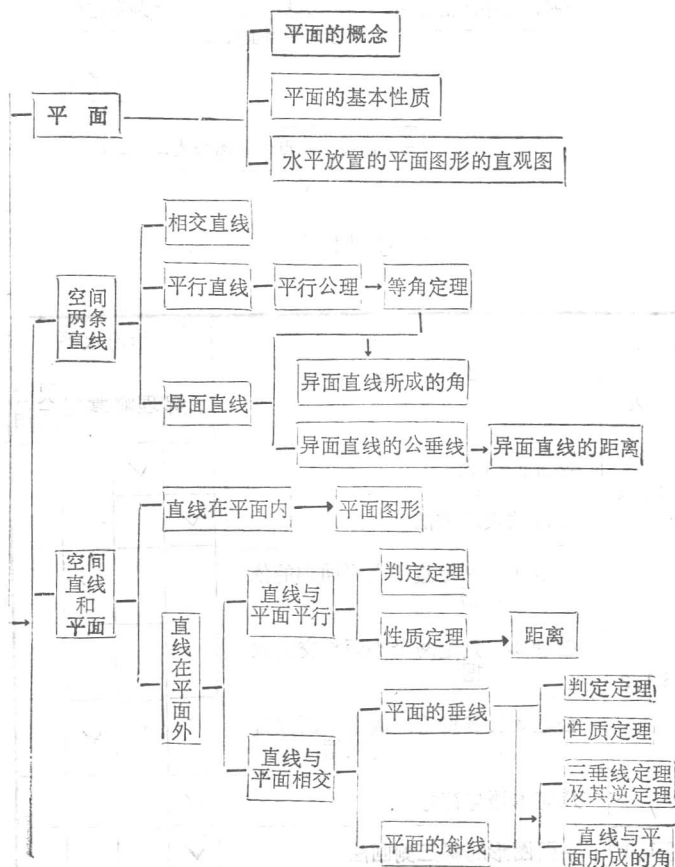
冯瑞奇	刘太丰	刘桂元	刘承升	刘瑞怀
邵广仁	肖洪远	余晓灵	陈继荣	周宗贤
徐兴华	唐果南	傅地明	蒋国昌	蒲华清
作者：蒋宗刚	胡安浦			

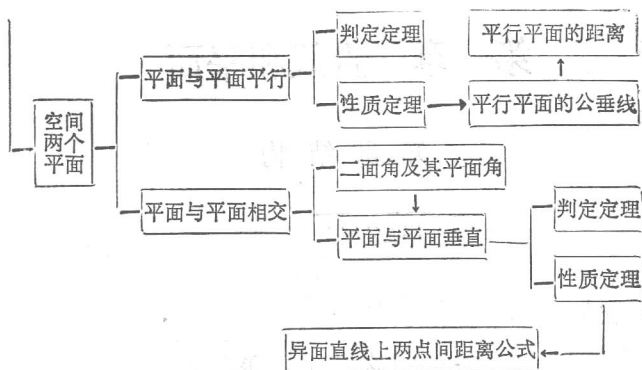
目 录

第一章 直线和平面.....	(1)
知识结构.....	(1)
学习目标.....	(2)
第Ⅰ单元 平面.....	(5)
第Ⅱ单元 空间两条直线.....	(10)
第Ⅲ单元 空间直线和平面.....	(16)
第Ⅳ单元 空间两个平面.....	(24)
章末复习题.....	(31)
第二章 多面体与旋转体.....	(42)
知识结构.....	(42)
学习目标.....	(43)
第Ⅰ单元 多面体.....	(44)
第Ⅱ单元 旋转体.....	(62)
第Ⅲ单元 多面体与旋转体的体积.....	(76)
章末复习题.....	(97)
立体几何总复习题.....	(105)
附 参考答案.....	(111)

