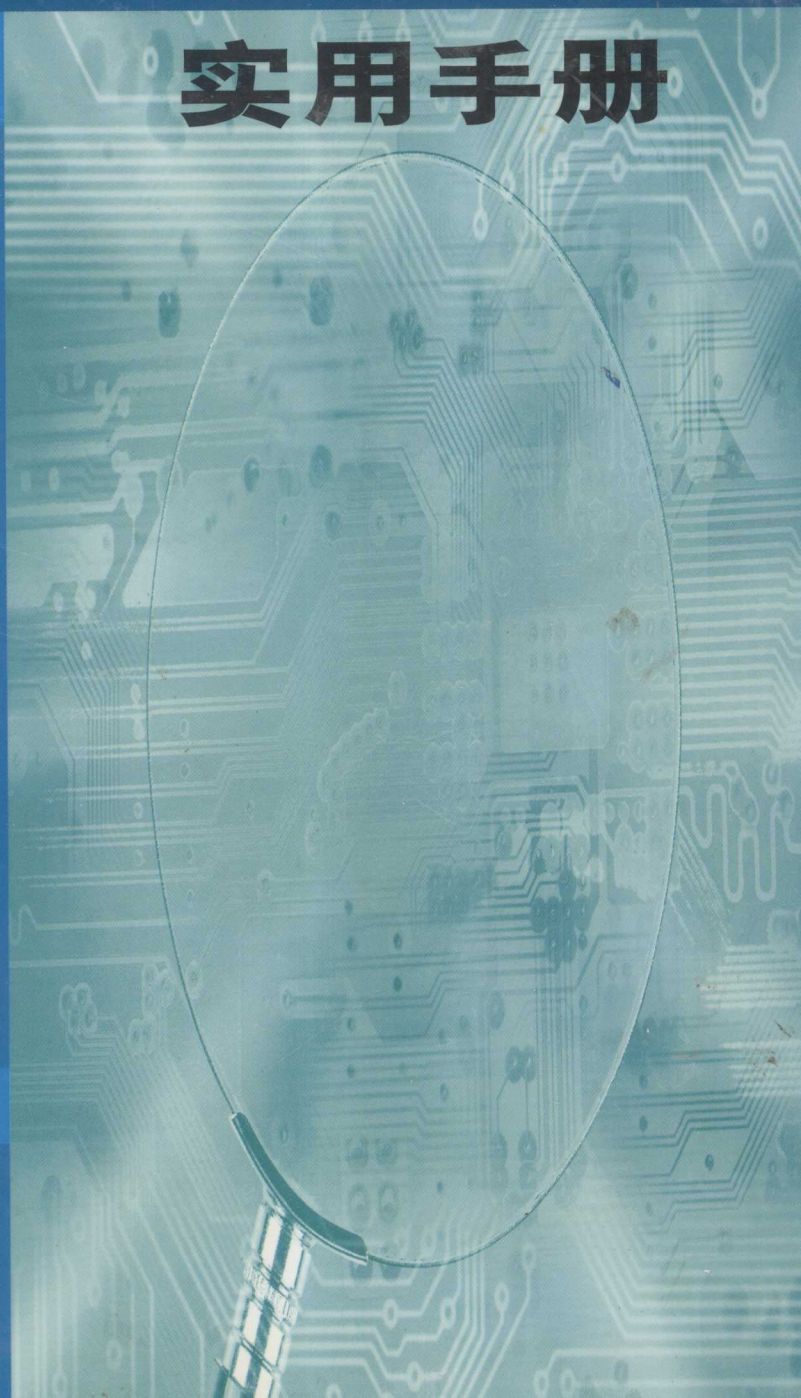


电子线路设计、检验、测试

实用手册

主编：何云强

北京科大电子出版社

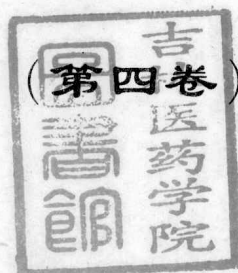




医药学院610 2 02475527

电子线路设计、检验、测试 实用手册

主编:何云强



北京科大电子出版社

第十篇

电子线路测试

第一章 误差理论与测试不确定度分析

第一节 测试误差

一、测量误差的基本概念

测量就是通过实验来求出被测量的量值,因此测量过程就要涉及到标准和误差这两个重要问题。首先,求出被测量的量值的过程实际上是把待测量直接或间接地与一个同类已知量相比较,而拿这个已知量作为比值单位,求出被测量与其比值,这个比值连同单位一起作为被测量的量值。所以在测量过程中必须要有一个体现计值单位的量作为标准,而且大家要采用同一标准,测量结果才有意义。其次,人们通过各种方法所得到的测量值与真值之间总是有差别的,这个差别就是测量误差。

1. 参考标准

测量中所使用的标准称为计量标准,一般来说,计量标准有以下三种类型:

