

初中数学第六册

补充习题集

吉林省教育学院编

吉林人民出版社

第四章 函数及其图象

习 题 一

1. 求下列函数中自变量 x 的取值范围:

$$(1) y = \frac{2x-1}{2x^2-4x+1};$$

$$(2) y = \frac{1}{x-\sqrt{1}}$$

$$(3) y = \sqrt{2x}$$

$$(4) y = \frac{1}{1-|x-2|};$$

$$(5) y = \frac{x}{x+|x|};$$

$$(6) y = \sqrt{|x|-x}.$$

2. 已知 $f(x) = \sqrt{\frac{9}{4} - \sqrt{x}}$, 求 $f(0), f(4-2\sqrt{3})$.

3. 已知等腰三角形的周长为 18, 腰长为 x , 写出面积 S 和腰长 x 之间的函数解析式, 并求自变量 x 的取值范围。

4. 一开口木箱的体积是 4 立方米, 它的底面是正方形, 设底面的一边长为 x , 求表面积 A 用 x 表示的函数式。

5. 把下列等式化为 $y = f(x)$ 的形式:

(1) $2x + 3y - 1 = 0$;

(2) $xy = 1 + 3y$;

(3) $(x - 1)(y - 2) = x$;

(4) $x = \frac{y + 1}{y - 1}$;

(5) $x^2 + y^2 = 9$.

6. 设 $f(x) = \frac{1 + x^2}{1 - x^2}$, 求证:

(1) $f(-x) = f(x)$, (2) $f\left(\frac{1}{x}\right) = -f(x)$.

7. 已知 $Q(x) = \frac{2x}{x - 1}$, 求:

(1) $Q(a) + Q(a^{-1})$, (2) $Q[Q(\sqrt{3})]$.

8. 已知 $f(x) = \frac{1}{2x^2 - 3x + 1}$, 那么 $f(a) = \frac{1}{2a^2 - 3a + 1}$

对于任意实数 a 都成立吗?

9. 已知 $y > 2x$, 那么 y 和 x 之间是否有函数关系? 为什么?

10. 一人从甲地出发, 到相距若干公里的乙地去办事, 试根据下列图象回答问题:

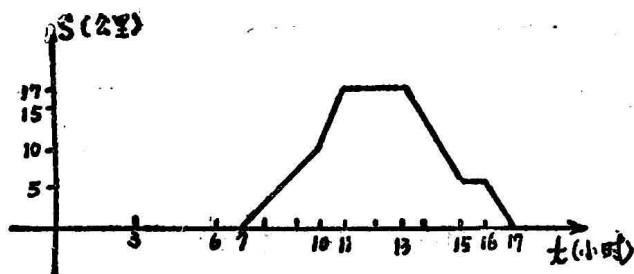
(1) 何时出发? 何时返回甲地? 往返共用多少小时?

(2) 10点到11点期间该人行走方向和速度?

(3) 13点到15点期间该人行走方向和速度?

(4) 15点到16点期间该人活动状况?

(5) 走路共用多少小时?



(第10题)

11. 已知 $f_1(x) = 2x + 5$, $f_2(x) = 3x - 1$,

(1) x 为何值时, $f_1(x)$ 的值是 $f_2(x)$ 的值的二倍?

(2) x 为何值时, $f_1(x)$ 的值比 $f_2(x)$ 的值大 3?

(3) x 在什么范围内 $f_1(x)$ 的值总小于 $f_2(x)$ 的值?

12. 已知 $f(x) = -3x + 2$, 试比较 $f(a)$ 和 $f(a^2)$ 的大小.

13. 已知函数 $f(x) = \frac{|x-2|}{x+1}$, 在此函数图象上求出

纵坐标为 2 的点的坐标.

14. 已知函数 $\varphi(x) = x - \sqrt{2x+3}$, 且 $\varphi(a) = 0$, 求 a .

15. 作下列函数图象:

(1) $y = \frac{|x|}{x}$;

(2) $y = |x-2| - 1$;

(3) $y = |x+1| + \sqrt{(x-2)^2}$.

16. $f(x) = \sqrt{x^2-4}$, $\varphi(x) = \sqrt{x+2} \cdot \sqrt{x-2}$, 问 $f(x)$ 与 $\varphi(x)$ 是否为同一函数? 为什么?