第一章 直线和平面

知识结构





学 习 目 标

单元	节次	知 识 要 点	学 习 水 平			
			了解	理解	掌握	灵活运用
I	§ 1.1	平面的概念		✓		
		平面的表示方法	✓			
	§ 1.2	公理 1: 判定直线在平面内的依据			✓	
		公理 2: 判定两个平面相交的依据			✓	
		公理 3 及其推论: 确定平面位置的依据			✓	
		几何术语与符号	✓			
	§ 1.3	平面图形的斜二测画法	✓			

续 表

单元	节次	知 识 要 点	学习水平			
			了解	理解	掌握	灵活运用
I	§ 1.4	空间两条直线的位置关系		✓		
		空间两条直线位置关系的图形表示	✓			
	§ 1.5	公理 4: 平行线的传递性			✓	
		等角定理: 空间两个角相等的判定依据			✓	
	§ 1.6	两条异面直线所成的角		✓		
		两条异面直线的公垂线		✓		
		两条异面直线的距离 (计算已给出公垂线的距离)			✓	
II	§ 1.7	空间直线和平面位置关系		✓		
		直线和平面位置关系的图形表示	✓			
	§ 1.8	直线与平面平行的判定			✓	
		直线与平面平行的性质			✓	
	§ 1.9	直线和平面垂直的概念		✓		
		直线和平面垂直的判定			✓	
		直线和平面垂直的性质			✓	
		点到平面的距离		✓		
		直线与平面的距离		✓		

续 表

单元	节次	知 识 要 点	学习水平			
			了解	理解	掌握	灵活运用
Ⅲ	§ 1.10	斜线在平面上的射影		✓		
		平面的垂线和斜线长定理		✓		
		直线与平面所成的角		✓		
	§ 1.11	三垂线定理				✓
		三垂线定理的逆定理				✓
Ⅳ	§ 1.12	空间两个平面的位置关系		✓		
		两个平面位置关系的图形表示	✓			
	§ 1.13	两个平面平行的判定			✓	
		两个平面平行的性质			✓	
		两个平面的距离		✓		
	§ 1.14	二面角		✓		
		二面角的平面角			✓	
	§ 1.15	两个平面垂直的概念		✓		
		两个平面垂直的判定			✓	
		两个平面垂直的性质			✓	
		异面直线上两点间的距离公式		✓		

第 I 单元 平 面

学习指导

本单元的主要内容是平面的概念、性质，以及平面图形直观图的画法。在初中，我们学习了平面几何的有关知识，但是，还无法解决实际中的许多几何问题。我们需要把研究对象由平面图形扩展到空间图形，这就涉及到一门研究空间点、线、面位置关系的古老学科——立体几何。平面是空间图形的基础，平面的基本性质是立体几何的理论基石。因此，应该了解平面的概念、平面及平面图形的画法，逐步提高空间想象能力；同时，还要掌握平面的基本性质，不断提高逻辑思维能力。

学习时，注意以下几点：

1. 平面的概念

平面是一个只描述不定义的最基本的概念，数学中所说的平面在空间是无限延展着的。这有如直线无限延伸一样，直线把平面分成两部分，而平面把空间分成两部分。日常接触到的平整的面的实例都只是数学概念中所说平面的一部分。通常，用一个平行四边形来表示平面，但这并不是说平面有边界，或者说有形状。必要时，可以把平行四边形扩展出去，或用其它平面图形来表示平面。这与直线本来是无限延伸的，但画图时只画一条线段来表示直线是同道理。

公理 1 不仅是判定直线在平面内的理论依据，同时也表明了平面的无限性。直线是无限延伸的，如果平面有限，那么直线怎能限制在平面内呢？

2. “有且只有”的含义

有关平面的公理和推论，以及其它内容中，经常使用“有且只有”一词。“有”说明图形的存在性，“只有”说明图形的唯一性。数学中的“只有一个”并不保证符合条件的图形一定存在，“有一个”并不保证符合条件的图形唯一。“有且只有”指符合条件的图形不但存在，而且唯一，也就说明这个图形是完全确定的，因此，“有且只有”与“确定”是同义语。

