华章数学译丛

HZ BOOKS 华章教育

50

CAMBRIDGE

An Elementary Introduction to Mathematical Finance

(Third Edition)

数理金融初步

（原书第3版）

（美）Sheldon M. Ross 著

南加州大学

冉启康 译

机械工业出版社

China Machine Press

华章数学译丛

50

An Elementary Introduction to Mathematical Finance

(Third Edition)

数理金融初步

（原书第3版）

（美）Sheldon M. Ross 著

南加州大学

冉启康 译

机械工业出版社
China Machine Press

图书在版编目（CIP）数据

数理金融初步（原书第3版）/（美）罗斯（Ross，S. M.）著；冉启康译．—北京：机械工业出版社，2013. 2
（华章数学译丛）
书名原文：An Elementary Introduction to Mathematical Finance，Third Edition
ISBN 978-7-111-41109-3
Ⅰ. 数…　Ⅱ. ①罗…　②冉…　Ⅲ. 金融学－数理经济学　Ⅳ. F830
中国版本图书馆CIP数据核字（2013）第003171号

本书版权登记号：图字：01-2011-7865

本书清晰简洁地阐述了数理金融学的基本问题，主要包括套利、Black-Scholes期权定价公式以及效用函数、最优资产组合原理、资本资产定价模型等知识，并将书中所讨论的问题的经济背景、解决这些问题的数学方法和基本思想系统地展示给读者．

本书内容选择得当、结构安排合理，既适合作为高等院校学生（包括财经类专业及应用数学专业）的教材，同时也适合从事金融工作的人员阅读．

Sheldon M. Ross：An Elementary Introduction to Mathematical Finance，Third Edition（ISBN 978-0-521-19253-8）．

机械工业出版社（北京市西城区百万庄大街22号　　邮政编码　100037）
责任编辑：迟振春
北京市荣盛彩色印刷有限公司印刷
2013年2月第1版第1次印刷
186mm×240mm・15.5印张
标准书号：ISBN 978-7-111-41109-3
定　　价：39.00元

凡购本书，如有缺页、倒页、脱页，由本社发行部调换
客服热线：（010）88378991　88361066　　投稿热线：（010）88379604
购书热线：（010）68326294　88379649　68995259　　读者信箱：hzjsj@hzbook.com

译 者 序

数理金融学是一门数学与金融学交叉的前沿学科，其核心内容是研究不确定随机环境下的投资组合的最优选择理论和资产的定价理论．套利、最优与均衡是数理金融学的基本经济思想和三大基本概念．

近几年来，数理金融学在国际金融界和数学界得到了越来越广泛的重视，国内外出版了大量有关数理金融方面的专著和教科书，然而这些书中，在阐述其主要内容(如关于期权的定价理论等)时，大都直接或间接地使用了随机过程、随机分析、运筹学等现代数学知识，并且把这些知识作为读者已经掌握的东西．而另一方面，目前一般大学本科生所掌握的数学工具主要是微积分、线性代数和初等概率论，此类著作中涉及的现代数学知识远远超出了包括数学专业在内的大学生的知识范畴，甚至金融投资部门从事实际工作的专业人员也难以理解．本书的出现使人感到眼前一亮．本书以 Black-Scholes 期权定价理论为核心，系统、全面地介绍了数理金融学的基本内容．书中将读者应该具备的数学基础严格限定在包括经济、金融、管理等专业的绝大多数本科生的水平，甚至连初等概率和基本的复利理论也从头讲起，并且由于作者在内容选择、结构安排和逻辑体系设计方面的精巧构思，所以能以相对较少的篇幅，把书中所讨论的问题的经济背景以及解决这些问题的数学方法和基本思想，系统而又简洁明快地展示给读者，其中某些问题的讲述还具有相当的深度．此外，作者还非常注意金融实践活动中常用计算技术的介绍，相信那些从事实际工作的读者以及对该学科感兴趣的在校本科生会在这方面大为受益．本书适合作为高等院校财经类专业、应用数学专业以及学习过微积分、线性代数课程的其他专业的本科生的教材，同时也适合从事金融工作的在职人员阅读．

