



普通高等教育“十二五”规划教材

Experiment of
University Mathematics
大学数学实验

杨爱民 刘春风 屈静国 主编



科学出版社

普通高等教育“十二五”规划教材

大学数学实验

杨爱民 刘春风 屈静国 主编

张永利 杨亚锋 张焕成 张秋娜 参编

科学出版社

北京

内 容 简 介

本书是普通高等教育“十二五”规划教材之一,是与刘春风、何亚丽、肖继先等主编的《高等数学》、《线性代数》、《概率论与数理统计》等教材配套的 Mathematica 实验教材。本书共六章,主要包括 Mathematica 软件介绍、高等数学实验、线性代数实验、概率论与数理统计实验等基本内容,此外还适当增加了数值计算方法实验和应用案例,为学生进一步使用 Mathematica 解决问题奠定了基础。

本书以基本知识为背景,以数学问题为载体,以 Mathematica 数学软件为工具,将数学知识、数学建模与计算机应用三者有机的结合起来,旨在培养学生应用数学知识解决实际问题的意识和能力。

本书可作为大学一、二年级开设的“大学数学实验”课程的配套教材及“数学建模”课程及其相关培训的辅助教材,也可供工程技术人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

大学数学实验/杨爱民,刘春风,屈静国主编. —北京:科学出版社,2012
(普通高等教育“十二五”规划教材)

ISBN 978-7-03-035650-5

I. ①大… II. ①杨… ②刘… ③屈… III. ①高等数学-实验-高等学校-教材 IV. ①O13-33

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 228400 号

责任编辑:祝元志 赖文华 / 责任校对:刘玉靖

责任印制:吕春珉 / 封面设计:耕者设计工作室

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码: 100717

<http://www.sciencep.com>

双青印刷厂印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2012 年 10 月第 一 版 开本:787×1092 1/16

2012 年 10 月第一次印刷 印张:12 1/2

字数:330 000

定价:30.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换<双青>)

销售部电话 010-62136131 编辑部电话 010-62137026(BA08)

版权所有,侵权必究

举报电话:010-64030229; 010-64034315; 13501151303

前 言

数学教学在整个人才的培养过程中至关重要。从小学到初中,再到大学乃至更高层次的科学研究都离不开数学。如今,人们越来越重视数学知识的应用,对数学课程的教学提出了更高的要求。

当面对一个数学问题,冥思苦想、反复尝试,终于求解完成时,人们都会有一种成功的愉悦。在这个过程中,我们用到了相关的数学概念、数学理论、数学公式和数学方法;经历了分析、推理、计算、观察并修正结果等一系列活动。这样的一个解题过程,就是一次“数学实验”。计算机出现之前,这样的“实验”活动是通过大脑的思维,借助纸和笔来完成的。在计算机高度发达的今天,这样的实验可以借助计算机来完成。

1989年,著名科学家钱学森教授在“中国数学会教学与科研座谈会”上提出:电子计算机的出现对数学科学的发展产生了深远的影响,理工科大学的数学课程是不是需要改造一番?20多年来,各校都在探索大学数学教学改革,而开设“数学实验”课程已成为共识,因为一方面“数学实验”课程可以在数学教学中对学生加强“用数学”的教育,培养学生应用数学知识解决实际问题的意识和能力;另一方面“数学实验”可以将数学教学与计算机应用结合起来,培养学生进行数值计算与数据处理能力,同时也可以激发学生学习数学的兴趣。

“数学实验”是大学数学课程的重要组成部分,是与高等数学、线性代数、概率论与数理统计等课程同步开设的重要教学环节,它将数学知识、数学建模与计算机应用三者融为一体,通过“数学实验”使学生深入理解数学基本概念、基本理论和基本方法,熟悉常用的数学软件,培养学生运用所学知识建立数学模型,使用计算机解决实际问题的能力。

我们开设“数学实验”课程已经有十多年的时间,对“数学实验”的认识也是一步步摸索过来,并且收到了不错的教学效果。特别是在实验课程中适当地嵌入了部分简单的数值计算的内容和程序,将经典的解析方法过渡到现代的数值方法,数学中一些抽象的问题可以形象地展示出来,提高了学生的学习兴趣。通过使用数学软件、数学实验建模,促使学生从实际问题出发,认真分析研究,建立简单数学模型,然后借助先进的计算机技术,最终找出解决实际问题的一种或多种方案,从而提高了学生的数学思维能力,为学生参加数学竞赛和数学建模打下了坚实的基础;同时也为学生进一步深造和参加工作打下一定的实践基础。

