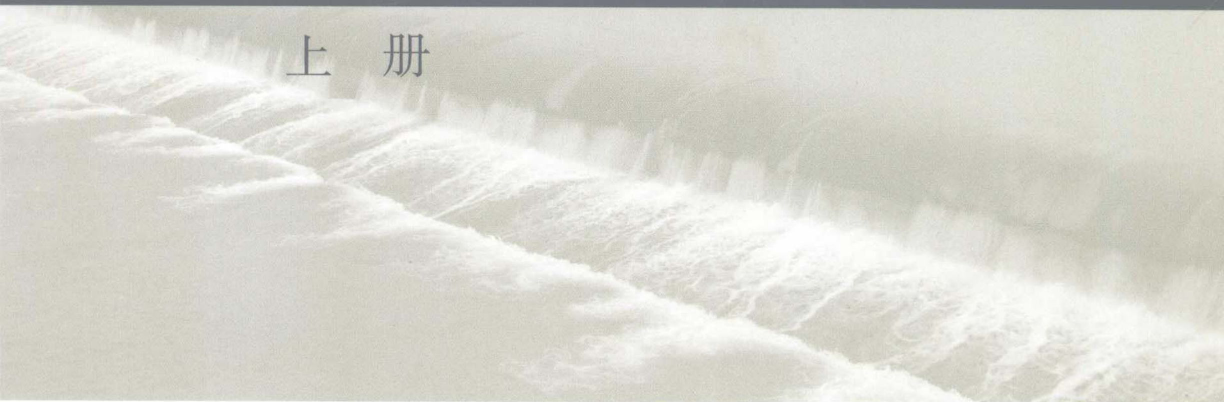
高等学校教材

Calculus
Mathematical model

微积分
与数学模型教程

上 册



主 编 魏毅强 副主编 张海峰

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

高等学校教材

微积分与数学模型教程

Weijifen yu Shuxue Moxing Jiaocheng

上册

主　编　魏毅强
副主编　张海峰

高等教育出版社·北京
HIGHER EDUCATION PRESS　BEIJING

内容提要

本书注重通过应用实例引入与认识概念，通过加强数学建模与数学实验的教学内容促进学生知识、能力和素质的融合。上册内容分七章，包括函数与初等函数、极限与连续、导数与微分、微分中值定理与导数的应用、定积分与不定积分、定积分的应用与积分模型、无穷级数。本书可作为高等学校非数学类专业的数学基础课程教材使用。

图书在版编目(CIP)数据

微积分与数学模型教程. 上册 / 魏毅强主编. — 北京：高等教育出版社，2012.9
ISBN 978-7-04-035996-1

Ⅰ. ①微… Ⅱ. ①魏… Ⅲ. ①微积分-高等学校-教材②数学模型-高等学校-教材 Ⅳ. ①O172②O141.4

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 181272 号

策划编辑	于丽娜	责任编辑	于丽娜	特约编辑	刘方乐	封面设计	张志奇
版式设计	马敬茹	插图绘制	黄建英	责任校对	刘　莉	责任印制	朱学忠

出版发行	高等教育出版社	咨询电话	400-810-0598
社　　址	北京市西城区德外大街 4 号	网　　址	http://www.hep.edu.cn
邮政编码	100120		http://www.hep.com.cn
印　　刷	涿州市星河印刷有限公司	网上订购	http://www.landraco.com
开　　本	787mm × 960mm　1/16		http://www.landraco.com.cn
印　　张	24.75	版　　次	2012 年 9 月第 1 版
字　　数	440 千字	印　　次	2012 年 9 月第 1 次印刷
购书热线	010-58581118	定　　价	36.00 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换

物 料 号　35996-00

前　言

众所周知，现代科学技术的迅速发展，尤其是计算手段、网络技术的日益更新，为数学学科开辟了无限广阔的应用空间，各行各业对数学技术的依赖与要求日益迫切，数学知识的重要性进一步凸显，而微积分作为帮助学生进入科学和工程领域的基础知识也越来越受到重视。