17. 边长为 a 的正方形 $ABCD$, 动点 P 由 A 点开始, 沿 $ABCD$ 的方向运动, 设 P 离开 A 点的路程为 x , $\triangle APD$ 的

面积为 y ，试求出 $y = f(x)$ 的解析式。

18. 求函数 $y = \frac{2x^2 + x - 1}{x + 1}$ 的图象和 x 轴交点的坐标。

习题一 答案或提示

1. (1) $x \geq \frac{1}{2}$ 但 $x \neq \frac{2 + \sqrt{2}}{2}$; (2) $x \leq 1$ 但 $x \neq \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$;

(3) $x = \frac{1}{2}$;

(4) $x \neq 1$ 并且 $x \neq 3$;

(5) $x > 0$;

(6) 全体实数。

2. $\frac{3}{2}$, $\sqrt{3} - \frac{1}{2}$;

3. $S = 3(9 - x)\sqrt{2x - 9}$, $x > 4\frac{1}{2}$.

4. $A = x^2 + \frac{16}{x}$.

5. (1) $y = \frac{1 - 2x}{3}$; (2) $y = \frac{1}{x - 2}$;

(3) $y = \frac{3x - 2}{x - 1}$; (4) $y = \frac{x + 1}{x - 1}$;

(5) $y = \pm \sqrt{9 - x^2}$.

7. (1) 2; (2) $6 - 2\sqrt{3}$.

8. 仅对于 $a \neq 1$ 且 $a \neq \frac{1}{2}$ 的一切实数成立

9. 没有函数关系，因为对于任一 x 的值， y 没有确定的值和它对应。

10. (1) 7点钟由甲地出发，17点钟返回甲地，往返共用10小时；(2) 10点到11点期间该人由甲地向乙地方行走，速度为每

小时 7 公里； (3) 13 点到 15 点该人由乙地向甲地方向行走，速度为每小时 6 公里； (4) 15 点到 16 点之间该人停留一个小时； (5) 走路共用 7 个小时；

11. (1) $x = \frac{7}{4}$; (2) $x = 3$; (3) $x > 6$.

12. $a = 0$ 或 $a = 1$ 时 $f(a) = f(a^2)$

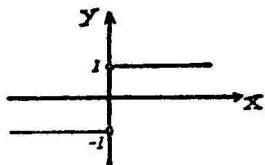
$a < 0$ 或 $a > 1$ 时 $f(a) > f(a^2)$

$0 < a < 1$ 时 $f(a) < f(a^2)$

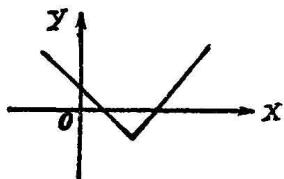
13. $(0, 2)$, $(-4, 2)$

14. $a = 3$

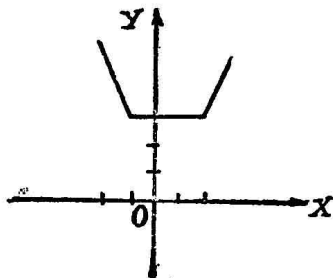
15. (1) $y = \begin{cases} 1 & (x > 0) \\ -1 & (x < 0) \end{cases}$



(2) $y = \begin{cases} x - 3 & (x \geq 2) \\ 1 - x & (x < 2) \end{cases}$



(3) $y = \begin{cases} -2x + 1 & (x < -1) \\ 3 & (-1 \leq x \leq 2) \\ 2x - 1 & (x > 2) \end{cases}$



16. 不是同一函数，因为 x 取值范围不同。

$$17. y = \begin{cases} \frac{1}{2} a x & (0 \leq x < a) \\ \frac{1}{2} a^2 & (a \leq x < 2a) \\ \frac{1}{2} a (3a - x) & (2a \leq x < 3a) \\ 0 & (3a \leq x \leq 4a) \end{cases}$$