本书共六章,首先介绍 Mathematica 的基础知识和主要使用命令,使读者在最短时间内了解 Mathematica,并能够使用 Mathematica 数学软件解决实际问题;然后介绍了 Mathematica 在高等数学、线性代数以及概率论与数理统计中的应用;最后介绍了部分数值计算方法的内容和 Mathematica 程序,并给出了部分与专业结合的应用案例。

本书可作为高等院校各专业的专科生、本科生学习 Mathematica 数学软件的教材,以及作为数学实验课程的教材或者是在高等数学、线性代数、概率论与数理统计课程中加入数学实验内容的配套教材,也可供相关专业工程技术人员参考。

本书由杨爱民、刘春风、屈静国组织编写,参与本书编写的还有张永利、杨亚锋、张焕成、张秋娜。在编写过程中刘保相、肖继先和何亚丽三位教授为本书的编写提出了很好的意见和建议,在此表示衷心感谢!

教材中使用的数学软件以 Mathematica5.0 版本为准,书中的程序均在个人计算机中调试实现。由于作者水平有限,书中难免有不足之处,恳请各位读者多提宝贵意见,给予指正,以期不断完善。

2012年5月

目 录

前言

第一章 Mathematica 软件介绍	1
1.1 Mathematica 入门	1
1.1.1 Mathematica 的启动和运行	1
1.1.2 表达式的输入	3
1.1.3 Mathematica 的联机帮助系统	5
1.2 Mathematica 的基本量	7
1.2.1 数据类型和常数	7
1.2.2 变量	8
1.2.3 函数	9
1.2.4 表	12
1.2.5 表达式	14
1.2.6 常用的符号	16
1.3 Mathematica 的基本运算	16
1.3.1 多项式的表示形式	16
1.3.2 方程及其根的表达	18
1.3.3 求和与求积	20
第二章 微积分实验	22
2.1 函数图形与极限	22
2.1.1 实验目的	22
2.1.2 实验内容	22
习题	29
2.2 函数微分学	29
2.2.1 实验目的	30
2.2.2 实验内容	30
习题	35
2.3 中值定理及应用	36
2.3.1 实验目的	36
2.3.2 实验内容	36
习题	39
2.4 函数积分学	39
2.4.1 实验目的	40
2.4.2 实验内容	40

习题	58
2.5 无穷级数与函数逼近	59
2.5.1 实验目的	59
2.5.2 实验内容	59
习题	67
2.6 常微分方程解法	67
2.6.1 实验目的	67
2.6.2 实验内容	67
习题	71
第三章 线性代数实验	72
3.1 向量与矩阵的计算	72
3.1.1 实验目的	73
3.1.2 实验内容	73
习题	77
3.2 矩阵的秩与向量组的线性相关性	77
3.2.1 实验目的	78
3.2.2 实验内容	78
习题	80
3.3 线性方程组求解	80
3.3.1 实验目的	81
3.3.2 实验内容	81
习题	83
3.4 矩阵的特征值与特征向量	84
3.4.1 实验目的	84
3.4.2 实验内容	84
习题	86
3.5 施密特正交化和二次型的标准化	86
3.5.1 实验目的	87
3.5.2 实验内容	88
习题	92
第四章 概率论与数理统计实验	93
4.1 古典概型与伯努利模型	93
4.1.1 实验目的	93
4.1.2 实验内容	93
习题	95
4.2 随机变量的分布	95
4.2.1 实验目的	95
4.2.2 实验内容	95

习题	101
4.3 随机变量的数字特征	101
4.3.1 实验目的	101
4.3.2 实验内容	101
习题	104
4.4 统计量及其分布	104
4.4.1 实验目的	104
4.4.2 实验内容	105
习题	114
4.5 区间估计与假设检验	115
4.5.1 实验目的	115
4.5.2 实验内容	115
习题	120
4.6 方差分析与回归分析	121
4.6.1 实验目的	121
4.6.2 实验内容	122
习题	127
第五章 数值计算方法及实验	129
5.1 插值与拟合	129
5.1.1 知识要点	129
5.1.2 实验目的	131
5.1.3 实验内容	132
习题	136
5.2 线性方程组数值解法	137
5.2.1 知识要点	137
5.2.2 实验目的	141
5.2.3 实验内容	141
习题	145
5.3 数值积分	146
5.3.1 知识要点	146
5.3.2 实验目的	150
5.3.3 实验内容	150
习题	151
5.4 非线性方程的数值解法	152
5.4.1 知识要点	152
5.4.2 实验目的	156
5.4.3 实验内容	157
习题	159