本书是在太原理工大学数学学院近年来编写、出版的《微积分与数学模型》、《高等数学》两本教材的基础上，依托科技部“科学思维、科学方法在高等学校教学创新中的探索与实践”项目的研究成果，根据编者多年的教学实践，按照新形势下教材改革的精神与高等数学课程的教学基本要求编写而成。在编写过程中，我们保留了原教材的体系与风格，在强调数学理论与应用、认识与实践、思维与方法教学的同时，注重通过应用实例引入与认识概念，通过加强数学建模与数学实验的教学内容促进学生知识、能力和素质的融合，力争教学内容与教学手段的现代化，引导和逐步培养学生的创新思维与创新能力。为此，我们在本书编写过程中有针对性地加入了适量的数学建模的例题，以期在学习过程中逐步培养和锻炼学生利用数学知识解决实际问题的能力。

本书由太原理工大学数学学院教师合作编写，所有参与者均多年工作在教学一线，教学与实践经验丰富，对本课程涉及的内容有着切身的体会与理解。其中刘丽萍负责第一、二、三章，董玲珍负责第四、九章，武彩萍负责第五、六章，王彩贤负责第七章，侯红卫负责第八章，李润芳负责第十、十一章，张海峰负责第十二章与附录。魏毅强担任全书主编，张海峰、侯红卫分别担任上、下册副主编，并负责全书的统稿和整理工作。

在本书编写过程中，数学学院广大教师先后提出了许多宝贵的意见和建议，在此一并表示诚挚的谢意。由于编者水平有限，书中难免存在不妥之处，恳请广大专家、同行和读者批评指正。

编　者

2012 年 5 月

目　　录

第一章　函数与初等函数

函数是现实世界中变量依存关系的数学反映，是现代数学的基本概念之一. 微积分是以函数为主要研究对象的一门数学课程. 本章介绍函数的基本概念和性质，并对初等函数及数学模型作简略介绍.

第一节　函　　数

一、集合

1. 集合的概念

集合是数学中的一个基本概念. 所谓集合是指具有某种特定性质的事物的总体，通常用大写字母 A，B，C，…表示. 组成集合的事物称为元素，通常用小写字母 a，b，c，…表示. 如果 a 是集合 A 的元素，则称 a 属于 A，记作 $a\in A$，否则就称 a 不属于 A，记作 $a\notin A$. 只有有限个元素的集合称为有限集合，否则称为无限集合.

表示集合的方法通常有两种：一种是列举法，就是把集合的元素全部列举出来. 例如，由元素 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 组成的集合 A 表示为

$$A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\};$$

另一种是描述法，若集合 A 是具有某种性质 P 的元素 x 的全体所组成的，就可表示为

$$A=\{x\mid x\text{ 具有性质 }P\}.$$

如果组成集合的元素都是数，则称它为数集. 习惯上，全体自然数组成的集合记作 $\mathbf{N}$，全体整数组成的集合记作 $\mathbf{Z}$，全体有理数组成的集合记作 $\mathbf{Q}$，全体实数组成的集合记作 $\mathbf{R}$，全体复数组成的集合记作 $\mathbf{C}$. 今后如果没有特别声明，所提到的数都是实数，所提到的数集都是实数集.

2. 区间

区间是一类重要的数集. 设实数 a 和 b 满足 $a<b$，则称数集 $\{x\mid a<x<b\}$ 为**开区间**，记作 (a,b)，即

$$(a,b)=\{x\,|\,a<x<b\}.$$

类似地，$[a,b]=\{x\,|\,a\leqslant x\leqslant b\}$称为**闭区间**，$[a,b)=\{x\,|\,a\leqslant x<b\}$与$(a,b]=\{x\,|\,a<x\leqslant b\}$称为**半开区间**. 以上这些区间都称为有限区间，数 $b-a$ 称为区间的长度，a 和 b 分别称为区间的左端点和右端点. 除了有限区间外还有所谓无限区间(端点为无限). 引进“$+\infty$”(读作正无穷大)及“$-\infty$”(读作负无穷大)，则

$$(a,+\infty)=\{x\,|\,x>a\},\quad [a,+\infty)=\{x\,|\,x\geqslant a\},$$
$$(-\infty,b)=\{x\,|\,x<b\},\quad (-\infty,b]=\{x\,|\,x\leqslant b\}$$