本书第 2 版由南开大学陈典发等人在 2004 年翻译并出版，该书出版以来，受到了读者的广泛欢迎．2011 年，原书作者 Sheldon M. Ross 对本书进行了修订，出版了第 3 版．第 3 版在第 2 版的基础上做了大幅修改，为了满足国内读者的需要，我受机械工业出版社华章公司之托将第 3 版译成中文，在翻译过程中，参考了第 2 版的译本，在此向第 2 版的译者表示衷心的感谢！限于时间和水平，译文的不当之处在所难免，敬请读者和有关领域的专家批评指正．

冉启康

2012 年 10 月于上海财经大学

前　言

期权(合约)给其持有者按指定条款买进或卖出某种证券的权利(但不是义务). *看涨期权*(call option)给予买入权利，而*看跌期权*(put option)给予卖出权利，这两种期权都规定有*执行价*(exercise price)和*到期日*(exercise time). 此外，对期权的执行规定了两种标准的条件：*欧式*期权仅在到期日能行使权利，而*美式*期权行使权利的时间则可为到期日及此前任何时刻. 例如，若买进一个执行价为 K、到期日为 t 的期权，如果此期权是欧式的，那么其持有者有权在时刻 t 以价格 K 购买一股标的证券；而若是美式期权，持有者则有权在 t 及此前任何时刻进行这种购买.

对一个完善高效的期权市场，应该有一种有效的计算方法来(至少是近似地)估计各种期权的价值. 对看涨期权(不管是美式还是欧式)，用著名的 Black-Scholes 公式可作出这种估计. 该公式假定标的证券价格服从几何布朗运动. 也就是说，如果该证券在时刻 y 的价格是 $S(y)$，未来任意指定时刻 $t+y$ 的价格与 y 时刻价格之比独立于到 y 时刻为止的任何历史价格，并且服从均值和方差分别为 $t\mu$ 与 $t\sigma^2$ 的对数正态分布，即 $\log\left(\frac{S(t+y)}{S(y)}\right)$ 是均值为 $t\mu$、方差为 $t\sigma^2$ 的正态随机变量. Black 和 Scholes 证明了：当价格服从几何布朗运动假设时，对看涨期权而言，存在这样一个唯一的价格，它不允许理想化的交易者凭借某种交易策略在任何情况下都确保获利. 这里，理想化交易者是指那些能够不花费任何交易成本而连续不断进行交易的人. 也就是说，当且仅当期权价格由 Black-Scholes 公式给出时，不存在确定性的赢利(*无套利*)机会. 此外，该价格仅依赖于几何布朗运动的方差参数 σ(以及当前利率、标的证券价格和期权的执行条件)，而与参数 μ 无关，由于参数 σ 度量了证券的波动性，故常称其为*波动参数*.

*风险中性*投资者是指只使用投资回报的期望现值来估计该项投资的价值的投资者. 如果这类投资者用一个几何布朗运动来模拟某种证券的价格随时间的变化，从而将涉及该证券的买和卖变成一种公平赌博，那么这些投资者基于该证券的看涨期权的估价恰好由 Black-Scholes 公式给出. 由于此原因，Black-Scholes 的期权估价也常被称为*风险中性估价*.

本书的首要目的是导出并解释 Black-Scholes 公式. 因为其推导需要用到一些概率论知识，所以本书的前三章重点讲述这些知识. 第 1 章介绍概率、概率试验和随机变量(取值为数，且每个取值由随机试验的结果所确定)，此外还介绍了随机变量的期望及方差的概念. 第 2 章介绍正态随机变量，这类随机变量的概率分布由一条钟形曲线决定. 该章还叙述了中心极限定理，该定理是概率论中最重要的理论结果，它指出：大量随机变量的和近似于一个正态随机变量. 第 3 章介

绍几何布朗运动，给出了其定义，讨论了如何从一些更简单过程的极限获得几何布朗运动，还证明了用它来描述证券价格的合理性.