5.5 常微分方程数值解法	159
5.5.1 内容要点	159
5.5.2 实验目的	161
5.5.3 实验内容	162
习题	165
第六章 Mathematica 应用案例	166
【案例 6.1】 怎样安全过河问题	166
1. 问题的提出与背景	166
2. 分析与求解	166
3. 计算过程	166
4. 结果分析	168
5. 思考问题	168
【案例 6.2】 食谱问题	168
1. 问题的提出与背景	168
2. 问题分析与建立模型	168
3. 计算过程	169
4. 结果分析	170
5. 思考问题	170
【案例 6.3】 水供应问题	171
1. 问题的提出与背景	171
2. 问题分析与建立模型	172
3. 计算过程	173
4. 结果分析	174
【案例 6.4】 盲人爬山	175
1. 问题的提出与背景	175
2. 分析与求解	175
3. 小结	181
【案例 6.5】 π 的近似计算	181
1. 问题的提出与背景	181
2. 分析与计算	182
3. 小结	186
【案例 6.6】 减肥配方的实现	186
1. 问题的提出与背景	186
2. 分析与求解	187
【案例 6.7】 交通流的分析	188
1. 问题的提出与背景	188
2. 分析与求解	188
主要参考文献	190

第一章 Mathematica 软件介绍

Mathematica 是由美国 Wolfram 公司研究开发的一个数学软件,它提供了与 Mathcad 和 Matlab 这两个著名数学软件同样强大的功能,能够完成符号运算、数学图形绘制甚至动画制作等多种操作。但与它们相比,Mathematica 显得小巧的多。以 Mathematica 2.2.1 版(Alpha 版)为例,安装盘只有四张 1.44M 的软盘,完全安装之后仅占不到 14M 的硬盘空间。它是由美国物理学家 Stephen Wolfram 领导的一个小组开发来进行量子力学研究的,软件开发的成功促使他们于 1987 年成立了 Wolfram 公司,并推出了该公司的商品软件 Mathematica 1.0 版,此后, Wolfram 通过对 Mathematica 的改进和扩充,又于 1991 年推出 2.0 版。1996 年推出 3.0 版,1999 年推出 4.0 版和 2003 年推出 5.0 版。目前最新版本是 8.0 版。本书介绍的是国内最常见的是 5.0 版本。Mathematica 已在世界上广为流传,得到一致好评。据统计报告显示,现在仅在美国就有十几万人经常性地使用该软件,用它解决研究和工程计算领域中的问题。


Mathematica 是一个交互式的计算系统,计算是在用户和 Mathematica 互相交换、传递信息数据的过程中完成的。Mathematica 系统所接受的命令都被称作表达式,系统在接受了一个表达式之后就对它进行处理(这个过程叫做对表达式求值),然后再把计算结果返回。

Mathematica 拥有广泛的数学计算功能,支持比较复杂的符号计算和数值计算,因此,早期主要在数学、物理等理论研究领域中流行。近几年,Wolfram 公司为了帮助工程技术人员克服应用 Mathematica 时所遇到的困难,正在开发以 Mathematica 为基础的各种软件包,已经推出的有工程分析软件包和小波分析软件包等。

1.1 Mathematica 入门

1.1.1 Mathematica 的启动和运行

Mathematica 是美国 Wolfram 研究公司生产的一种数学分析型的软件,以符号计算见长,也具有高精度的数值计算功能和强大的图形功能。

假设在 Windows 环境下已安装好 Mathematica5.0,启动 Windows 后,在“开始”菜单的“程序”中单击  Mathematica 5,就启动了 Mathematica5.0,在屏幕上显示如图 1.1 的 Notebook 窗口,系统暂时取名 Untitled-1,直到用户保存时重新命名为止。