都是无限区间. 而全体实数的集合可以记为

$$\mathbf{R}=\{x\,|\,-\infty<x<+\infty\}=(-\infty,+\infty).$$

今后，在不需要辩明所论区间是否包含端点以及是有限区间还是无限区间的场合，就简单地称它为区间，且常用字母 I 表示.

3. 邻域

当考虑某点附近的点所构成的集合时，我们常用邻域的概念来描述.

设 a 和 δ 是两个数，其中 $\delta>0$，则数集$\{x\,|\,|x-a|<\delta\}$称为点 a 的 **δ 邻域**，记作 $U(a,\delta)$，即

$$U(a,\delta)=\{x\,|\,|x-a|<\delta\},$$

点 a 叫做**邻域的中心**，δ 叫做**邻域的半径**. $U(a,\delta)$实际上就是开区间$(a-\delta,a+\delta)$.

有时候用到邻域的概念时，需要把邻域的中心去掉. 去掉中心 a 的 δ 邻域称为点 a 的**去心 δ 邻域**，记作 $\hat{U}(a,\delta)$，即

$$\hat{U}(a,\delta)=\{x\,|\,0<|x-a|<\delta\},$$

这里 $0<|x-a|$表示 $x\neq a$，其中$(a-\delta,a)$称为 a 的左 δ 邻域，$(a,a+\delta)$称为 a 的右 δ 邻域.

二、变量与函数

1. 常量与变量

客观世界是发展变化的. 事物的发展变化有两种状态，即相对静止的状态与变化的状态. 这两种状态反映在数量上就有常量与变量之分. 具体来说，在所考察的过程中，保持一定数值的量叫做**常量**，可以取不同数值的量叫做**变量**. 例如，运动物体的速率，某地的气温，列车上的载客数量以及车上燃油存量等都是变量. 而圆周率 π 等都是常量.

一个量是常量还是变量，要根据具体情况而分析. 例如，就小范围地区来说，重力加速度可以看作常量，但就广大地区来说，精确的测量表明，各地的

重力加速度并不相等，因而它又是变量.

通常用字母 a，b，c 等表示常量，用字母 x，y，z 等表示变量.

2. 函数的概念

在同一个自然现象或技术过程中，往往同时有几个变量在变化着，这些变量的变化并不是孤立的，而是相互关联并遵循一定的规律相互联系，不同的变量间常常具有某种相关的数量关系. 为了说明这种关系，现在以两个变量的情形举几个例子.

例 1.1　考虑圆的面积 A 与圆的半径 r 之间的相互关系. 大家知道，它们之间的关系由公式

$$A = \pi r^2$$

给定，当半径 r 在区间 $(0, +\infty)$ 内任意取定一个数值时，由上式就可以确定圆面积 A 的相应数值.

例 1.2　在货船的船头下部常看到表示货轮吃水深度的吃水线. 货轮吃水越深，说明排水量越大，货轮装的货物也越多. 某货轮吃水深度 h 与排水量 w 间的对应关系如下表所示：

h(m)	3	4	5	6	7	8	9
w(t)	5 020	7 225	9 275	11 475	13 750	16 125	18 525

上表反映了 h 与 w 的依赖关系. 根据此表，当 h 取表中某一值时，对应的 w 值也随之确定. 反之，当 w 取表中某值时，对应的 h 值也随之确定.