讲述了必要的概率知识之后，在从第 4 章开始的第二部分中，介绍了利率和现值的概念. 支撑 Black-Scholes 公式的一个关键概念是套利，第 5 章专门讨论它. 在此章中我们说明在包括单期二叉树模型在内的各种情况下，如何使用套利进行定价. 第 6 章讨论套利定理，并在多期二叉树模型下，使用它导出期权唯一无套利价格的表达式. 在第 7 章，我们使用第 6 章的结果以及第 4 章中提出的几何布朗运动的近似方法，给出了看涨期权的 Black-Scholes 定价方程的一种简化推导. 此外还讨论了以期权价格作为其参数的函数所具有的性质，以及关于 delta 对冲套利策略的性质. 有关期权的其他性质放在第 8 章讨论，那里我们推导出当标的证券支付红利时相应期权的价格公式，给出了利用多期二叉树模型来确定美式看跌期权风险中性近似价格的方法，还讨论了当证券价格模型为一个布朗运动加上某个随机跳跃过程时相应期权无套利价格的确定问题，此外还给出了关于波动参数的几个不同估计量.

第 9 章指出：在许多情况下，仅仅考虑套利并不能唯一地确定期权的价格. 此时，起重要作用的是投资者的效用函数以及他们对各种投资可能结果概率的估计. 该章还介绍了均方差分析、风险价值和条件风险价值以及资本资产定价模型等概念.

第 10 章介绍随机序关系，这些关系常用于确定当投资者的效用函数没有完全确定时选择一类投资中的哪一个最好. 例如，如果一种投资的回报在一阶占优意义下比另一种投资的回报大，那么在投资者的效用函数是增函数的条件下，第一种投资好于第二种；如果一种投资的回报在二阶占优意义下比另一种投资的回报大，那么在投资者的效用函数是递增且为凹函数的条件下，第一种投资好于第二种.

第 11 章和第 12 章研究金融中的某些最优化模型，第 13 章介绍障碍期权、亚式期权和回望期权等非标准期权或称“奇异”期权. 我们将介绍如何使用蒙特卡罗模拟以及方差缩减技术来有效地确定这些期权的几何布朗运动风险中性估价.

即便人们对标的证券几何布朗运动模型的正确性存在疑问，Black-Scholes 公式仍是有用的. 只要我们承认该模型至少是近似有效的，使用该模型就可以给人这样一种观念：期权具有某个适当的价格. 因此，如果期权的实际交易价格低于此公式计算出来的价格，期权相对证券本身来说就是价格低估了，这就会导致人们考虑卖出证券而买入期权(若期权交易价格高于公式计算出来的价格，则会出现相反的情况). 第 14 章将指出：几何布朗运动并不总是能够拟合实际数据，因而需要考虑更一般的模型. 在商品价格情形下，许多交易商执着地相信存在着平均价格回归现象：某些商品的市场价格总是倾向于回复到某个固定的价格. 第 15 章提出一个较几何布朗运动更一般的模型，它可用于模拟这类商品的价格流.

本版的新内容

第 3 版对上一版的几乎所有章节都做了修改，主要修改的地方如下：

- 第 3 章已经被完全改写了，给出了带漂移的布朗运动过程的最大变量分布的基本推导，也给出了 Cameron-Martin 定理的一个基本证明.
- 改写了 7.5.2 节，明确了简单推导 Black-Scholes 看涨期权定价公式的偏导数的参数.
- 7.6 节是新加的，介绍了欧式看跌期权风险中性价格的单调性和凸性结果.
- 第 10 章是新加的. 这一章分别介绍了一阶随机占优、二阶随机占优以及似然比序. 特别地，在这一章里给出了这样一个结论(10.5.1 节)：当方差增加时，正态随机变量在二阶随机占优意义下是递减的.
- 第 2 版的第 10 章在新版中为第 11 章.
- 第 12 章是新加的，介绍了随机动态规划.
- 第 2 版的第 11 章在新版中为第 13 章，其中 13.9 节是新增的，介绍了障碍期权与回望期权的连续时间近似.
- 第 2 版的第 12 章在新版中为第 14 章.
- 第 2 版的第 13 章在新版中为第 15 章.

应提及的一个技术问题是：使用记号 $\log(x)$ 表示 x 的自然对数，即以 e 为底的对数，这里 e 定义为

$$e = \lim_{n\to\infty}(1+1/n)^n,$$

其近似值为 2.718 28….

感谢 Ilan Adler 教授和 Shmuel Oren 教授的启发性交谈，感谢 Kyle Lin 先生提出许多宝贵的建议，感谢 Nahoya Takezawa 先生对全书提出整体修改意见以及他在最后几章有关数值计算方面所做的工作，还要感谢 Anthony Quas 教授、Daniel Naiman 教授和 Agostino Capponi 教授对上一版的有益评论.