输入 $1+1$,然后按下 $\text{Shif}+\text{Enter}$ 键,这时系统开始计算并输出计算结果,并给输入和输出附上次序标识 $\text{In}[1]$ 和 $\text{Out}[1]$,注意 $\text{In}[1]$ 是计算后才出现的;再输入第二个表达式,要求系统将一个二项式 x^5+y^5 展开,按 $\text{Shift}+\text{Enter}$ 键输出计算结果后,系统分别将其标识为 $\text{In}[2]$ 和 $\text{Out}[2]$,如图 1.2 所示。

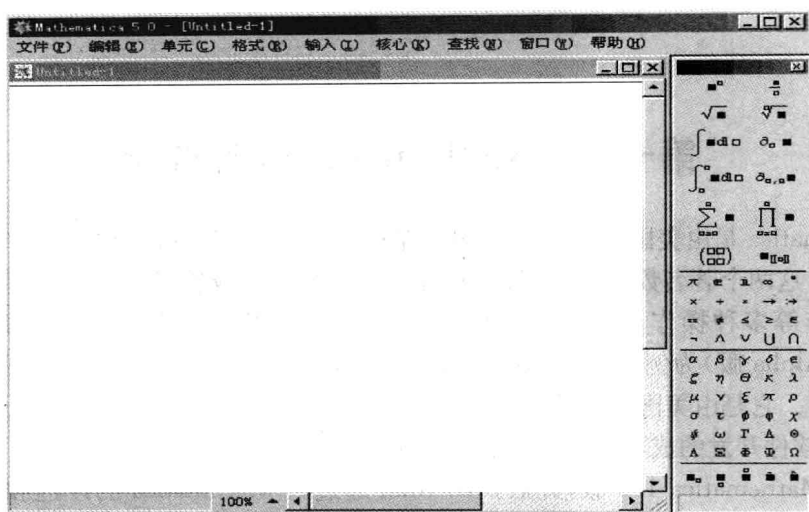


图 1.1 新建工作簿

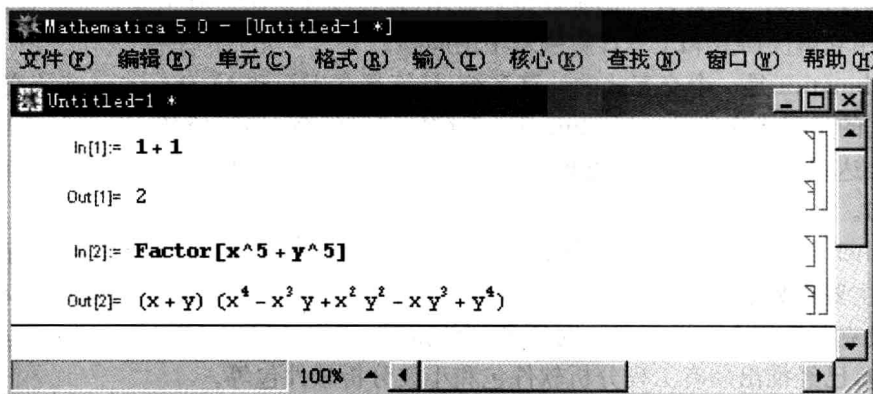


图 1.2 命令输入与输出

在 Mathematica 的 Notebook 界面下,可以用这种交互方式完成各种运算,如函数作图,求极限、解方程等,也可以用它编写像 C 语言那样的结构化程序。在 Mathematica 系统中定义了许多功能强大的函数,我们称之为内建函数(built-in function),直接调用这些函数可以取到事半功倍的效果。这些函数分为两类,一类是数学意义上的函数,如:绝对值函数 $\text{Abs}[x]$,正弦函数 $\text{Sin}[x]$,余弦函数 $\text{Cos}[x]$,以 e 为底的对数函数 $\log[x]$,以 a 为底的对数函数 $\log[a, x]$ 等;第二类是命令意义上的函数,如作函数图形的函数 $\text{Plot}[f[x], \{x, \text{xmin}, \text{xmax}\}]$,解方程函数 $\text{Solve}[\text{eqn}, x]$,求导函数 $\text{D}[f[x], x]$ 等。

必须注意的是:

(1) Mathematica 严格区分大小写,一般地,内建函数的首写字母必须大写,有时一个函数名是由几个单词构成,则每个单词的首写字母也必须大写,如:求局部极小值函数 $\text{FindMinimum}[f[x], \{x, x_0\}]$ 等。