(1)用理论来定义计量标准的真值 例如,电流的计量标准理论安培的定义为:流过真空中相距 1m 的两条无限小圆形截面的平行导线而能在此两导线间产生 $2 \times 10^{-7} \text{ N/m}$ 相互作用力的恒定电流。这样的真值是理想的概念,实际上是不可知的。因为要知道它,就必须测量它,要测量它又需要用某种标准作比较,这样陷入无穷的循环而仍然得不到真值。所以绝对的真值如同真理一样,是不可知的,人类只能通过科学技术的不断进步而无限地逼近它。

(2)指定值 A_s 由于真值是不可知的,所以一般由国家设立各种尽可能维持恒定不变的实物标准,以法令的形式指定以它所体现的量值作为计量单位的指定值。例如,指定以国家天文台保存的铯钟组所产生的特定条件下铯原子射束超精细能级跃迁频率的平均值作为 9192 631770 Hz,或者说把这种微波振荡的 9192631770 个周期的平均持续时间作为 1 原子秒。再例如,指定以国家计量局保存的铂铱合金圆柱体千克原器的质量为 1 kg。在国际上,通过互相比对来保证各个国家间在一定程度上的相互一致。

(3)实际值 A 在日常大量的测量中,不可能一一与国家基准直接比对,所以国家还设立了由一系列各级计量标准构成的量值传递网,把国家基准所体现的计量单位通过逐级比对传递到千百万日常使用的工作仪器或量具中去。每一级比对中,都以上一级标准器的量值作为近似真值,称之为实际值。

2. 测量误差与测量不确定度

科学研究的实际证明,所有的测量都受到误差的影响。我们已经知道,在一定的时空

条件下,一个量的真值是一个客观存在的确定数值,而在不同的时空条件下,量的真值往往是不同的。在测量过程中,当我们对同一物理量进行多次重复测量时,测量结果并不一样,这就是由于人们对客观规律认识的局限性,测量器具不准确,实验手段不完善,周围环境的影响,测量人员技术水平高低等原因,使得测量值只能反映它与被测量某种程度上的近似,这种近似是用误差来衡量的。评定测量结果是否有效或有效程度如何,也是用误差来衡量的。测量技术水平、测量结果的可靠性、测量工作的全部意义和价值都在于误差的大小。

不确定度是建立在误差理论基础上的一个新概念。误差的数字指标称为不确定度,它表示由于测量误差的存在而对被测量的真值缺乏了解的程度,是所给出的测量值的可能含有的(未知的)误差出现范围的一种评定。一个测量结果,只有当知道它的测量不确定度时才有意义。即一个完整的测量结果,不仅要表示其量值大小,还应同时给出相应的测量不确定度,以表明该测量结果的可信程度。

长期以来,国内外对误差理论以及测量不确定度的概念、符号和表达式存在着不同程度的分歧和混乱,造成了国际间交流的困难。为此,国际计量局于1980年作出了《实验不确定度的规定建议书 INC-1(1980)》,国际计量委员会随后采纳了该建议书,这一建议书使不确定度的计算及说明在国际上有了共同的基础。近10多年来,在 INC-1(1980)的基础上,不确定度的评定及表示得到了进一步的发展。1993年国际不确定工作组制定了《Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement》,经国际计量局等七个国际组织批准实行,由国际标准化组织(ISO)公布。我国在1991年由国家技术监督局批准了技术规范 JJG1027-91《测量误差及数据处理》,并于1992年10月实施(试行)。该技术规范规定了我国要以 INC-1(1980)《建议书》为依据,统一理解测量不确定度的概念。本教材摒弃旧的对不确定度的描述,采用了符合国际和国家标准的对误差理论和测量不确定度的表征方法。

3. 研究误差理论的目的

由于在测量中误差是普遍存在的,所以研究误差的来源及其规律,减小和尽可能消除误差,以得到准确的实验结果是非常重要的。随着测量技术的发展,测量中的误差可以逐步减小,但不可能做到完全没有误差。有时即使为了减少一点误差也要化费大量人力和物力的代价,所以还要根据实际工作需要确定测量的精度。

我们研究误差理论的目的是:

(1)充分利用测量数据,合理、正确地处理数据,以在给定的测量条件下得出被测量的最佳估计值。

(2)根据数据处理的结果正确表示出测量不确定度。测量结果的使用与其不确定度有密切的关系,不确定度愈小,可信度越高,使用价值愈高;不确定度愈大,可信度愈低,使用价值也低。测量不确定度表示得过大,对产品质量会造成危害;过小则在人力、物力方面造成浪费。

(3)正确地分析误差来源及规律,以便在测量中合理地选择仪器、方法及环境,消除不利因素,完善检测手段,提高测量准确度。

二、测量误差的定义

测量结果与被测量真值之差称为误差。按表示方法可把测量误差分为绝对误差和相对误差两种。

1. 绝对误差(absolute error)