目　录

第1章 概 率 论

1.1 概率和事件

考虑一个试验，以 S 表示该试验所有可能结果的集合，称之为样本空间．若试验中有 m 个可能的结果，我们一般把它们记为 1，2，…，m，所以 $S=\{1, 2, \cdots, m\}$．但是，当处理某些具体样本时，我们通常给它们一个描述性的名称．

例 1.1a i)掷一枚硬币的试验，试验的结果为硬币的正面朝上或反面朝上，样本空间为

$$S = \{h,t\},$$

其中 h 代表硬币正面朝上，t 代表反面朝上．

ii)掷两粒骰子的试验，结果由一对数(i, j)组成，其中 i 是第一粒骰子掷出的点数，j 是第二粒骰子掷出的点数，这样，此样本空间就包含下述 36 对数：

(1，1) (1，2) (1，3) (1，4) (1，5) (1，6)，
(2，1) (2，2) (2，3) (2，4) (2，5) (2，6)，
(3，1) (3，2) (3，3) (3，4) (3，5) (3，6)，
(4，1) (4，2) (4，3) (4，4) (4，5) (4，6)，
(5，1) (5，2) (5，3) (5，4) (5，5) (5，6)，
(6，1) (6，2) (6，3) (6，4) (6，5) (6，6)．

iii)r 匹马的赛马试验，马的编号为 1，2，3，…，r，比赛结果为马的名次，则样本空间为

$$S = \{1,2,3,\cdots,r \text{ 的全部名次排序}\}.$$

例如，若 $r=4$，比赛名次为 1 号马第一，4 号马第二，2 号马第三，3 号马第四，则对应的样本为{1，4，2，3}． □

再次考虑样本空间为 $S=\{1, 2, \cdots, m\}$的试验．现假定存在实数 $p_1, \cdots, p_m$，满足

$$p_i \geqslant 0, i = 1,\cdots,m, \quad \text{且} \quad \sum_{i=1}^{m} p_i = 1,$$

使 p_i 为试验出现结果 i 的概率．

例 1.1b 在例 1.1a i)中，如果掷出硬币正面和反面的可能性相同，则称硬币是规则的或无偏的，对于一个规则硬币我们有

$$p_h = p_t = 1/2.$$

如果硬币有偏，且正面朝上的可能性是反面朝上的两倍，则有

$$p_h = 2/3, \quad p_t = 1/3.$$

在例 1.1a ii)中，若骰子是均匀的，则所有结果的可能性相同且为

$$p_{(i,j)} = 1/36, \quad 1 \leqslant i \leqslant 6, \quad 1 \leqslant j \leqslant 6.$$

在例 1.1a iii)中，若 $r=3$，则有和为 1 的 6 个非负数：

$$p_{1,2,3}, p_{1,3,2}, p_{2,1,3}, p_{2,3,1}, p_{3,1,2}, p_{3,2,1},$$

其中 $p_{i,j,k}$表示 i 号马第一，j 号马第二和 k 号马第三的概率. □

由试验可能结果组成的任何集合称为事件. 也就是说，事件是所有可能结果集合 S 的子集. 对任意事件 A，如果试验的结果出现在 A 中，则称事件 A *发生*. 若将 A 发生的概率记为 $P(A)$，那么可根据下面的等式确定它的值：

2

$$P(A) = \sum_{i \in A} p_i. \tag{1-1}$$

注意这意味着：

$$P(S) = \sum_i p_i = 1. \tag{1-2}$$

换句话说，试验结果属于样本空间的概率为 1，这是一个期望的结果，因为 S 包含了试验中所有可能的结果.

例 1.1c 掷一对质量均匀的骰子，如果事件 A 是点数和为 7，则

$$A=\{(1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1)\}$$

且

$$P(A)=6/36=1/6.$$

若事件 B 表示点数和为 8，则

$$P(B) = p_{(2,6)} + p_{(3,5)} + p_{(4,4)} + p_{(5,3)} + p_{(6,2)} = 5/36.$$

在三匹马的赛马试验中，记事件 A 表示 1 号马赢，则 $A=\{(1, 2, 3), (1, 3, 2)\}$，且

$$P(A) = p_{1,2,3} + p_{1,3,2}.$$ □

对于任意事件 A，称所有包含在 S 中但不包含在 A 中的事件组成的集合为 A 的补集，记为 A^c. 就是说，A^c 发生，当且仅当 A 不发生，由于

$$\begin{aligned}1 &= \sum_i p_i \\ &= \sum_{i \in A} p_i + \sum_{i \in A^c} p_i \\ &= P(A) + P(A^c),\end{aligned}$$