(2) 在 Mathematica 中,函数名和自变量之间的分隔符是用方括号“[]”,而不是一般数学书上用的圆括号“()”,初学者很容易犯这类错误。

如果输入了不合语法规则的表达式,系统会显示出错信息,并且不给出计算结果,例如:要画正弦函数在区间 $[-10, 10]$ 上的图形,输入 `plot[Sin[x], {x, -10, 10}]`,则系统提示“可能有拼写错误,新符号‘plot’很像已经存在的符号‘Plot’”,实际上,系统作图命令“Plot”第一个字母必须大写,一般地,系统内建函数首写字母都要大写。再输入 `Plot[Sin[x], {x, -10, 10}]`,系统又提示缺少右方括号,并且将不配对的括号用紫色显示,如图 1.3 所示。

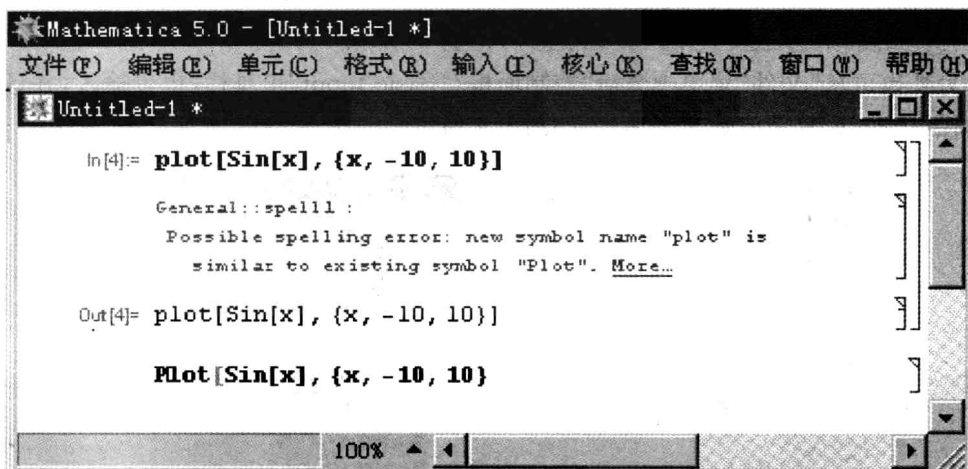


图 1.3 错误提示

一个表达式只有准确无误,方能得出正确结果。学会看系统出错信息能帮助我们较快找出错误,提高工作效率。完成各种计算后,点击“文件”“退出”退出,如果文件未存盘,系统提示用户存盘,文件名以“.nb”作为后缀,称为 Notebook 文件。以后想使用本次保存的结果时可以通过“文件”“打开”菜单读入,也可以直接双击它,系统自动调用 Mathematica 将它打开。

1.1.2 表达式的输入

Mathematica 提供了多种输入数学表达式的方法。除了用键盘输入外,还可以使用工具样或者快捷方式键入运算符、矩阵或数学表达式。

1) 数学表达式二维格式的输入

Mathematica 提供了两种格式的数学表达式,形如 $x/(2+3x) + y * (x-w)$ 的称为一维格式,形如 $\frac{x}{2+3x} + \frac{y}{x-w}$ 的称为二维格式。

你可以使用快捷方式输入二维格式,也可用基本输入工具栏输入二维格式。下面列出了用快捷方式输入二维格式的方法:

数学运算	数学表达式	按键
分式	$\frac{x}{2}$	x Ctrl + / 2
n 次方	x^n	x Ctrl + ^ n
开 2 次方	\sqrt{x}	Ctrl + 2 x
下标	x_2	x Ctrl + _ 2

例如输入数学表达式 $\frac{(x+1)^2}{\sqrt{2x+y}}$, 可以按如下顺序输入按键:

(, x, +, 1,), Ctrl + ^, +, 4, →, Ctrl + /, Ctrl + 2, 2, x, +, y

另外也可从“文件”菜单中激活“控制面板”“Basic Input”工具栏, 也可输入, 并且使用工具栏可输入更复杂的数学表达式, 如图 1.4 所示。

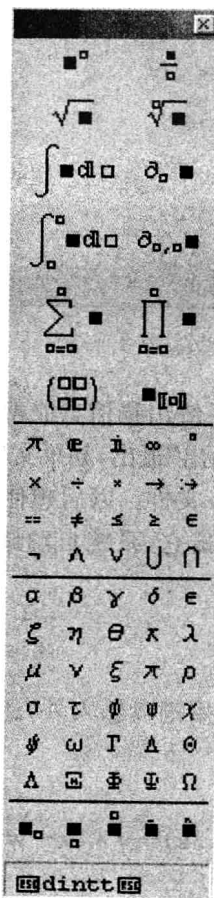


图 1.4 “Basic Input”工具栏

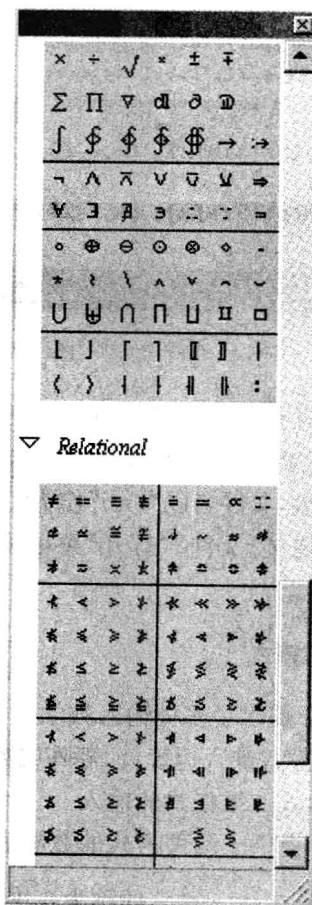


图 1.5 “Complete Characters”工具栏

2) 特殊字符的输入

Mathematica 还提供了用以输入各种特殊符号的工具栏。基本输入工具栏包含了常用的特殊字符(图 1.4),只要单击这些字符按钮即可输入。若要输入其他的特殊字符或运算符号,必须使用从“文件”菜单中激活“控制面板”“Complete Characters”工具栏,如图 1.5 所示,单击符号后即可输入。

1.1.3 Mathematica 的联机帮助系统

用 Mathematica 的过程中,常常需要了解一个命令的详细用法,或者想知系统中是否有完成某一计算的命令,联机帮助系统永远是最详细、最方便的资料库。

1) 获取函数和命令的帮助

在 Notebook 界面下,用 ? 或 ?? 可向系统查询运算符、函数和命令的定义和用法,获取简单而直接的帮助信息。例如,向系统查询作图函数 Plot 命令的用法 ? Plot 系统将给出调用 Plot 的格式以及 Plot 命令的功能,如果用两个问号“??”,则信息会更详细一些。? Plot * 给出所有以 Plot 这四个字母开头的命令。

2) Help 菜单

任何时候都可以通过按 Shift+F1 键或点击“帮助”菜单项“帮助浏览”,调出帮助菜单,如图 1.6 所示。

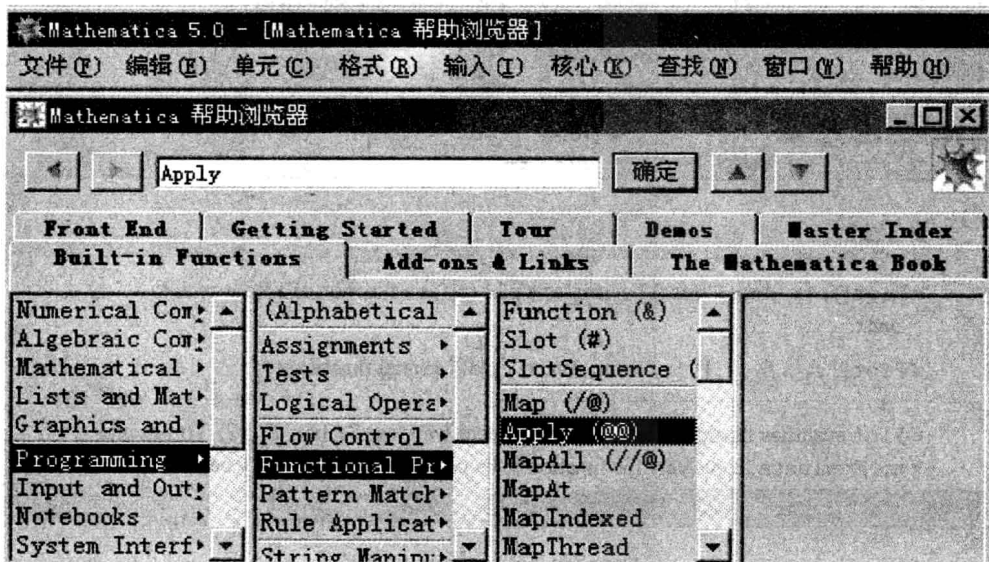


图 1.6 “帮助浏览”窗口

其中的各按钮用途如下:

Built-in Function	内建函数,按数值计算、代数计算、图形和编程分类存放
Add-ons&. Links	程序包附件和链接
The Mathematica Book	一本完整的 Mathematica 使用手册
Getting Started	初学者入门指南

Demos	多种演示
Tour	漫游 Mathematica
Front End	菜单命令的快捷键,二维输入格式等
Master Index	按字母命令给出命令、函数和选项的索引表

如果要查找 Mathematica 中具有某个功能的函数,可以通过帮助菜单中的 Mathematica 使用手册,通过其目录索引可以快速定位到自己要找的帮助信息。例如:需要查找 Mathematica 中有关解方程的命令,单击“The Mathematica Book”按钮,再单击“Contents”,在目录中找到有关解方程的节次,点击相应的超链接,有关内容的详细说明就马上调出来了。如果知道具体的函数名,但不知其详细使用说明,可以在命令按钮 Goto 右边的文本框中键入函数名,按回车键后就显示有关函数的定义、例题和相关联的章节。例如,要查找函数 Plot 的用法,只要在文本框中键入 Plot,按回车键后显示 Plot 函数的详细用法和例题的窗口,如图 1.7 所示。

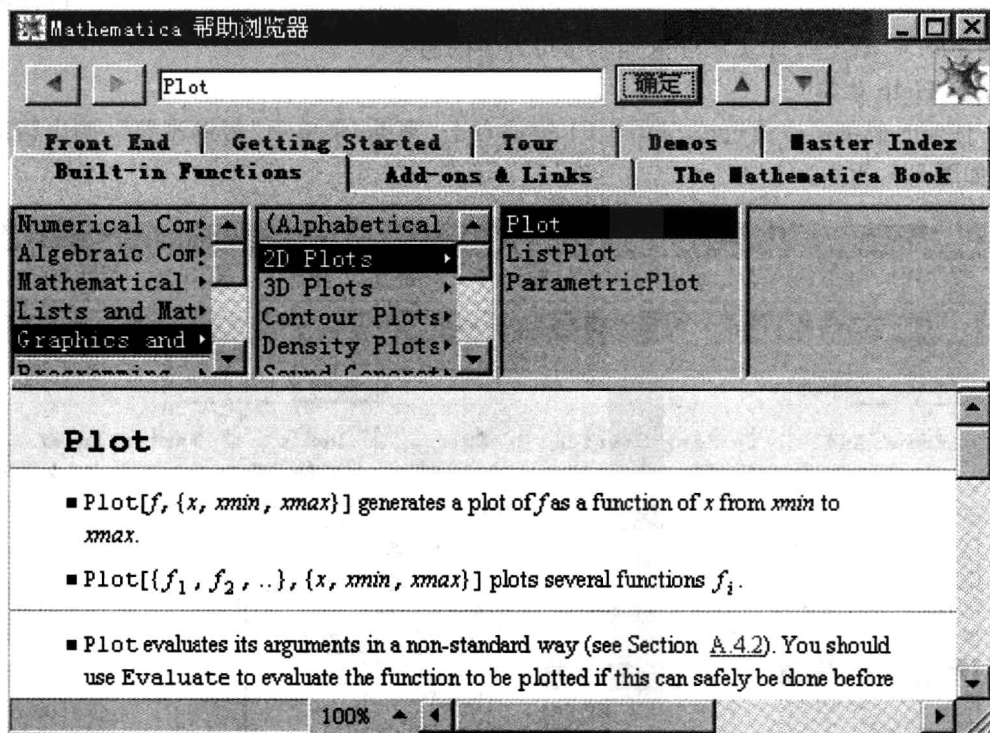


图 1.7 Plot 函数帮助窗口

如果已经确知 Mathematica 中有具有某个功能的函数,但不知具体函数名,可以点击 Built-in Functions 按钮,再按功能分类从粗到细一步一步找到具体的函数,例如要找画一元函数图形的函数,点击 Built-in Functions → Graphics and Sound → 2D Plots → Plot,找到 Plot 的帮助信息(图 1.7)。