设测量值为 x , 被测量真值为 A_0 , 则绝对误差 Δx 表示为

$$\Delta x = x - A_0$$

由于真值 A_0 一般无法得到, 故上式只有理论上的意义, 这样定义的绝对误差称为真误差(true error)。在实际中采用约定真值 A 。约定真值定义为: 对于给定目的而言, 被认为充分接近真值, 可用于替代真值的量值。约定真值 A 可以是前面提过的指定值、实际值、标准值等, 还可以是最佳估计值, 即修正过的多次测量的算术平均值。误差可表示为

$$\Delta x = x - A$$

在测量中还常用到修正值的概念。与绝对误差绝对值相等, 符号相反之值称为修正值, 一般用 C 表示:

$$C = -\Delta x = A - x$$

一般测量仪器在说明书中以数字、表格、曲线或公式的形式给出工厂检定的修正值。利用修正值可求出仪器的实际值

$$A = x + C$$

例如, 某电流表的量程为 1mA, 说明书中给出其修正值为 -0.01mA 。当用该电流表测一未知电流时, 其测量值为 0.78mA , 则可求出被测电流的实际值为

$$A = 0.78 + (-0.01) = 0.77\text{mA}$$

在自动测量仪器中, 修正值可存储在内存中, 测量时仪器根据预先编制好的程序对测量结果进行修正。

2. 相对误差(relative error)

绝对误差并不能完全表示测量的质量, 它的大小不能作为比较测量结果准确度高低的依据。当我们测量两个频率, 其中一个频率为 100Hz , 其绝对误差 Δf_1 为 1Hz ; 另一个频率为 100kHz , 其绝对误差 Δf_2 为 10Hz 。后者的绝对误差虽然是前者的 10 倍, 但后者的测量准确度却比前者为高。也就是说, 测量的准确程度, 除了与误差的大小有关以外, 还和被测量的大小有关。在绝对误差相等的情况下, 测量值越小, 测量的准确程度越低; 测量值越大, 测量的准确程度越高。为了能确切地反映测量的准确程度, 一般情况下采用相对误差的概念。相对误差又叫相对真误差, 它是绝对误差与被测量的真值之比, 常用百分数表示。若用 γ 表示相对误差, 则

$$\gamma = \frac{\Delta x}{A_0} \times (100\%)$$

在实用中, 真值往往代之以约定真值, 有时甚至代之以测量结果。

根据相对误差中所取的相对参考值, 相对误差又可分为:

1) 实际相对误差

实际相对误差,是用绝对误差 Δx 与被测量的实际值 A 的百分比值来表示的相对误差,记为

$$\gamma_A = \frac{\Delta x}{A} \times (100\%)$$

2) 标称相对误差

标称相对误差又称为示值相对误差,是用绝对值 Δx 与仪器的测定值 x 的百分比值来表示的,即

$$\gamma_x = \frac{\Delta x}{x} \times (100\%)$$

这种方法只适合在误差较小的情况下,作为一种近似计算。

3) 分贝误差 $\gamma[\text{dB}]$

在电子学及声学测量中常用分贝(dB)来表示相对误差,称为分贝误差。设一个有源网络的电压输出输入比为

$$A = V_{\text{out}}/V_{\text{in}}$$

则电路增益可以用分贝表示为

$$\alpha = 20\lg A(\text{dB})$$

当测量中存在误差时,增益 A 产生误差 ΔA ,则分贝表达式中也对应地产生一个误差 $\Delta\alpha$,所以

$$\begin{aligned}\alpha + \Delta\alpha &= 20\lg(A + \Delta A) \\ &= 20\lg A \left(1 + \frac{\Delta A}{A}\right) (\text{dB}) \\ \Delta\alpha &= 20\lg \left(1 + \frac{\Delta A}{A}\right) (\text{dB})\end{aligned}$$

分贝误差即可定义为

$$\gamma[\text{dB}] = 20\lg(1 + \gamma) (\text{dB})$$

例 某电流表测出电流值为 $96\mu\text{A}$,标准表测出的电流值为 $100\mu\text{A}$,求测量的相对误差和分贝误差。

解 绝对误差

$$\Delta x = 96 - 100 = -4(\mu\text{A})$$

实际相对误差

$$\gamma_A = \frac{\Delta x}{A} = \frac{-4}{100} \times 100\% = -4\%$$

分贝误差

$$\begin{aligned}\gamma[\text{dB}] &= 20\lg[1 + (-0.04)] \\ &= -0.355\text{dB}\end{aligned}$$

从上面的公式和例子可见,分贝误差只是相对误差的一种表示形式。当相对误差为正时,分贝误差也是正值;反之亦然。

4) 满度相对误差 γ_m

满度相对误差又称为引用误差,定义为绝对误差 Δx 与仪器的满度值 x_m 之比,记为

$$\gamma_m = \frac{\Delta x}{x_m} \times (100\%)$$

前面所列出的各种相对误差都是用来衡量测量的准确程度,用它们来衡量仪器的准确度就不合适。因为相对误差随着分母上的被测量而变化,而对于仪器所用的一般磁电式电表来说,即使表头指针偏转到不同位置,由此引起的磁场分布、机械摩擦及游丝扭矩

等的不均匀性皆可忽略不计,即在一个量程内可认为 Δx 是常数。满度相对误差给出的就是某量程下的绝对误差的大小,适合用来表示电表或仪器的准确度。电工仪表正是按 γ_m 之值来进行分级的,例如 1.0 级的电表,就表明其 $|\gamma_m| \leq 1.0\%$ 。如果该电表同时有几个量程,则所有量程均有 $|\gamma_m| \leq 1.0\%$ 。很显然,在不同的量程段内,仪表所引起的绝对误差是不同的。

常用电工仪表分为 0.1, 0.2, 0.5, 1.0, 1.5, 2.5 及 5.0 七级,分别表示它们的满度相对误差限的百分比。要注意的是,准确度等级在 0.2 级以上的电表属于精密仪表,使用时要求较高的工作环境及严格的操作步骤。在同一量程范围内,电流表的绝对误差 Δx 并不是常数。

例 现有两块电压表,其中一块表是量程为 100V 的 1.0 级表,另一块是量程为 10V 的 2.0 级表,用它们来测 8V 左右的电压,选用哪一块表更合适?