18. $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$

习 题 二

1. 下列各题中哪些是正比例函数关系？哪些是反比例函数关系？哪些既不是正比例函数关系也不是反比例函数关系？

(1) 底面是正方形的长方体，当底面边长一定时，体积 V 和高 h ；

(2) 底面是正方形的长方体，当高一定时，体积 V 和底面边长 a ；

(3) 一桥桩高 5 米，露出水面部分 y 和水深 x ；

(4) 圆的面积和半径的平方；

(5) 当三角形的面积一定时，周长和内切圆的半径；

(6) 在弹性限度内，弹簧的总长度和所加重物的重量；

(7) 在半圆内，弧的长度和它所对的弦的长度；

(8) 骑自行车在一段路程内行驶，自行车车轮半径与车轮的转数；

9) 电压一定时, 电阻和电流强度;

(10) 梯形的面积一定时, 中位线和高。

2. 在正比例函数 $y = 3x$ 的图象上, 求出座标和为 8 的点。

3. 在反比例函数 $y = \frac{6}{x}$ 的图象上, 求出到原点的距离为 $\sqrt{13}$ 的点。

4. 已知函数图象上任一点到 y 轴的距离与到 x 轴的距离之比为 $1:2$, 求此函数关系。

5. a 和 b 的算术平方根成正比例, 并且当 $b=9$ 时, $a=18$, 求 $b=3-2\sqrt{2}$ 时 a 的值。

6. 已知 $f(x)$ 为反比例函数, 证明 $f[f(x)]$ 为正比例函数。

7. 已知 $f_1(x)$ 是正比例函数, $f_2(x)$ 是反比例函数, 且 $\frac{f_1(1)}{f_2(1)} = 2$, $f_1(2) + 4f_2(2) = 6$, 求此正比例函数和反比例函数。

8. 正比例函数图象过二、四象限, 已知图象上一点 A , 它到原点 O 的距离等于 5, OA 在轴上的射影为 OB , $\triangle OAB$ 的面积为 6, 求此正比例函数。

9. 已知 $X^{m+n} - ay^{m-n} = 0$ ($a \neq 0$), 问 m, n 为何值时 y 是 x 的反比例函数? 并求出对应的反比例系数。

10. 已知 $y = (2m^2 - 7m - 9)x^{m^2 - 9m + 10}$

(1) m 为何值时, y 和 x 的关系成正比例函数, 且它的图象在二、四象限?

(2) m 为何值时, y 和 x 的关系成反比例函数, 且它的图象在一、三象限?

习题二 答案或提示

1. (1), (4) 为正比例函数关系; (5)、(8)、(9)、(10) 为反比例函数关系; (2)、(3)、(6)、(7) 既不是正比例函数关系也不是反比例函数关系。

2. (2, 6)

3. (2, 3), (3, 2), (-2, -3), (-3, -2)

4. $y = 2x$ 或 $y = -2x$

5. $a = 6\sqrt{2} - 6$

7. $y = 2x$, $y = \frac{1}{x}$

8. $y = -\frac{4}{3}x$, $y = -\frac{3}{4}x$

9. $m = 0$, $n = 1$ 时, 反比例系数为 a ,

$m = 0$, $n = -1$ 时, 反比例系数为 $\frac{1}{a}$ 。

10. ① $m = 3$, ② $n = 5$ 。

习 题 三

1. 已知 $f(x) = ax + b$, 并且 $f(1) = 4$, $f(-1) - f(-2) = 3$, 求 $f(x)$ 的解析式。

2. 一次函数 $f(x)$ 在 y 轴上的截距为 3, 且 $zf(1) + 3f(2) = -1$, 求 $f(x)$ 的解析式。

3. 已知一次函数 $f(x) = -5x + 2$, 当增加 10 时确定 y 值的变化。

4. 求直线 $y = 2x - 1$ 和座标轴所围成的三角形的面积。

5. 一次函数 $y = 2(x+k)$ 的图象与直线 $y = 3x-6$ 的交点在 y 轴上, 求 k 。

6. 直线 $y = 3x-2$ 沿着 x 轴平行移动多少单位时, 能使其经过 $(5,3)$?