例 1.3　在电子技术中，常会遇到各种波形，如图 1－1 是“锯齿波”中的一个波形，横坐标表示时间 t，纵坐标表示电压 u. 从图上知道，电压随时间 t 的变化而变化，在区间 $0 \leqslant t \leqslant 30$ 中，每给定一个值，都有一个确定的 u 值与它对应.

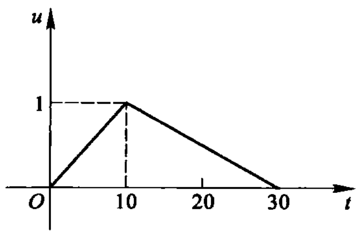


图 1－1

以上各例尽管实际意义不同，表达方式也不同，但却有共同的本质特征：每个问题均涉及两个变量，两个变量间有一个确定的依赖关系，其中一个变量的变化将会引起另一个变量的变化，当前者的值确定后，后者的值按照一定的关系相应被确定. 这种变量之间的依赖关系就是函数关系.

定义 1.1　设有两个变量 x 和 y，D 为一非空的实数集. 若变量 x 在 D 内任取一个数值时，变量 y 按照一定的法则 f 总有唯一确定的值与之对应，则称

f 是确定在数集 D 上的**函数**，记作 $y=f(x)$. 数集 D 称为这个函数的**定义域**，x 称为**自变量**，y 称为**因变量**.

如果 $x_0\in D$，称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 有定义，与 x_0 对应的 y 的数值称为函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的**函数值**，记作 $f(x_0)$ 或 $y|_{x=x_0}$. 当 x 取遍 D 的各个数值时，对应的函数值全体称为函数的**值域**，记作 R_f 或 $f(D)$，即

$$R_f=f(D)=\{y\,|\,y=f(x),x\in D\}.$$

需要指出，函数中表示对应法则的记号"f"可以用其他字母表示，例如 g、F、φ 等. 这时函数相应地表示为 $y=g(x)$，$y=F(x)$ 和 $y=\varphi(x)$ 等. 有时还直接用因变量的记号表示函数，即把函数记作 $y=y(x)$. 但在同一问题中出现不同函数时，为了表示区别，需用不同的记号来表示它们.

由函数定义可知，构成函数的基本要素是定义域和对应法则. 若两个函数的对应法则和定义域都相同，则两个函数是相同的，否则就是不同的. 例如，$f(x)=|x|$，$x\in\mathbf{R}$ 与 $g(x)=\sqrt{x^2}$，$x\in\mathbf{R}$ 是相同的函数. 又如，$f(x)=1$，$x\in(-\infty,+\infty)$ 与 $g(x)=\dfrac{x}{x}$，$x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ 是不同的函数.

函数的定义域通常按以下两种情形来确定. 当函数用解析式表示时，其定义域是使得该表达式有意义的自变量取值的全体，这种定义域称为函数的**自然定义域**. 对有实际意义的问题，要依照问题的实际意义进一步加以限制. 如例 1.1 中 r 表示圆的半径，所以只能在 $(0,+\infty)$ 内取值.

在函数的定义中，当自变量在定义域内任取一个数值时，对应的函数值总是唯一的，这种函数我们也称为**单值函数**，例 1.1、例 1.2 和例 1.3 中的函数都是单值函数. 如果给定一个对应法则，按这一法则，对定义域内的每个自变量取值，总有因变量的取值与之对应，而因变量的值不总是唯一的，按照定义 1.1 就不能确定函数关系，为了研究方便，这时我们称它为**多值函数**. 例如，当平面上点的横坐标 x 与纵坐标 y 之间的对应法则由圆 $x^2+y^2=r^2$ 所确定时，则在 x 与 y 之间确定了一个多值函数，因为当 x 在 $(-r,r)$ 内任取一值时，对应的函数值 y 就有两个值. 对于多值函数往往只要附加一些条件，就可将它化为单值函数，这样得到的单值函数称为多值函数的**单值分支**. 例如，在附加条件 $y\geqslant 0$ 下可从圆方程中解出 y，得到一个单值分支

$$y=\sqrt{r^2-x^2}\ (-r\leqslant x\leqslant r).$$

今后，本书所提到的函数一律指单值函数，当遇到多值函数时，只限于选定其中一个单值分支来研究.