所以有

$$P(A^c) = 1 - P(A). \tag{1-3}$$

即不包含在 A 中的结果出现的概率为 1 减去事件 A 发生的概率. 样本空间 S 的补集为空集 $\varnothing$，即不包含任何结果. 因为 $\varnothing=S^c$，由等式(1-2)、(1-3)得到 3

$$P(\varnothing)=0.$$

对任何两个事件 A，B，定义 A，B 的并集为由所有属于 A 或属于 B 的事件组成的集合，记为 $A\cup B$. 相应地定义交集 AB(或写为 $A\cap B$)为所有同时属于 A 和 B 的结果组成的集合.

例 1.1d 掷两粒骰子，设 A 代表点数和为 10 这一事件，B 为两骰子的点数均为大于 3 的偶数，则

$A=\{(4,6),(5,5),(6,4)\}$，$B=\{(4,4),(4,6),(6,4),(6,6)\}$.

因此

$$\begin{aligned} A\cup B &= \{(4,4),(4,6),(5,5),(6,4),(6,6)\}, \\ AB &= \{(4,6),(6,4)\}. \end{aligned}$$

□

对于任意事件 A，B，有

$$\begin{aligned} P(A\cup B) &= \sum_{i\in A\cup B} p_i, \\ P(A) &= \sum_{i\in A} p_i, \\ P(B) &= \sum_{i\in B} p_i. \end{aligned}$$

由于 A，B 共有的结果在 $P(A)+P(B)$ 中计算了两次，而在 $P(A\cup B)$ 中只计算一次，所以有下面的结果，称之为*概率的加法定理*.

命题 1.1.1

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB).$$

即包含在 A 或 B 中的试验结果发生的概率，等于 A 事件发生的概率加上 B 事件发生的概率，减去 A 和 B 同时发生的概率. 4

例 1.1e 设今天道-琼斯股票指数上升的概率为 0.54，明天上升的概率为 0.54，今明两天都上升的概率为 0.28. 道-琼斯指数在两天内都不上升的概率是多少?

解: 设事件 A 表示指数今天会上升，事件 B 表示指数明天会上升，则两天中指数至少有一天会上升的概率是

$$\begin{aligned} P(A\cup B) &= P(A)+P(B)-P(AB) \\ &= 0.54+0.54-0.28=0.80. \end{aligned}$$

因此，今明两天都不上升的概率为 $1-0.80=0.20$. □

如果 $AB=\varnothing$，则称 A 与 B *相互排斥*或*不相交*. 就是说，不可能同时发生的两

个事件是相互排斥的. 由于 $P(\varnothing)=0$，由命题 1.1.1 知，当 A，B 互斥时，有

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$

1.2 条件概率

设两个小组打算各自生产一件产品，所生产的两件产品都将被分为合格和不合格两个等级. 于是这个试验的样本空间包括以下 4 个可能结果：

$$S=\{(a, a), (a, u), (u, a), (u, u)\},$$

这里，例如 (a, u) 代表第一组的产品合格，第二组的产品不合格. 设这些结果的概率如下：

$$P(a,a) = 0.54,$$
$$P(a,u) = 0.28,$$
$$P(u,a) = 0.14,$$
5
$$P(u,u) = 0.04.$$

如果已获知生产的产品中恰好有一个合格这个信息，那么该合格品是由第一组生产的概率为多少? 为确定这一概率，进行以下推理：既然已知只有一个产品合格，则此时的结果只能是 (a, u) 或 (u, a). 由于 (a, u) 出现的概率是 (u, a) 出现概率的 2 倍，那么在已知它们中有一个发生这一信息下应仍满足这个条件. 因此结果为 (a, u) 的概率为 2/3，结果为 (u, a) 的概率为 1/3.