解 根据满度相对误差及表的等级的定义,若仪表等级为 S 级,则对应的满度相对误差 γ_m 的绝对值为 S%,则用该表测量所引起的绝对误差

$$|\Delta x| \leq x_m \times S\%$$

若被测量实际值为 x_0 ,则测量的相对误差

$$|\gamma| \leq \frac{x_m \times S\%}{x_0}$$

若使用 100V 1.0 级电压表,则测量误差为

$$|\Delta V_1| \leq 100 \times 1\% = 1V$$

若使用 10V 2.0 级电压表,则测量误差为

$$|\Delta V_2| \leq 10 \times 2\% = 0.2V$$

由此例可以看出,尽管第一块表的准确度级别高,但由于它的量程范围大,所引起的测量误差范围也很大。也就是说,当一个仪表的等级选定后,所产生的最大绝对误差与量程 x_m 成正比。为了减少测量中的误差,在选择量程时使指针尽可能接近于满度值,一般情况应使被测量的数值尽可能在仪表满量程的 2/3 以上。在选择测量仪表时,也不要片面追求仪表的级别,而应该根据被测量的大小,兼顾仪表的满度值和级别。

例 检定量程为 $100\mu A$ 的 2 级电流表,在 $50\mu A$ 刻度上标准表读数为 $49\mu A$,问此电流表是否合格?

解 $x_0 = 49\mu A$ $x = 50\mu A$ $x_m = 100\mu A$

$$\gamma_m = \frac{x - x_0}{x_m} \times 100\% = 1\% < 2\%$$

则此表在 $50\mu A$ 点是合格的。要判断该电流表是否合格,应在整个量程内取足够多的点进行检定。

三、测量误差的分类

按照测量误差的基本性质和特点,可以把误差分成三类:随机误差、系统误差和粗大误差。

1. 随机误差

定义 测量结果减去在重复条件下对同一被测量进行无限多次 ($n = \infty$) 测量结果的

平均值。

当误差中不含有系统误差时,该误差即为随机误差。由于实际上系统误差不可能完全掌握,另外无限多次的重复测量列也不可能实现,所以随机误差不可能准确地得出,实际中只能得到随机误差的估计值。

由于随机误差产生于多种因素的同时作用,这些因素互不相关,没有规律,其中每一因素对测量值的影响微小,如噪声干扰,电磁场的微小变化,空气扰动,大地微振等无规律的微小因素,这些因素的总和则会对测量值产生可以觉察到的影响。这表现在从宏观上看,测量条件虽然没有变,而当测量灵敏度足够高时,测量结果会有上、下起伏的变化。处理随机误差的方法主要是概率统计法。

2. 系统误差

定义 在重复条件下,对同一被测量进行无限多次重复测量,其测量结果的平均值减被测量真值之差值。

当误差中不再包含有随机误差时,即为系统误差。由于真值不能确定,并且测量只能有限次数重复进行,故系统误差不能完全知道。

系统误差按其掌握程度分为常差(已定系差)和不确定系差(未定系差)。其数值符号和规律已经确定的误差称为常差;其数值未确切掌握,或数值大小已知而符号未确定的称为不确定系差。已掌握的系统误差,可以通过修正值与测量结果的代数和将其从测量结果中消除,不能确定的那部分系统误差导致了不确定度的产生。

造成系统误差的原因很多,但都具有一定的规律性,在实际测量中可以分析系统误差产生的原因,采取一定的技术措施以消除或减弱系统误差。

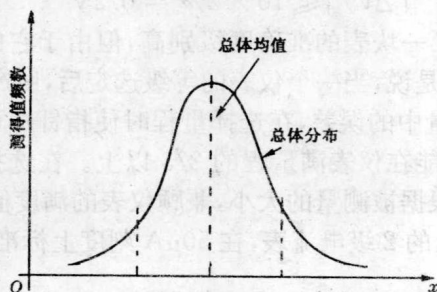


图 10-1 随机误差引起数据分散

3. 粗大误差

定义 明显超出规定条件下预期的误差。

粗大误差主要是由于测量过程中的操作错误引起的,如读数错误、测量方法错误、测量人员操作不当以及测量设备本身存在问题等原因都会造成粗大误差。它表现为统计的异常值。测量结果中带有粗大误差时,应按一定规则剔除。

