不动点理论及应用

陈汝栋 ◎ 编著

Fixed Point Theory and Applications

国防工业出版社
National Defense Industry Press

不动点理论及应用

陈汝栋　编著

国防工业出版社
·北京·

内 容 简 介

本书是作者近10年来从事研究生不动点理论课程教学总结出的成果，结合了前辈的相关专著，逐渐探索出适合非线性泛函分析方向研究生了解该方向相关理论的历史发展、必要的理论准备以及了解该方向的最新发展所需要的内容，并于2004年形成讲义，经过6年的使用，不断修改、完善和充实。它包含了压缩型映像不动点理论及其发展，Caristi不动点定理及相关理论，扩张映像、非扩张映像的不动点理论和随机空间、概率度量空间的不动点理论，花了较大篇幅介绍了不动点或零点迭代逼近的一些最新成果。希望本书的出版，对本方向的研究生和从事相关研究的教师都有一定的帮助。

图书在版编目(CIP)数据

不动点理论及应用/陈汝栋编著.—北京：国防工业出版社，2012.1

ISBN 978-7-118-07480-2

Ⅰ.①不... Ⅱ.①陈... Ⅲ.①不动点定理—研究生—教材 Ⅳ.①O189.2

中国版本图书馆CIP数据核字(2011)第099433号

※

国防工業出版社出版发行

(北京市海淀区紫竹院南路23号 邮政编码100048)

北京嘉恒彩色印刷有限责任公司

新华书店经售

*

开本 710×960 1/16 **印张** 9½ **字数** 170千字

2012年1月第1版第1次印刷 **印数** 1—3000册 **定价** 29.00元

(本书如有印装错误，我社负责调换)

国防书店：(010)88540777 发行邮购：(010)88540776

发行传真：(010)88540755 发行业务：(010)88540717

前　言

法国数学家 H. Poincaré 于 1895 年至 1900 年，在“庞加莱的最后定理”中，把限制性三体问题的周期解的存在问题，归结为满足某种条件的平面连续变换不动点的存在问题，首先使用了不动点概念。1910 年，L. E. J. Brouwer 证明了有限维空间中多面体上的连续映射至少有一个不动点，从而开启了不动点理论研究的先河。特别是波兰数学家 Banach 在 1922 年使用 Picard 迭代方法证实了 Banach 压缩映像原理之后，由于其结果的优美性和成功地解决了像隐函数存在定理、微分方程初值问题解的存在性等一系列重大应用问题，使得不动点理论成为数学宝库中的一朵奇葩，促使数学家们对其进行了深入和广泛的研究。特别是近几十年来，随着计算机的发展，人们使用各种各样的迭代方法去逼近非线性映射的不动点并应用其解决某些实际问题。例如，在数学、物理学及工程上的许多问题都可以转化为非扩张映射的不动点问题，使得这门学科的理论及应用研究都取得了重要进展，并日臻完善，形成了非线性泛函分析理论的重要组成部分。作为非线性泛函分析方向的硕士研究生，掌握不动点领域的基本理论和方法尤其重要。

作者近 10 年来从事研究生不动点理论课程的教学，结合前辈的相关专著，逐渐探索出适合非线性泛函分析方向研究生了解该方向相关理论的历史发展、必要的理论准备以及了解该方向最新发展所需要的内容，并于 2004 年形成讲义，又经过 6 年的使用，不断修改、完善和充实，形成了本书。它包含了压缩型映像不动点理论及其发展，Caristi 不动点定理及相关理论，扩张映像、非扩张映像的不动点理论和随机空间、概率度量空间的不动点理论，花了较大篇幅介绍了不动点或零点迭代逼近的一些最新成果。希望本书的出版，对本方向的研究生和从事相关研究的教师都有一定的帮助。

在本书的编写过程中，作者参阅了张石生教授、郭大均教授、王梓坤教授等先辈的专著以及周海云教授、张宪教授等学者的成果，他们的成果都为本书增色。本书中也包含作者本人以及我和我的研究生姚永红、宋义生、贺慧敏、宋云燕、祝志川、刘玉军等同学的一些近期成果。另外，我的研究生段桂花、刘明辉、李凯、绳德磊、郭远升和陈涛帮忙打印了部分手稿，我的女儿陈颖也帮我打印了