记 $A=\{(a, u), (a, a)\}$ 表示第一组的产品合格，$B=\{(a, u), (u, a)\}$ 表示仅有一个组的产品合格. 在已知只有一个组产品合格的条件下第一组产品合格的概率称为 A 在 B 已发生条件下的条件概率，记为

$$P(A \mid B).$$

$P(A \mid B)$ 的一般公式可以类似以上讨论得到，即若已知事件 B 发生，为使事件 A 也发生，必须使出现的事件同时在 A 和 B 中，也就是说，此事件包含在 AB 中. 现在，既然 B 已经发生了，我们可以把 B 看成一个新的样本空间，因此 AB 发生的概率等于 AB 的概率除以 B 的概率，即

$$P(A \mid B) = \frac{P(AB)}{P(B)}. \tag{1-4}$$

例 1.2a 掷两次硬币，设样本空间 $S=\{(h, h), (h, t), (t, h), (t, t)\}$ 中的四个样本点出现的概率相等，则在下面任一条件下，两次均为正面的条件概率为多少?

a)第一次掷出正面；

b)至少一次掷出正面.

解：记 $A=\{(h, h)\}$ 代表两次均为正面的事件；$B=\{(h, h), (h, t)\}$ 代表第一次掷币为正面；$C=\{(h, h), (h, t), (t, h)\}$ 代表至少有一次掷币为

正面，则 6

$$\begin{aligned}P(A \mid B) &= \frac{P(AB)}{P(B)} \\ &= \frac{P(\{(h,h)\})}{P(\{(h,h),(h,t)\})} \\ &= \frac{1/4}{2/4} \\ &= 1/2\end{aligned}$$

和

$$\begin{aligned}P(A \mid C) &= \frac{P(AC)}{P(C)} \\ &= \frac{P(\{(h,h)\})}{P(\{(h,h),(h,t),(t,h)\})} \\ &= \frac{1/4}{3/4} \\ &= 1/3.\end{aligned}$$

许多人会感到惊奇，为何 a)和 b)部分的答案不相同？为了解答案不同的原因，请首先注意，在第一次掷币为正面的条件下，第二次投掷出现正反面仍是等概率的，所以 a)中概率为 1/2. 另一方面，知道至少有一次为正面等价于结果不是(t, t)，所以此事件包含三个等可能的结果，即(h, h)，(h, t)，(t, h)，说明 b)部分的概率为 1/3. □

由等式(1-4)得到

$$P(AB) = P(B)P(A \mid B). \tag{1-5}$$

这表示 A，B 同时发生的概率等于 B 发生的概率乘以 A 在 B 发生下发生的条件概率，这个结果称为*概率的乘法定理*.

例 1.2b 取球试验：一个罐里有 16 个球，9 个蓝球，7 个黄球，以不放回的方式从中任取两个球. 如果罐中每个球被取到的概率相同，问取到的两个球都是 7
蓝球的概率是多少？

解： 设 B_1，B_2 分别表示第一次和第二次取出的为蓝球. 若已知第一次取出的为蓝球，则第二个球是从剩余 15 个球中取出的，其中 8 个为蓝球，所以 $P(B_2 \mid B_1)=8/15$，$P(B_1)=9/16$，因此

$$P(B_1 B_2) = \frac{9}{16}\frac{8}{15} = \frac{3}{10}.$$ □

A 在 B 发生下发生的条件概率不等于 A 的无条件概率. 换句话说，当知道试验的结果为 B 的元素时，通常会改变该结果为 A 的元素这一事件的概率.（如果 A 和 B 相互排斥会出现什么情况?）在 $P(A \mid B)=P(A)$的特殊情形下，称为 A

独立于 B. 由于

$$P(A \mid B) = \frac{P(AB)}{P(B)},$$

所以，当

$$P(AB) = P(A)P(B) \tag{1-6}$$

时，A 是独立于 B 的. 式(1-6)的关系对于 A，B 是对称的，也就是说当 A 独立于 B 时，B 也独立于 A，即 A，B 是独立事件.

例 1.2c 设一股票当天的收盘价不低于前一天的收盘价的概率为 0.52，且相连两天的价格是相互独立的. 求此后四天内收盘价下跌而第五天不下跌的概率.