7. 试求出二直线 $y = x+3$, $y = -2x+6$ 与 x 轴所围成的图形的面积。

8. 已知 $f(x)$ 为一次函数, 且 $f[f(x)] = 9x-2$, 求 $f(x)$ 。

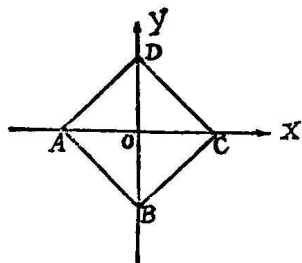
9. 已知 $f(x) = ax+b$, 求证:

$$f\left(\frac{p+q}{2}\right) = \frac{f(p)+f(q)}{2}.$$

10. 已知一次函数 $y = f(x)$, 每当自变量增加 5 时函数值就减少 12, 且图象过点 $(-5, -5)$, 求此一次函数。

11. 已知一次函数的图象在两坐标轴上的截距相等, 且

经过点 $M(-1, 3)$, 求此一次函数。



(第12题)

12. 如图, 边长为 1 的正方形 ABCD, 其对角线分别在 x 、 y 轴上, 求出四条边所对应的函数式, 并指出 x 的变化范围。

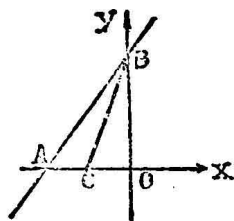
13. 一次函数图象平行

于直线 $y = \frac{1}{2}x$, 且被两坐

标轴所截取的线段长为 $3\sqrt{5}$, 求此一次函数。

14. 如图, 直线 $y = kx+b$ ($k \neq 0$, $b \neq 0$), 与 x 、 y 轴分别交于 A、B 两点, 求 $\triangle OAB$ 中 OA 上边的中线。

BC 所在直线所对应的一次函数。



习题三 答案或提示

(第14题)

1. $y = 3x + 1$;

2. $y = -\frac{1}{2}x + 3$

3. y 值减小 50;

4. $\frac{1}{4}$

5. $k = -3$

6. 沿 x 轴向右平移 $3\frac{1}{3}$ 个单位。

7. 12

8. $f(x) = 3x - \frac{1}{2}$,

10. $y = -\frac{12}{5}x - 17$.

11. 提示: 设 $y = kx + b$, 则此直线经过点 $(0, b)$, 也必经过点 $(b, 0)$, 且有 $-k + b = 3$

解方程组 $\begin{cases} kb + b = 0 \\ -k + b = 3 \end{cases}$ 得 $\begin{cases} b = 0 \\ k = -3 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} b = 2 \\ k = -1 \end{cases}$

$\therefore$ 一次函数为 $y = -3x$ 或 $y = -x + 2$

12. AB: $y = -x - \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \leq x \leq 0\right)$

BC: $y = x - \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\left(0 \leq x \leq \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

CD: $y = -x + \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\left(0 \leq x \leq \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

DA: $y = x + \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \leq x \leq 0\right)$

13. 提示: 设 $y = \frac{1}{2}x + b$, 则它与 x, y 轴分别交于 $(-2b, 0)$,

$(0, b)$, 那么 $(-2b)^2 + b^2 = (3\sqrt{5})^2$, 解得 $b = \pm 3$

14. 提示: 设一次函数为 $y = k_1x + b$, $\because A$ 点坐标为 $(-\frac{b}{k}, 0)$,
 C 点坐标为 $(-\frac{b}{2k}, 0)$, 代入所设函数, 解得 $k_1 = 2k$, $\therefore$ 一次函数为 $y = 2kx + b$.

习 题 四

1. 已知二次函数 $y = 2x^2 - 6x + 1$, 用 $x + 2$ 代替函数式中的 x , 写出新的函数关系式, 并说明新的函数图象和原函数图象的关系。

2. 在抛物线 $y = \frac{1}{4}x^2$ 上求出坐标和为15的点的坐标。

3. 已知二次函数 $y = -x^2 + 2(m-1)x + 2m - m^2$,

(1) 若函数图象通过坐标原点, 求 m 的值;

(2) 如果函数图象关于 y 轴对称, 求其顶点坐标。

4. 已知 $f(x) = \frac{1}{2}(x^2 - x)$, 求证:

$$f(m+n) = f(m) + f(n) + mn.$$

5. K 为何值时, 函数 $y = -3x^2 + 2x + k$ 的图象和 x 轴有二交点? 和 x 轴相切? 和 x 轴不相交?

6. 当 k 为何值时, 函数 $y = x^2 - kx + 2$ 的解析式是一个完全平方式, 这时函数的图象和 x 轴有什么关系?