在平面直角坐标系中，记

$$E=\{(x,y)\,|\,y=f(x),x\in D\},$$

点集 E 称为**函数 $y=f(x)$ 的图形**，函数的图形是一个平面点集，它可能是一些孤立的点，也可能是一条或几条曲线(包括直线).

函数的表示形式通常有解析法、表格法、图形法三种. 如例 1.1 是解析法，例 1.2 是表格法，例 1.3 是图形法. 函数的三种表示法各有特点，表格法和图形法直观明了，解析法易于运算，在处理实际问题中可以结合使用.

例 1.4　确定函数 $f(x)=\sqrt{3+2x-x^2}+\ln(x-2)$ 的定义域.

解　由定义可知，该函数的定义域应为满足不等式组

$$\begin{cases}3+2x-x^2\geqslant 0\\ x-2>0\end{cases}$$

的 x 值的全体，解此不等式组，得 $2<x\leqslant 3$，故所求定义域为

$$D=\{x\,|\,2<x\leqslant 3\}=(2,3].$$

例 1.5　设函数 $f(x)=\dfrac{1-x}{1+x}$，求 $f(0)$，$f(-x)$，$f(x+1)$，$f\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

解

$$f(0)=\frac{1-0}{1+0}=1,$$

$$f(-x)=\frac{1-(-x)}{1+(-x)}=\frac{1+x}{1-x},$$

$$f(x+1)=\frac{1-(x+1)}{1+(x+1)}=\frac{-x}{2+x},$$

$$f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1-\dfrac{1}{x}}{1+\dfrac{1}{x}}=\frac{x-1}{x+1}.$$

三、分段函数

在例 1.3 中，u 和 t 的关系也可以用数学解析式表示：

$$u=\begin{cases}\dfrac{1}{10}t, & 0\leqslant t<10\\ \dfrac{3}{2}-\dfrac{1}{20}t, & 10\leqslant t\leqslant 30\end{cases}$$

这种在自变量的不同变化范围内，对应法则用不同数学式子表示的函数称为**分段函数**. 分段函数在数学、工程技术以及日常生活中都会经常用到.

例 1.6　一个三级火箭，各级质量(单位:kg)分别为 8 000，4 000，2 000，设原料消耗率均为 10 kg/s，各级火箭燃烧时间(单位:s)分别为 600，300，150，每级火箭的燃料燃烧尽后，外壳自行脱落，下一级火箭就自行燃烧，最

后一级火箭成为人造卫星，绕地球运行，试写出火箭质量随时间的变化规律.

解　设时间为 t，火箭质量为 m，根据题意，可列出 m 随 t 的变化规律如下：

$$m=\begin{cases}14\,000-10t, & 0\leqslant t\leqslant 600\\ 6\,000-10(t-600), & 600<t\leqslant 900\\ 2\,000-10(t-900), & 900<t\leqslant 1\,050\\ 500, & t>1\,050\end{cases}$$

下面再介绍几个数学上常见的分段函数.

例 1.7　函数

$$y=|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0\\ -x, & x<0\end{cases}$$

称为**绝对值函数**，它的定义域 $D=(-\infty,+\infty)$，值域 $D_f=[0,+\infty)$，它的图形如图 1-2 所示.

例 1.8　函数

$$y=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1, & x>0\\ 0, & x=0\\ -1, & x<0\end{cases}$$

称为**符号函数**，它的定义域 $D=(-\infty,+\infty)$，值域 $D_f=\{-1,0,1\}$，它的图形如图 1-3 所示.