4. 测量误差对测量结果的影响

随机误差造成的测量结果的分散性,用概率统计中的总体标准偏差 σ 来定量表达,如图 10-1 所示。通常把 σ 称为精密度指标,随机误差决定了测量精密度 (precision of measurement)。

系统误差表示了测量结果偏离真值或实际值的程度,如图 10-2 所示,系统误差决定

了测量正确度(correctness of measurement)。

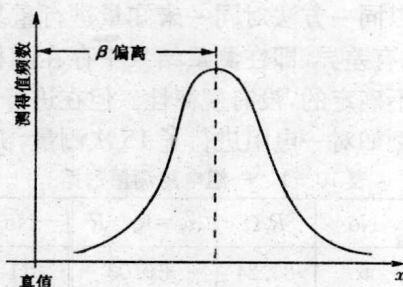


图 10-2 系统误差引起数据偏离

可以用图 10-3 所示的打靶结果来描述测量误差的影响。图 10-3(a)中,子弹着靶点很集中,但着靶点的中心位置偏离靶心较远。这说明射手的瞄准重复性很好,可能由于准星未得到校准,或是风向等原因造成了偏离,只要找出原因就可得到纠正。这种情况相当于测量中由于系统误差所引起的测量值虽然集中但偏离真值(或实际值)较远,说明测量的精密度好而正确度低。在图 10-3(b)中着靶点围绕靶心分散均匀,但分散程度大。这种情况对应于测量中随机误差大而系统误差小的情况,说明测量的精密度差而正确度好。

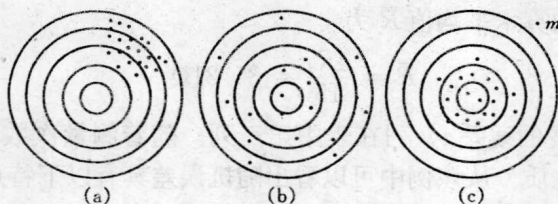


图 10-3 测量误差对测量结果的影响

(a)精密度高 (b)正确度高 (c)精确度高

我们希望测量既精密又正确,如图 10-3(c)所示的情况,通常用测量准确度(accuracy of measurement)来表征测量结果与被测量真值之间的一致程度。准确度有时也叫做精确度。

值得注意的是,精密度、正确度、准确度都是定性的概念,如要定量给出,则应分别用实验标准偏差 S 、偏倚和测量不确定度的概念。定量分析是后面几节的研究重点。

图 10-3(c)中,点 m 表示由于疏忽或错误造成的脱靶,不能代表射击者的水平。相当于测量中的粗大误差,应在测量结果中予以剔除。

第二节 随机误差

一、随机误差的性质和特点

在测量中,随机误差是不可避免的。在设法排除较为重大而明显的系统误差的影响

后,仍然会遗留下很多不能确切掌握甚至完全未知的因素,它们以各种各样的方式影响测量结果,使得在相同条件下,以同一方法对同一未知量进行重复测量,只要使用的仪器足够灵敏,则每次所得测量值总有差异,即在测量结果中存在随机误差。对单次测量而言,随机误差的大小和符号都是不确定的,没有规律性。但在进行多次测量后,可以发现随机误差还是呈现出某些规律。例如对一电阻进行了 15 次测量,测量数据如表 10-1 所示。

表 10-1 一组电阻测量数据

No	R_i/Ω	$v_i=R_i-\bar{R}$	No	R_i/Ω	$v_i=R_i-\bar{R}$	No	$R_i(\Omega)$	$v_i=R_i-\bar{R}$
1	85.30	+0.09	6	85.24	+0.03	11	85.19	-0.02
2	85.71	+0.50	7	85.36	+0.15	12	85.35	+0.14
3	84.70	-0.51	8	84.86	-0.35	13	85.21	0.0
4	84.94	-0.27	9	85.21	0.0	14	85.16	-0.05
5	85.63	+0.42	10	84.97	-0.24	15	85.32	+0.11

根据定义,在重复条件下进行无限多次测量才能得到随机误差。在有限次测量中定义残差 $v_i = x_i - \bar{x}$

其中, x_i 为单次测量值; $\bar{x}$ 为有限次测量的平均值。

本例中电阻测量的算术平均值 $\bar{R}$ 为

$$\bar{R} = \frac{\sum R_i}{15} = 85.21\Omega$$

再根据 $\bar{R}$ 算出每次测量的残差 v_i ,列在表中第三列。随着测量次数的增加,残差的性质就反映了随机误差的性质。从该例中可以看出随机误差具有以下特点:

(1)正负误差出现的概率基本相等,在该例中正误差出现了 7 次,负误差出现了 6 次。即随机误差具有对称性。

(2)表中正误差之和和负误差之和绝对值均匀,正负误差相互抵消。可以说当测量次数无限增大时,正负随机误差可以相互抵消。而有限次测量时,随机误差有相互抵消的可能,即随机误差具有抵偿性。