7. 已知 $f(x) = ax^2 + bx + 5$, 并且 $f(x+1) - f(x) = 8x + 3$, 求函数式中 a 和 b 的值。

8. 已知函数 $y = ax^2 + bx + c$, 按下列条件求出 a 、 b 、 c 的值。

(1) $x=0$ 时, 函数值为 1, 图象顶点是 $(2, -3)$;

(2) 图象过点 $(0, 1)$, 对称轴是 $x=1$, 函数的极小值是 -1 ;

(3) 图象经过点 $(-1, -1)$, 对称轴是 $x+2=0$, 并且在 x 轴上截取的线段长为 $2\sqrt{2}$ 。

9. 已知二次函数 $y = 4x^2 - kx + 7$, k 为何值时抛物线和 x 轴的两交点距离为 3?

10. 已知二次函数 $y = 2x^2 - 12x + 20$, 分别求出和已知抛物线关于 x 轴, y 轴对称的抛物线的函数式。

11. 求证函数 $y = ax^2 + (a-1)x + (a-1)$ 的值当 $a < -\frac{1}{3}$ 时恒小于零。

习题四 答案或提示

1. $y = 2x^2 + 2x - 3$, 新函数的图象在原函数图象的右方两个单位。

2. $(-10, 25)$; $(6, 9)$

3. (1) $m=0$ 或 $m=2$, (2) $y = -x^2 + 1$. ($m=1$ 时)

5. $K > -\frac{1}{3}$, $K = -\frac{1}{3}$, $K < -\frac{1}{3}$.

6. $K = \pm 2\sqrt{2}$ 图象与 x 轴相切。

7. $a=4$, $b=-1$ 。

8. (1) $a=1$, $b=-4$, $C=1$ 。

(2) $a=2$, $b=-4$, $C=1$,

(3) $a=1$, $b=4$, $C=2$,

9. $k = \pm 8$

10. (1) $y = 2x^2 + 12x + 20$;

(2) $y = -2x^2 + 12x - 20$,

11. 提示: 经过配方把二次函数化为

$$y = a \left(x + \frac{a-1}{2a} \right)^2 + \frac{4a(a-1) - (a-1)^2}{4a}$$

$$= a \left(x + \frac{a-1}{2a} \right)^2 + \frac{3a^2 - 2a - 1}{4a}$$

$$= a \left(x + \frac{a-1}{2a} \right)^2 + \frac{(3a+1)(a-1)}{4a}$$

当 $a < -\frac{1}{3}$ 时, $a \left(x + \frac{a-1}{2a} \right)^2 < 0$, $3a+1 < 0$.

$a-1 < 0$, $4a < 0$, $\therefore y < 0$

习 题 五

1. 解下列不等式组

$$(1) \begin{cases} \frac{7-x}{2} - 3 < \frac{3+4x}{5} - 4 \\ \frac{5}{3}x + 5(4-x) < 2(4-x) \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} \frac{3x+5}{7} + \frac{10-3x}{5} > \frac{2x+7}{3} - 8 \\ \frac{7x}{3} - \frac{11(x+3)}{6} > \frac{3x-1}{5} - \frac{13-x}{2} \end{cases}$$

$$(3) \begin{cases} 6x+2 < 4x \\ \frac{2x-1}{5} < \frac{x+1}{2} \end{cases}$$

$$(4) \begin{cases} \frac{5(x-1)}{6} - 1 > \frac{2(x+1)}{3} \\ 2 + \frac{3(x+1)}{8} < 3 - \frac{x-1}{4} \end{cases}$$

$$(5) \begin{cases} 5(x+1) + 6(x+2) > 9(x+3) \\ 7x - 3(2x+3) > 2(x-18) \end{cases}$$

$$(6) \begin{cases} (x-2)^2 > (x+1)^2 \\ (x+1)^2 < (x-1)^2 \end{cases}$$

2. 解下列不等式

$$(1) 2|x+1| + 5 < 6$$

$$(2) 5|x-1| - 2 < \frac{1}{2}$$

$$(3) |x-3| + |4-x| > 2$$

$$(4) |x+5| > |x-2| + 4$$

3. 解下列不等式

$$(1) \frac{\sqrt{2} - \sqrt{3}}{x + \sqrt{2}} > 0 \quad (2) \frac{2 - \sqrt{5}}{2x - \sqrt{5}} < 0$$