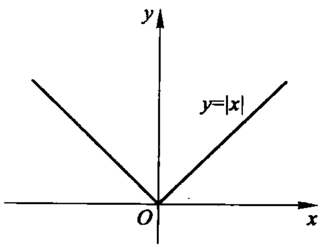


图 1-2

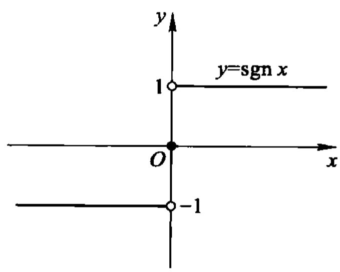


图 1-3

我们有时可以运用绝对值函数或符号函数将某些分段函数写得简洁一些.例如，函数

$$f(x)=\begin{cases}-x\sqrt{1+x^2}, & x\leqslant 0\\ x\sqrt{1+x^2}, & x>0\end{cases}$$

可以写成

$$f(x)=|x|\sqrt{1+x^2}$$

或

$$f(x)=x\sqrt{1+x^2}\cdot \operatorname{sgn} x.$$

例 1.9　设 $x\in\mathbf{R}$，不超过 x 的最大整数称为 x 的**整数部分**，也称为 x 的**最大整数**，记作 $[x]$，例如，$[1.3]=1$，$[2]=2$，$[-1.5]=-2$. 把 x 看作自变量，则函数 $y=[x]$ 称为**取整函数**，它的定义域 $D=(-\infty,+\infty)$，值域 $D_f=\mathbf{Z}$，它的图形如图 1－4 所示. 这个图形称为阶梯曲线，在 x 为整数值处，图形发生跳跃.

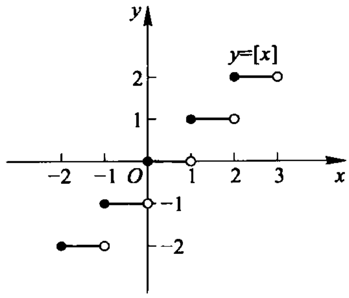


图 1－4

四、函数关系的建立

为解决实际问题，首先要引入适当的变量，将该问题量化并建立相应的数学模型，即建立函数关系. 要想把实际问题中变量之间的函数关系正确抽象出来，首先应分析哪些是常量，哪些是变量，其次给出自变量和因变量所遵循的自然规律，最后根据题意建立它们之间的函数关系，同时给出函数的定义域.

例 1.10　有一油泵的曲柄连杆机构(图 1－5)，主动轮转动时，连杆带动滑块 B 作往复直线运动，设曲柄 OA 的长为 r，连杆 AB 的长为 l，旋转的角速度是 ω，开始时，曲柄 OA 与 OB 重合，求滑块的运动规律.

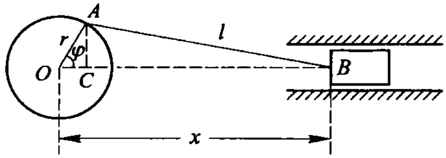


图 1－5

解　在这机构中，曲柄长度 r，连杆长度 l 都是已知的，即为常量.

设经过 t 秒主动轮转过的角度为 φ(弧度)，此时滑块 B 离 O 点的距离为 x，当主动轮转动时，t 及 x 显然都是变量. 现在的问题就是要建立这两个变量间的函数关系.

过 A 点作 $AC\perp OB$，交 OB 于 C 点，则

$$OC=r\cos\varphi,\quad AC=r\sin\varphi,$$

$$CB=\sqrt{AB^2-AC^2}=\sqrt{l^2-r^2\sin^2\varphi}.$$

于是

$$x=OB=OC+CB=r\cos\varphi+\sqrt{l^2-r^2\sin^2\varphi}.$$

因为 ω 是角速度，$\varphi=\omega t$，所以滑块 B 的运动规律是

$$x=r\cos\omega t+\sqrt{l^2-r^2\sin^2\omega t},\quad t\in[0,+\infty).$$

例 1.11　一下水道的截面是矩形上加一半圆形(图 1－6)，截面面积取决

于预定的排水量. 设截面积为常量 A，截面的周长为 S，底宽为 x，写出 S 与 x 间的函数关系.