(3)正负误差的绝对值都没有超过 0.51,说明在多次测量中,随机误差的绝对值不会超过一定的界限,即随机误差具有有界性。

(4)单峰性 绝对值小的误差出现的概率比绝对值大的误差出现的概率大。

二、随机误差的统计处理

根据大量的实际统计,可以看出随机误差服从概率统计规律。概率论中的中心极限定理说明,只要构成随机变量总和的各独立随机变量的数目足够多,而且其中每个随机变量对于总和只起微小的作用,则随机变量总和的分布规律可认为是正态分布,又称为高斯(Gauss)分布。在测量中,测量误差往往是由众多对测量影响微小且又互不相关的因素相互影响造成的,如噪声干扰、空气扰动、电磁场微变及测量人员感觉器官各种无规律的微小变化等。这些微小误差的总和构成了测量中的随机误差,可以说测量中随机误差的

分布大多接近于正态分布,受随机误差影响的测量数据的分布也大多接近正态分布。如影响随机误差的因素有限或某项因素起的作用特别大,就不满足中心极限定理所要求的条件,误差就呈非正态分布,如均匀分布、三角形分布及反正弦分布等。总之,随机误差及其影响下的测量数据都服从一定的统计规律。对随机误差的统计处理就是要根据概率论和数理统计的方法研究随机误差对测量数据的影响,以及它们的分布规律。还要研究在实际的有限次测量中,如何能用统计平均的方法减小随机误差的影响,估计被测量的数学期望和方差,为最后评定测量不确定度提供数据。

1. 随机变量的数字特征

测量值的取值可能是连续的,也可能是离散的。从理论上讨论,大多数测量值的可能取值范围是连续的,而实际上由于测量仪器的分辨力不可能无限小,因而得到的测量值往往是离散的。例如用数字式仪器测某电阻值,从理论上讲,由于随机误差的影响,测量值可能在电阻真值附近某个区间的任何位置上,但实际上测量的全部可能取值范围是该区间内、间隔为仪器能分辨的最小值的整数倍的一系列离散值。此外,有一些测量值本身就是离散的。例如测量单位时间内脉冲的个数,其测量值本身就是离散的。因此要根据离散随机变量和连续随机变量的特性来分析测量值的统计特性。

在概率论中,不管是离散随机变量还是连续随机变量都可以用分布函数来描述它的统计规律。但实际中较难确定概率分布,且不少情况下不需求出概率分布规律,只需知道某些数字特征就够了,数字特征是反映随机变量的某些特性的数值,常用的有数学期望和方差。

1) 期望

设 $x_1, x_2, \dots, x_i, \dots$ 为离散型随机变量 X 的可能取值,相应概率为 $p_1, p_2, \dots, p_i, \dots$, 其级数和为

$$x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_i p_i + \dots = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i$$

若 $\sum x_i p_i$ 绝对收敛,则称其和数为期望或数学期望,记为 $E(X)$

$$E(X) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i \quad \sum_i p_i = 1$$

在统计学中,期望与均值(mean)是同一个概念。无穷多次的重复条件下的重复测量单次结果的平均值即为期望值。

若 X 为连续型随机变量,其分布函数为 $F(x)$, 概率密度为 $p(x)$, 则期望定义为

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x dF(x)$$

或

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x p(x) dx$$

(只要积分收敛)。

2) 方差

随机变量(或测量值)的数学期望只能反映其平均特性。在实际测量中除了要知道测量值的平均特性外,还需要知道测量数据的离散程度。方差是用以描述随机变量可能值对期望的分散的特征值,测量中的随机误差也用方差 $\sigma^2(x)$ 来定量表征。

随机变量 X 的方差为 X 与其期望 $E(X)$ 之差的平方的期望,记作 $D(X)$, 即

$$D(X) = E\{[X - E(X)]^2\}$$

与数学期望的情况类似,对离散性随机变量:

$$D(X) = \sum_{i=1}^{\infty} [x_i - E(X)]^2 p_i$$

对连续型随机变量:

$$D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} [x - E(x)]^2 p(x) dx$$

展开等式右边可进一步得到

$$D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} [x^2 - 2xE(x) + E^2(x)] p(x) dx = E(x^2) - [E(x)]^2$$

在实际问题中,随机变量往往是有量纲的,而方差的量纲是随机变量量纲的平方,使用不方便。为了与随机变量量纲统一,常用 $\sqrt{D(X)}$ 来代替 $D(X)$,记为均方差或标准偏差 $\sigma(X)$ 。

2. 正态分布

前面已经分析过测量数据的分布大多接近于服从正态分布,这里讨论有关连续型随机变量的正态分布问题。

1) 正态分布曲线

正态分布的概率密度函数为

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]$$

根据式可以求出服从正态分布的物理量的期望值和标准偏差

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} x \exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right] dx = \mu$$

$$\sigma^2(x) = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 p(x) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 \exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right] dx = \sigma^2$$