$$(3) \frac{2m-3}{3m-4} < 2 \quad (4) \frac{1}{a-4} < 1 - \frac{a}{4-a}$$

$$(5) \frac{x-1}{x^2+1} > 0 \quad (6) \frac{x^2}{3-x} - \frac{3}{x-3} > 0$$

4. 已知 $f(x) = 3x - 2$, 并且函数值在闭区间 $[5, 9]$ 上变化, 求 x 的变化范围。

5. 已知函数 $y = 3x^2 - 4x + 2$, x 为何值时函数图象在直线 $y = 1$ 的上方?

6. 已知 $f_1(x) = 5x - 3$, $f_2(x) = 3x + 2$, a 为何值时有 $f_1(a) > 2f_2(a)$?

7. 已知直线 $y = 2x + 3$ 和 $y = 3x + b$,

(1) b 为何值时, 二直线交点在 x 轴上?

(2) b 为何值时, 二直线交点在第二象限?

8. 求下列不等式组的整数解

$$(1) \begin{cases} x+2 \geq \frac{x-9}{6} + \frac{x+5}{2} \\ 1 - \left(\frac{x-2}{4} + \frac{2}{3} \right) \geq \frac{x}{6} \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} x(x^2+1) > (x+1)(x^2-x+1) \\ (1-x)^3 + x(x^2+1) > 3(x^2+x-9) \end{cases}$$

9. 求下列不等式的正整数解

$$(1) |4x - \dots| < 4$$

10. 如果 a 方程 $x^2 + 2(a - b)x + a^2 + b^2 = 0$ 的根是不相等的实数?

11. k 是什么实数时下列方程的解是正数? 是负数? 等于零? 没有解?

$$(1) kx + 2 = 5x + k$$

$$(2) \frac{x+1}{k-2} = \frac{2x-3}{k+5}$$

12. 一个分数的分子和分母都是自然数, 分子比分母小 1, 如果分子和分母分别加上 1, 那么所得的分数就大于 $\frac{4}{5}$, 如果分子和分母分别减去 1, 那么所得的分数就小于 $\frac{6}{7}$, 求这个分数。

13. 若 $x^2 - 5x + 6 < 0$, 且 $p = x^2 + 5x + 6$, 求 p 的取值范围。

习题五 答案或提示

1. (1) $x > 9$, (2) $x < 2$, (3) $-\frac{7}{3} < x < -1$,

(4) 空集, (5) $5 < x < 27$, (6) $x < 0$.

2. (1) $-\frac{3}{2} < x < -\frac{1}{2}$ (2) $\frac{1}{2} < x < \frac{3}{2}$

(3) 提示: 分成几个范围讨论

若 $x < 3$, 原不等式化为

$$3 - x + 4 - x > 2, \quad \text{解得 } x < \frac{5}{2}$$

若 $3 \leq x \leq 4$, 原不等式化为

$$x - 3 + 4 - x > 2, \text{ 即 } 1 > 2, \text{ 解为空集}$$

若 $x > 4$, 原不等式化为

$$x - 3 + 4 - x > 2, \quad \text{解得 } x > \frac{9}{2}$$

(4) $x > \frac{1}{2}$

3. (1) $x < -\sqrt{2}$, (2) $x > \frac{\sqrt{2}}{2}$, (3) $m < \frac{5}{4}$ 或 $m > \frac{4}{3}$

(4) $a < \frac{5}{2}$ 或 $a > 4$, (5) $x > 1$ (6) $x < 3$

4. $\frac{7}{3} \leq x \leq \frac{11}{3}$, 5. $x < \frac{1}{3}$ 或 $x > 1$

6. $a < -7$. 7. (1) $b = \frac{9}{2}$, (2) $3 < b < \frac{9}{2}$

8. (1) $-3, -2, -1, 0$; (2) $2, 3, 4, 5$.

9. (1) $1, 2, 3, 4$; (2) $1, 2, 3, 4, 5$.

10. a, b 异号时, 二根是不相等的实数.

a, b 同号时, 没有实数根.