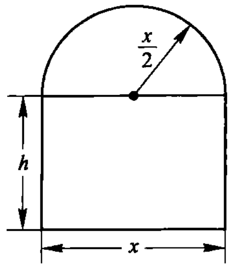


图 1-6

解　设矩形高为 h，则有

$$\begin{cases} S = x + 2h + \pi \cdot \dfrac{x}{2} \\ A = xh + \dfrac{1}{2} \cdot \pi \cdot \left(\dfrac{x}{2}\right)^2 \end{cases}$$

解得

$$S = \left(1 + \frac{\pi}{4}\right)x + \frac{2A}{x},\ x \in \left(0, 2\sqrt{\frac{2A}{\pi}}\right).$$

例 1.12　某集团公司自 2000 年起，斥巨资分三期兴建垃圾处理厂，如下表：

一期 2000 年 1 亿元	兴建垃圾堆肥厂	年处理有机肥 10 多万吨	年收益 2 千万元
二期 2002 年 4 亿元	兴建垃圾焚烧发电一厂	年发电量 1.3×10^8 kW/h	年收益 4 千万元
三期 2004 年 2 亿元	兴建垃圾焚烧发电二厂	年发电量 1.3×10^8 kW/h	年收益 4 千万元

如果每期的投资从第二年开始见效，且不考虑存贷款利息，设 2000 年以后的 x 年的总收益为 $f(x)$（单位：千万元），试求 $f(x)$ 的表达式，并预测到哪一年能收回全部投资款.

解　本题需用分段函数进行求解，由表中的数据易得，

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & x \in \{1, 2\} \\ 2x + 4(x-2), & x \in \{3, 4\} \\ 2x + 4(x-2) + 4(x-4), & x \in \{5, 6, 7, \cdots\} \end{cases}$$

显然，当 $x \leqslant 4$ 时，不能收回投资款.

当 $x \geqslant 5$ 时，由 $f(x) = 10x - 24 > 70$，得 $x > 9.4$，取 $x = 10$. 所以到 2010 年可以收回全部投资款.

习　题　1.1

1. 求下列函数的定义域：

(1) $y = \sqrt{x^2 - 4}$；　　(2) $y = \dfrac{1}{1 - x^2}$；

(3) $y=\arcsin\dfrac{x-3}{4}$;　　(4) $y=\sqrt{x-2}+\dfrac{1}{x-3}+\lg(5-x)$;

(5) $y=\sqrt{3-x}+\arctan\dfrac{1}{x}$;　　(6) $y=\begin{cases}-x, & -1\leqslant x\leqslant 0\\ \sqrt{4-x}, & 0<x<2\end{cases}$.

2. 下列各题中，两个函数是否相同？为什么？

(1) $f(x)=\lg x^2$ 与 $g(x)=2\lg x$;

(2) $f(x)=\dfrac{x^2+2x-3}{x+3}$与 $g(x)=x-1$;

(3) $y=2x+1$ 与 $s=2t+1$;

(4) $f(x)=(1-\cos^2x)^{\frac{1}{2}}$与 $f(x)=\sin x$.

3. 设 $f(x)=\sqrt{4+x^2}$，求 $f(0)$，$f(-1)$，$f\left(\dfrac{1}{a}\right)$，$f(a+h)$.

4. 已知 $f(x)=2x^2+\dfrac{2}{x^2}+\dfrac{5}{x}+5x$，证明 $f(x)=f\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

5. 设 $\varphi(x)=\begin{cases}|\sin x|, & |x|<\dfrac{\pi}{3}\\ 0, & |x|\geqslant\dfrac{\pi}{3}\end{cases}$，求 $\varphi\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$，$\varphi\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$，$\varphi\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)$，$\varphi(-2)$，并作出函数的图形.