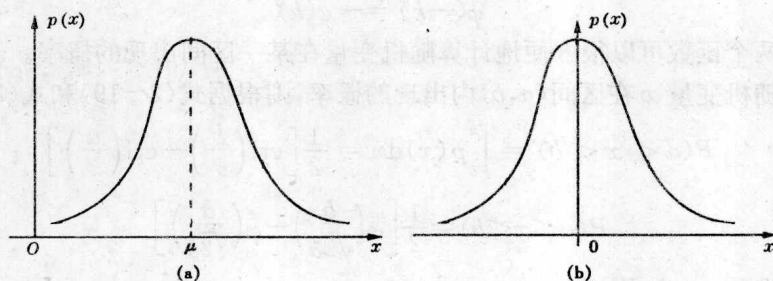
概率密度函数公式中的参数 μ 即为随机变量 X 的期望值, σ 为其标准偏差。若 $\mu=0$,则

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right]$$

期望值为 μ 和0的正态分布曲线分别如图10-4(a)、(b)所示,(a)和(b)的曲线形状相同,只是在坐标轴内位置不同,曲线(a)关于 $x=\mu$ 的直线为对称,曲线(b)关于Y轴为对称。所以在分析曲线性质时,可以以其中一个为例。该函数的性质如下:

- ① $p(x)$ 的定义域为 $(-\infty, +\infty)$ 。
- ②整个定义域内, $p(x) \geq 0$,即正态分布曲线总是位于 x 轴的上方。
- ③ $p(x)$ 是 x 的偶函数,即 $p(-x) = p(x)$,所以分布曲线对称于 y 轴。
- ④当 $x \rightarrow \infty$ 时, $p(x) \rightarrow 0$,所以横坐标是分布曲线的渐近线。
- ⑤函数的极值点 $p(x)$ 的导数为

$$p'(x) = \frac{-x}{\sigma^3 \sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right]$$

图 10-4 期望值为 μ 和 0 的正态分布概率密度曲线(a) 期望值为 μ (b) 期望值为 0

令 $p'(x)=0$, 得 $x=0$, 并且当 $x<0$ 时 $p'(x)>0$, 曲线上升; $x>0$ 时 $p'(x)<0$, 曲线下降。所以函数在 $x=0$ 处有极大值。

⑥ 曲线的拐点 $p(x)$ 的二阶导数为

$$p''(x) = \frac{1}{\sigma^5 \sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right] (x^2 - \sigma^2)$$

当 $|x|<\sigma$ 时 $p''(x)<0$, 即在 $(-\sigma, +\sigma)$ 间正态分布曲线向下弯曲; 当 $|x|>\sigma$ 时 $p''(x)>0$, 在 $(-\sigma, +\sigma)$ 区间外, 正态分布曲线向上弯曲; 在 $x=\pm\sigma$ 时 $p''(x)=0$, 所以 $x=\pm\sigma$ 是正态分布曲线的拐点。

2) 正态分布的概率计算

服从正态分布的随机变量, 其分布是对称的, 所以一般可取其对称的区间 $(-a, a)$ 来估计随机变量 x 出现的概率。

$$P\{-a \leq x \leq a\} = P\{|x| \leq a\} = \int_{-a}^{+a} p(x) dx = 2 \int_0^a p(x) dx$$

因为随机变量 x 在某一区间出现的概率与标准偏差 σ 的大小密切相关, 故常把区间极限值设为 σ 的倍数, 即设

$$a = k\sigma \quad \text{或} \quad k = \frac{a}{\sigma}$$

则式(2-18)就变成

$$P = \{|x| \leq k\sigma\} = P\left\{\left|\frac{x}{\sigma}\right| \leq k\right\} = 2 \int_0^k \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) d\left(\frac{x}{\sigma}\right)$$

分别令 $t = \frac{x}{\sigma}$ 或 $\sqrt{2}\tau = \frac{x}{\sigma}$, 则有

$$P\{|x| \leq k\sigma\} = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^k \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt = \text{erf}(k)$$

或

$$P\{|x| \leq k\sigma\} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{k/\sqrt{2}} \exp(-\tau^2) d\tau = \varphi(k/\sqrt{2})$$

式中 $\text{erf}(k)$ 常称为误差函数或概率积分; $\varphi(k/\sqrt{2})$ 称为拉普拉斯函数。不难证明, 误差函数和拉普拉斯函数均为奇函数, 即

$$\text{erf}(-k) = -\text{erf}(k)$$

$$\varphi(-k) = -\varphi(k)$$

利用这两个函数可以很方便地计算随机变量在某一区间出现的概率。若要计算服从正态分布的随机变量 x 在区间 (a, b) 内出现的概率, 则根据式(2-19)和式(2-20)有

$$P(a < x < b) = \int_a^b p(x) dx = \frac{1}{2} \left[\operatorname{erf}\left(\frac{b}{\sigma}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{a}{\sigma}\right) \right]$$

或
$$P(a < x < b) = \frac{1}{2} \left[\varphi\left(\frac{b}{\sqrt{2}\sigma}\right) - \varphi\left(\frac{a}{\sqrt{2}\sigma}\right) \right]$$

如区间为 $(-a, a)$, 则

$$P(-a < x < a) = \operatorname{erf}\left(\frac{a}{\sigma}\right) = \varphi\left(\frac{a}{\sqrt{2}\sigma}\right)$$