1.2 Mathematica 的基本量

1.2.1 数据类型和常数

1) 数值类型

在 Mathematic 中,基本的数值类型有四种,即整数、有理数、实数和复数。

如果你的计算机的内存足够大,Mathematica 可以表示任意长度的精确实数,而不受所用的计算机字长的影响。整数与整数的计算结果仍是精确的整数或是有理数,例如 2 的 100 次方是一个 31 位的整数:

```
In[1]: = 2^100
```

```
Out[1] = 1267650600228228229401496703205376
```

在 Mathematica 中允许使用分数,也就是用有理数表示化简过的分数。当两个整数相除而又不能整除时,系统就用有理数来表示,即有理数是由两个整数的比来组成如:

```
In[2]: = 12345/5555
```

```
Out[2] = 24691111
```

实数是用浮点数表示的,Mathematica 实数的有效位可取任意位数,是一种具有任意精确度的近似实数,当然在计算的时候也可以控制实数的精度。实数有两种表示方法:一种是小数,另外一种是用指数方法表示的,如:

```
In[3]: = 0.239998
```

```
Out[3] = 0.23998
```

```
In[4]: = 0.12 * 10^11
```

```
Out[4] = 0.12 * 10^11
```

实数也可以与整数,有理数进行混合运算,结果还是一个实数。

```
In[5]: = 2 + 1/4 + 0.5
```

```
Out[5] = 2.75 小数表示
```

复数是由实部和虚部组成,实部和虚部可以用整数、实数、有理数表示。在 Mathematica 中,用 I 表示虚数单位,如:

```
In[6]: = 3 + 0.7I
```

```
Out[6] = 3 + 0.7i
```

2) 不同类型数的转换

在 Mathematica 的不同应用中,通常对数字的类型要求是不同的。例如在公式推导中的数字常用整数或有理数表示,而在数值计算中的数字常用实数表示。在一般情况下在输出行 Out[n] 中,系统根据输入行 In[n] 的数字类型对计算结果做出相应的处理。如果有一些特殊的要求,就要进行数据类型转换。

在 Mathematica 中的提供以下几个函数达到转换的目的:

N[x] 将 x 转换成实数

N[x, n] 将 x 转换成近似实数,精度为 n

Rationalize[x] 给出 x 的有理数近似值

Rationalize[x, dx] 给出 x 的有理数近似值, 误差小于 dx

举例:

In[1]: = N[5/3, 20]

Out[1] = 1.66666666666666666667

In[2]: = N[%, 10] % 表示上一输出结果, 即 % = 1.666666666666666667

Out[2] = 1.666666667 第二个输出是把上面计算的结果变为 10 位精度的数字

In[3]: = Rationalize[%]

Out[3] = 53

3) 数学常数

Mathematica 中定义了一些常见的数学常数, 这些数学常数都是精确数。

Pi 表示 $\pi = 3.14159\dots$

E 自然对数的底 $e = 2.71828\dots$

Degree 1 度, $\pi/180$ 弧度

I 虚数单位 i

Infinity 无穷大 ∞

-infinity 负无穷大 $-\infty$

GondenRatio 黄金分割数 0.61803

数学常数可用在公式推导和数值计算中, 在数值计算中表示精确值, 如:

In[1]: = Pi^2

Out[1] = π^2

In[2]: = Pi^2//N

Out[2] = 9.8696

4) 数的输出形式

在数的输出中可以使用转换函数进行不同数据类型和精度的转换。另外对一些特殊要求的格式还可以使用如下的格式函数:

NumberForm[expr, n] 以 n 位精度的实数形式输出实数 expr

ScientificFormat[expr] 以科学记数法输出实数 expr

EngineeringForm[expr] 以工程记数法输出实数 expr

例如:

In[1]: = N[Pi^30, 30]

Out[1] = 8.21289330402749581586503585434 $\times 10^{14}$

In[2]: = NumberForm[%, 10]

Out[2]//NumberForm = 8.212893304 $\times 10^{14}$

下面的函数输出按工程记数法表示的指数可被 3 整除的实数:

In[3] = EngineeringForm[%%] %% 表示上两步的输出结果, 即 Out[1]

Out[3]//EngineeringForm = 821.289330402749581586503585434 $\times 10^{12}$

1.2.2 变量

1) 变量的命名

Mathematica 中内部函数和命令都是以大写字母开始的标示符, 为了不会与它们混