例如公理2，给出了两个平面相交于一条直线的依据。由于平面在空间是无限伸展着的，如果两个平面有一个公共点，那么它们就有过这个点的一条公共直线，也只有这一条交线。

又如公理3的推论3的证明，应证明存在性和唯一性两个方面。

推论3 经过两条平行直线，有且只有一个平面。

证明：因为当两条直线在同一平面内，且不相交时叫做平行直线，所以两条平行直线 a 和 b 必在某个平面 α 内。就是说，过两条平行直线有一个平面。

如果过 a 和 b 还有一个平面 β ，那么在 α 上的任意一点 A 一定在 β 内，这样过点 A 和直线 b 有两个平面 α 和 β ，这与推论1矛盾，所以过平行直线 a 和 b 的平面只有一个。

3. 几何术语与表示符号

本单元使用了 $\in$ 、 $\subset$ 、 $\cap$ 等符号。它们是借用的集合符号，读法上仍用几何语言。如 $A \in a$ ，读作：点 A 在直线 a 上； $a \subset \alpha$ ，读作：直线 a 在平面 α 内； $\alpha \cap \beta = l$ ，读作：平面 α 与 β 相交于直线 l 。

由于是借用集合符号，使用时原则上不违背集合符号的

含意，但为了简便起见，有几个地方记法有所不同。后面用到的有： $a \cap b = A$ ， $a \cap \alpha = A$ ，仍分别读作：直线 a 与 b 相交于点 A ，直线 a 与平面 α 相交于点 A 。

空集 ϕ 、并集运算符号 $\cup$ 等没有借用。

4. 空间问题平面化

确定平面的位置是将空间图形问题转化为平面图形问题来解决的基础。在研究空间图形时，往往是将空间图形的问题，通过线面之间关系的转化，归纳到一个平面内，再利用平面图形的性质来解决。这种处理立体几何问题的基本途径和方法，叫做空间问题的平面化。

练习1-1

一、选择题（有且仅有一个结论正确，下同）

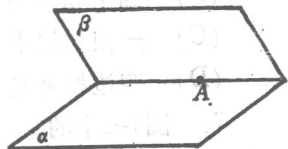


图 1-1

1. 如图1-1，点 A 与平面 α 和 β 的位置关系是 C

(A) $A \in \alpha$ ，且 $A \notin \beta$ (B) $A \in \beta$ ，且 $A \notin \alpha$

(C) $A \in \alpha$ ，且 $A \in \beta$ (D) $A \notin \alpha$ ，且 $A \notin \beta$.

2. 平面 α 和 β 有公共点 A 和公共直线 a ，可表示为 C

(A) $\alpha \cap \beta = A$ ，且 $\alpha \cap \beta = a$

(B) $a \cap \alpha = A$ ，且 $a \cap \beta = A$

(C) $\alpha \cap \beta = a$ ，且 $A \in a$

(D) $A \in \alpha$ ，且 $A \in \beta$ ，但 $A \notin a$.

3. 下列条件中，能确定一个平面的是 D

(A) 三个点 (B) 一条直线和一个点

(C) 两条直线 (D) 一个锐角

4. 下列命题中，可能不正确的是 D

- (A) 平面内一条直线把平面分成两个半平面
- (B) 一个平面把空间分成两个部分
- (C) 有公共点的两个平面把空间分成四个部分
- (D) 有公共点的三个平面把空间分成六部分。

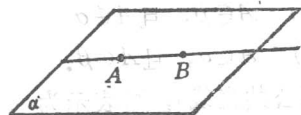
5. 下列图形不一定是平面图形(即图形的各部分共面)的是 **B**。

- (A) 角 (B) 四边形 (C) 三角形 (D) 菱形

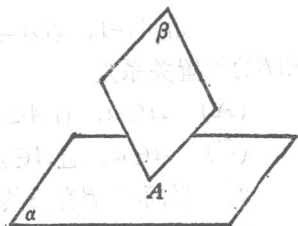
6. 在空间, 下列命题正确的是 **C**。

- (A) 两组对边相等的四边形是平行四边形
- (B) 四个角都相等的四边形是矩形
- (C) 一组对边平行且不相等的四边形是梯形
- (D) 四边相等且有直角的四边形是正方形。