6. 在半径为 R 的球内作内接圆柱体，求此圆柱体的体积 V 与它的高 h 之间的函数关系.

7. 设火车从甲站出发，以 0.5 km/min^{2}的匀加速度前进，经过 2 min 后开始匀速行驶，再经过 7 min 后以 0.5 km/min^{2}匀减速到达乙站，试将火车在这段时间内所行驶的路程 s 表示为时间 t 的函数.

第二节　函数的几种特性

下面介绍函数可能具有的某些基本特性，一个函数如果具有某种特性将会对它的分析讨论带来方便.

一、函数的有界性

设函数 $y=f(x)$的定义域为 D，数集 $X\subset D$，若存在常数 $M>0$，使对一切 $x\in X$，都有

$$|f(x)|\leqslant M$$

成立，则称 $f(x)$在 X 上**有界**，并称 M 为 $f(x)$在 X 上的一个**界**；否则，称 $f(x)$在 X 上**无界**.

如果存在常数 K(不一定是正数)，使对一切 $x\in X$，恒有 $f(x)\leqslant K$，则称 $f(x)$ 在 X 上有上界，并称 K 为 $f(x)$ 在 X 上的一个上界；如果存在 L，使对一切 $x\in X$，恒有 $f(x)\geqslant L$，则称 $f(x)$ 在 X 上有下界，并称 L 为 $f(x)$ 在 X 上的一个下界.

显然，函数 $f(x)$ 在 X 上有界的充分必要条件是 $f(x)$ 在 X 上既有上界又有下界.

有界函数的图形完全落在两条平行于 x 轴的直线之间.

例如，函数 $f(x)=\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有界，因为对任何实数 x，$|\sin x|\leqslant 1$ 恒成立.

又如，函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在区间 $(0,1)$ 内无界，但在 $[1,2]$ 上有界. 因为不论正数 M 多么大，总有 $x_1=\dfrac{1}{M+1}\in(0,1)$，使得 $|f(x_1)|=M+1>M$，所以 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内无界. 而 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在 $[1,2]$ 上满足 $|f(x)|\leqslant 1$，所以 $f(x)$ 在 $[1,2]$ 上有界. 由此可见，一个函数有界和无界通常是指在某区间内而言的.

二、函数的单调性

设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D，区间 $I\subset D$，如果对于 I 上任意两点 x_1 及 x_2，当 $x_1<x_2$ 时，恒有 $f(x_1)<f(x_2)$ 成立，则称 $f(x)$ 在区间 I 上是**单调增加的**(简称为**单增**)，单增函数的图形在 I 内是上升的(图 1－7)，区间 I 称为 $f(x)$ 的**单增区间**；如果对于区间 I 上任意两点 x_1 及 x_2，当 $x_1<x_2$ 时，恒有 $f(x_1)>f(x_2)$ 成立，则称 $f(x)$ 在区间 I 上是**单调减少的**(简称为**单减**)，单减函数的图形在 I 内是下降的(图 1－8)，区间 I 称为 $f(x)$ 的**单减区间**.

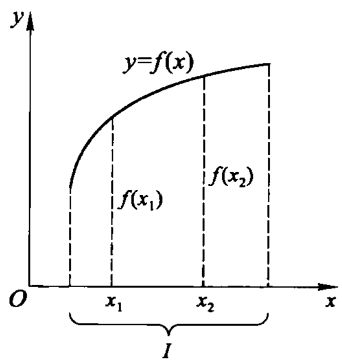


图 1－7

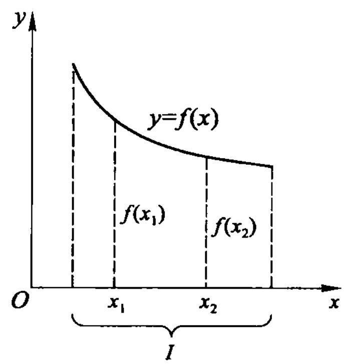


图 1－8