在实际工作中常设 $k = a/\sigma$, 由此可得

$$P(|x| < k\sigma) = \operatorname{erf}(k) = \varphi(k/\sqrt{2})$$

根据 k 值计算的概率值可以制成表格。附录 1 即为误差函数表, 根据 k 值可以很方便地查出随机变量在相应区间出现的概率。如要知道随机变量 x 出现在 $(-1.40\sigma, 1.40\sigma)$ 区间的概率, 查附录 1 的表 A 第 9 行第 2 列即可得到相应的概率为 0.838 487, 避免了积分计算的麻烦。

在误差理论中, 经常用到下面几个值, 它们分别为

$$P(|x| < \sigma) \approx 0.6827$$

$$P(|x| < 2\sigma) \approx 0.9545$$

$$P(|x| < 3\sigma) \approx 0.9973$$

从上面的数据可以看出, 随机变量 x 在 $\pm 3\sigma$ 区间之内的概率达到 0.9973, 而在这个区间外的概率非常小, 在有限次统计中可认为是不可能出现的事件。

在上面的分析中是以期望值为零的正态分布曲线进行讨论的, 对期望值为 μ 的正态分布曲线可以得到相同的结果。

测量中绝大部分随机误差及其影响下的测量值都是服从正态分布的。若设 x 为测量值, δ 为测量中的随机误差, 则它们的概率密度函数分别为

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma(x)} \exp\left\{-\frac{[x - E(x)]^2}{2\sigma^2(x)}\right\}$$

$$p(\delta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma(\delta)} \exp\left[-\frac{\delta^2}{2\sigma^2(\delta)}\right]$$

对应于前面的分析, 今后讨论随机误差和测量值的分布时, 也只需讨论其中一种, 而对另一种只需要把横坐标移动一个位置就可得出类似的结果。

三、用有限次测量估计测量值的数学期望和标准偏差

前面所讨论的被测量的数字特征数学期望 $E(x)$ 和标准偏差 $\sigma(x)$ 都是在无穷多次测

量的条件下求得的,但是在实际测量中只能进行有限次测量,就不能按照式准确地求出被测量的数学期望和标准偏差。特别是在测量次数 n 不大的情况下,随机变量的统计特征本质上是随机的。如何根据有限次测量所得结果对被测量的数学期望 $E(x)$ 和测量的标准偏差 $\sigma(x)$ 作出估计是本节讨论的重点。

1. 有限次测量值的算术平均值及其分布

1) 算术平均值 $\bar{x}$

对同一个量值作一系列等精度独立测量,其测量列中的全部测量值的算术平均值是最可靠的测量结果,称为算术平均值原理。

设被测量的真值为 μ , 其等精度测量值为 $x_1, x_2, \dots, x_n$, 则其算术平均值为

$$\bar{x} = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \dots + x_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

可以证明, $\bar{x}$ 的数学期望就是 μ 。

$$E(\bar{x}) = E\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i\right) = \frac{1}{n} E\left(\sum_{i=1}^n x_i\right) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E(x_i) = \frac{1}{n} \cdot n\mu = \mu$$

由概率论理论可知,若某未知参量的估计值的数学期望正好等于该参量值,则该估计值称为无偏估计值。由于 $\bar{x}$ 的数学期望为 μ , 故算术平均值就是真值 μ 的无偏估计值。

实际测量中通常以算术平均值代替真值,以测量值与算术平均值之差即剩余误差(简称残差) v 来代替真误差 δ , 即

$$v_i = x_i - \bar{x}$$

当 $n \rightarrow \infty$ 时, $v \rightarrow \delta$ 。

算术平均值有如下两个性质:

(1) 残差的代数和等于零, 即

$$[v] = 0$$

(2) 残差的平方和为最小, 即

$$[v^2] = v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_n^2 = \min$$

性质(1)可用于检查测量值的算术平均值和残差的计算是否正确; 性质(2)是最小二乘法的理论基础。

2) 算术平均值 $\bar{x}$ 的分布及标准偏差

前面已说明, 当测量次数 n 有限时, 统计特征本质上是随机的, 所有算术平均值 $\bar{x}$ 本身也是一个随机变量。根据正态分布随机变量之和的分布仍然是正态分布的理论, $\bar{x}$ 也属于正态分布, 应用 $\bar{x}$ 的方差 $\sigma^2(\bar{x})$ 来表征其精密度。

$$\sigma^2(\bar{x}) = \sigma^2\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i\right) = \frac{1}{n^2} \sigma^2\left(\sum_{i=1}^n x_i\right) = \frac{1}{n^2} n\sigma^2(x) = \frac{1}{n} \sigma^2(x)$$

或写成标准偏差的形式

$$\sigma(\bar{x}) = \frac{\sigma(x)}{\sqrt{n}}$$

式说明了测量平均值的方差比总体或单次测量的方差小 n 倍, 或者说平均值的标准偏差比总体测量值的标准偏差小 $\sqrt{n}$ 倍。这是由于随机误差的抵消性, 在计算 $\bar{x}$ 的求和过程中, 正负误差相互抵消; n 越大, 抵消程度越大, 平均值离散程度越小, 所以在实际测量中可以采用统计平均的方法来减弱随机误差的影响。图 10-5 表示了被测量总体和测量平