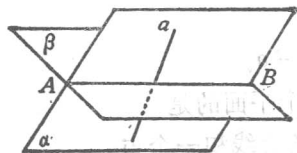
7. 图 1-2 中的直观图中, 画法正确的是 **D**。



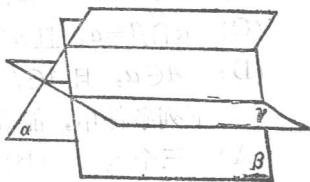
(A)



(B)



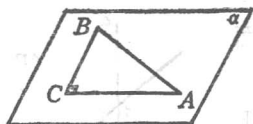
(C)



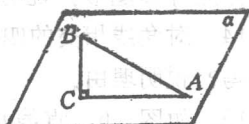
(D)

图 1-2

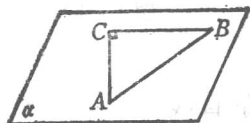
8. 图1-3有关水平放置的 $Rt\triangle ABC$ 的直观图中, 画法正确的是 **A**



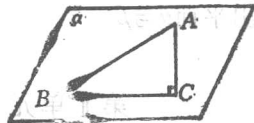
(A)



(B)



(C)



(D)

图 1-3

二、作图题

画出下列图形的直观图:

9. 水平放置的钝角三角形, 如图1-4.

10. 水平放置的任意四边形

$ABCD$, 如图1-5.



图 1-4

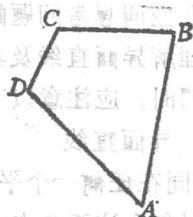


图 1-5

11. 长、宽、高分别为3cm、4cm和5cm的长方体.

12. 竖直放置的三个平面, 它们有一条公共直线.

三、解答题

13. 如果平面 α 和 β 有两个公共点 A 、 B ，那么它们的公共部分是什么图形？说明理由。

14. 对角线相交的四边形是平面图形吗？说明理由。

15. 如图1-6，直线 a 、 b 相交于 A ，点 P 在直线 a 、 b 所确定的平面外。 a 与 P 确定平面 α ， b 与 P 确定平面 β 。试画出平面 α 与 β 。

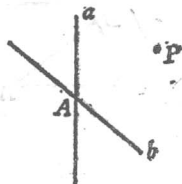


图 1-6

第Ⅱ单元 空间两条直线

学习指导

本单元的主要内容是空间两条直线的位置关系和异面直线所成的角。在平面几何中，两条直线或平行、或相交，二者必居其一。研究范围扩展到空间以后，出现了两条直线既不平行，也不相交的情形，这就是异面直线。今后，应当逐步养成在空间思考问题的习惯，要弄清空间两条直线的位置关系，理解异面直线及其有关的概念。