解： 记 A_i 表示第 i 天收盘价下跌的事件. 由独立性，有

$$P(A_1A_2A_3A_4A_5^c) = P(A_1)P(A_2)P(A_3)P(A_4)P(A_5^c)$$

8 $$= (0.48)^4(0.52) = 0.0276.$$ □

1.3 随机变量及其期望值

一个数值变量的值若由某个随机试验结果所决定，则称之为随机变量. 例如，掷骰子所得点数或多次掷一枚硬币掷出正面的次数，均为随机变量. 由于随机变量的值取决于试验的结果，所以可以赋予它取每个值的概率.

例 1.3a 设随机变量 X 表示掷一对骰子掷出的点数之和. X 可能的取值为 2，3，…，12，且它们的概率如下：

$$P\{X=2\} = P\{(1,1)\} = 1/36,$$
$$P\{X=3\} = P\{(1,2),(2,1)\} = 2/36,$$
$$P\{X=4\} = P\{(1,3),(2,2),(3,1)\} = 3/36,$$
$$P\{X=5\} = P\{(1,4),(2,3),(3,2),(4,1)\} = 4/36,$$
$$P\{X=6\} = P\{(1,5),(2,4),(3,3),(4,2),(5,1)\} = 5/36,$$
$$P\{X=7\} = P\{(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)\} = 6/36,$$
$$P\{X=8\} = P\{(2,6),(3,5),(4,4),(5,3),(6,2)\} = 5/36,$$
$$P\{X=9\} = P\{(3,6),(4,5),(5,4),(6,3)\} = 4/36,$$
$$P\{X=10\} = P\{(4,6),(5,5),(6,4)\} = 3/36,$$
$$P\{X=11\} = P\{(5,6),(6,5)\} = 2/36,$$
$$P\{X=12\} = P\{(6,6)\} = 1/36.$$ □

设随机变量 X 的可能取值为 x_1，x_2，…，x_n，则概率集 $P\{X=x_j\}(j=1, \cdots, n)$称为随机变量 X 的概率分布. 由于 X 的取值都包含在这些值中，所以有

$$\sum_{j=1}^{n} P\{X = x_j\} = 1.$$

定义 设随机变量 X 取值为 x_1，x_2，…，x_n，X 的期望值记为 $E[X]$，定义如下： 9

$$E[X] = \sum_{j=1}^{n} x_j P\{X = x_j\}.$$

$E[X]$也称为 X 的期望或均值.

换言之，$E[X]$是 X 所有可能取值的加权值，权重等于 X 取相应值的概率.

例 1.3b 随机变量 X 表示一次赌博中所赢的金额. 假定该次赌博中有 60%的机会输掉 1，有 20%的机会赢得 1，有 20%的机会赢得 2，试求 $E[X]$.

解：

$$E[X] = -1(0.6) + 1(0.2) + 2(0.2) = 0.$$

所以，在这次赌博中赢的期望数量为 0. 获胜期望值为零的赌博称为公平赌博. □

例 1.3c 随机变量 X 取 1 的概率为 p，取 0 的概率为$(1-p)$，这样的随机变量称为参数为 p 的伯努利随机变量，其期望值为

$$E[X] = 1(p) + 0(1 - p) = p. \qquad \square$$

期望值的一个简单且有用的结果是：对于常数 a，b，有

$$E[aX + b] = aE[X] + b. \tag{1-7}$$

为证明式(1-7)，设 $Y=aX+b$. 由于 $X=x_j$ 时，$Y=ax_j+b$，所以

$$\begin{aligned}
E[Y] &= \sum_{j=1}^{n}(ax_j + b)P\{X = x_j\} \\
&= \sum_{j=1}^{n} ax_j P\{X = x_j\} + \sum_{j=1}^{n} bP\{X = x_j\} \\
&= a\sum_{j=1}^{n} x_j P\{X = x_j\} + b\sum_{j=1}^{n} P\{X = x_j\} \\
&= aE[X] + b.
\end{aligned}$$ 10

另外一个重要的结果是随机变量和的期望值等于随机变量期望值的和.

命题 1.3.1 对于随机变量 X_1，X_2，…，X_k，有

$$E\left[\sum_{j=1}^{k} X_j\right] = \sum_{j=1}^{k} E[X_j].$$

例 1.3d 考虑 n 次独立试验，每次试验成功的概率为 p. 随机变量 X 是试验成功的次数，称之为参数为 n 和 p 的二项随机变量. 为了得到 X 的概率分布，考虑试验结果列 s，s，…，f，这意味着第一次成功，第二次成功，……，第 n