学习时，应注意以下几点：

1. 异面直线

“不同在任何一个平面内的两条直线”，是指不存在一个平面同时包含这两条直线，即这两条直线既不是相交直线，也不是平行直线。

由于“两条异面直线”有以上的特定含义，所以不能把它说成是“两条直线异面。”因为“直线异面”没有定义，容易被

理解为分别在两个平面内的直线。而分别在两个平面内的两条直线，不一定是异面直线，它们可能是平行直线，也可能是相交直线。

异面直线的直观图，应以平面作衬托，否则表现不出其特点。图1-7中的例子并非都反映了异面直线的特点，请予鉴别。

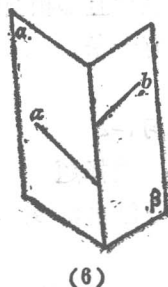
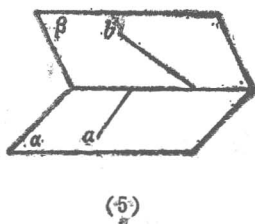
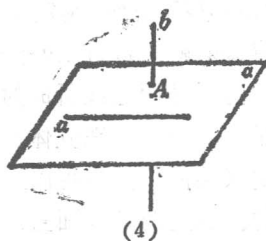
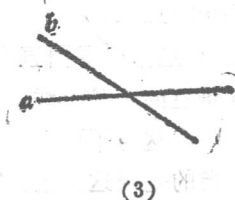
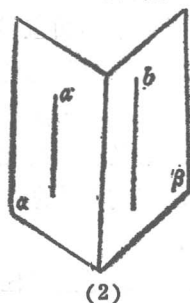
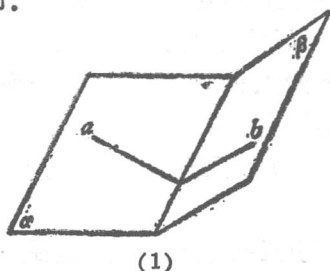


图 1-7

相交与平行是我们熟悉的两种位置关系，而异面直线对我们来说是陌生的。证明两条直线是异面直线，通常利用反证法，把它转化为相交直线或平行直线来处理。教材第11页例题的结论，也可作为判断异面直线的依据。

2. 异面直线所成的角

关于两条异面直线的角的定义：(1)把两条异面直线 a 、 b 所成的角，用两条相交直线 a' 、 b' 所成的锐角（或直角）来度量；(2)空间一点 O 是任意选取的。根据等角定理，异面直线 a 、 b 所成的角，与相交直线 a' 、 b' 所成的锐角（或直角）相等，而与交点 O 的位置无关；(3)为了方便，可将点 O 取在 a 或 b 上。

此外，经过空间任意一点 O 引直线 a 的平行线的途径是：(1)由点 O 和直线 a 确定平面 α ；(2)在 α 内过点 O 作 $a' \parallel a$ 。这样的直线 a' 就是过直线 a 外一点，平行于 a 的直线。

两条异面直线所成的角为 90° 时，称这两条异面直线互相垂直。因此，在立体几何中，相互垂直的两条直线，可以相交（共面），也可以不相交（异面），这与平面几何是不同的。但是两条异面直线的公垂线却指的是与这两条异面直线都垂直而且都相交的直线。两条异面直线的公垂线有一条而且只有一条。

练习1-2

一、选择题

1. 已知 a 、 b 、 c 是空间的三条直线，且 $a \perp b$ ， $b \perp c$ ，则

(A) a 、 c 是异面直线 (B) a 与 c 相交

(C) a 与 c 平行 (D) a 与 c 的位置关系不能确定

2. 两条异面直线,指的是

(A) 在空间内不相交的两条直线

(B) 分别位于两个不同平面内的两条直线

(C) 不能在同一平面内的两条直线

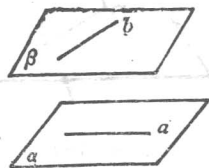
(D) 平面外的一条直线和平面内的一条直线

3. θ 为两条异面直线所成的角,则 θ 的取值范围是

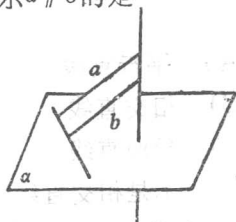
(A) $0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$ (B) $0^\circ < \theta < 180^\circ$ (C) $0^\circ < \theta < 90^\circ$

(D) $0^\circ < \theta \leq 90^\circ$.

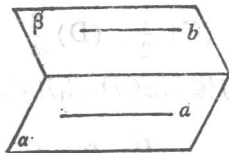
4. 图1-8中的直观图中,表示 $a \parallel b$ 的是



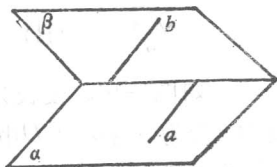
(A)



(B)



(C)



(D)

图 1-8

5. 过四条互相平行的直线最多可以确定的平面的个数为

(A) 8 (B) 6 (C) 4 (D) 2.