部分手稿，我的妻子于延荣教授在成稿的过程中给予了我巨大的支持并提出了许多有价值的建议，使我能够最后完成本书，在此一并表示感谢。

本书出版得到了国家自然科学基金的资助，项目号：11071279。

由于作者水平有限，书中不足及不尽如意之处在所难免，诚望读者批评指正。

作 者

2012年1月于天津

目　录

第 1 章　引　言

一、什么是不动点

处理非线性问题有多种不同方法：

(1) 拓扑度理论。归结为求 $f(x)=p$ 的解，则可以用拓扑度方法($f(x)=p$有解的问题转化为拓扑度的非零问题)。

(2) 变分方法：$f(x)\leqslant p$。

求算子方程的极值、变分不等式、临界点理论、控制论、优化理论、min/max 问题等。

(3) 不动点方法(本书重点)。

(4) 近似方法。各种迭代逼近方法为近似计算提供了理论支持。

(5) 半序方法。

定义　设 X 为一集合，映像 $T:X\to X$，若存在 x^* 使 $x^*=Tx^*$，则称 x^* 为映像 T 的不动点。

对集值映像 $T:X\to 2^X$，若存在 x^* 使 $x^*\in Tx^*$，称 x^* 为集值映像 T 的不动点。

对两个映像 $S,T:X\to X$，若存在 x^* 使 $x^*=Tx^*=Sx^*$，称 x^* 为单值映像 S 和 T 的公共不动点。

对两个集值映像 $S,T:X\to 2^{X^*}$，若存在 $x^*\in X$ 使得 $x^*\in Sx^*\cap Tx^*$，称 x^* 为集值映像 S 和 T 的公共不动点。

例 1.1　欲解方程 $Tx=y$，可转化为 $Tx-y+x=x$，令 $S(x)=Tx-y+x$，则方程的求解问题转化为求 $S(x)$ 的不动点。

例 1.2　积分方程 $x(s)=y(s)+\lambda\int_a^b k(s,t)f(t,x(t))\,\mathrm{d}t$ 称为 Hammerstein 方程，可化为

$$x=y+\lambda * Tx=S(x)$$

只要求 $S(x)$ 的不动点，这里 x 为函数。

例 1.3　初值问题 $\begin{cases}y'=f(t,x(t))\\x(0)=0\end{cases}\Leftrightarrow x(t)=\int_0^t f(s,x(s))\mathrm{d}s=T(x(t))$，即求

$T(x)$的不动点。

其他例子以后再举。

二、不动点定理分类

1. 拓扑型不动点——定理条件涉及到拓扑性质

1912 年，Brouwer 建立了第一个不动点定理：

设 B 是 R^n 中的紧凸集，$T:B\to B$ 连续，则 T 在 B 中有不动点。

2. 代数型不动点

1922 年，Banach 提出第一个代数不动点定理：

设(X,d)为完备度量空间，$T:X\to X$，T 满足压缩条件：

$$d(Tx,Ty)=kd(x,y),o\leqslant k<1,\forall x,y\in X$$

则 T 在 X 中存在唯一的不动点 x^*，且 $\forall x_0\in X, x_n=T^n x_0\to x^*$，有

$$d(x_n,x^*)\leqslant\frac{k^n}{1-k}d(x_0,Tx_0)$$

3. 混合型不动点定理

1955 年，Krasnoselski 建立了如下定理：

设 X 是 Banach 空间，$K\subset X$，闭凸，$F,T:K\to X$(非自映射)满足：

(1) $Fx+Ty\in K\ \forall x,y\in K$；

(2) F 为紧的，连续映射；

(3) T 为压缩映射；

则 $\exists x^*\in K$ 使得 $x^*=Tx^*+Fx^*$。

三、不动点理论发展简介

1. 拓扑型

(1) 1912 年，Brouwer，设 $\bar{\Omega}\subset R^n$ 为有界闭凸集 $f:\bar{\Omega}\to\bar{\Omega}$ 连续，则 f 在 $\bar{\Omega}$ 中存在不动点。

(2) 1930 年，Shauder，设 X 为 Banach 空间，$B\subset X$ 为紧凸集，$f:B\to B$ 连续，则 f 在 B 中存在不动点。

(3) 1935 年，Tychonorff，设 X 为局部凸 Hausdorff 拓扑线性空间，$B\subset X$ 为紧凸集，$f:B\to B$ 连续，则 f 在 B 中存在不动点。

(4) 1941 年，Kakutani(角谷静夫，推广到多值映像)，设 $f:B\subset R^n\to z^n$ 非空

闭凸值，上半连续，B 紧凸，则 f 在 B 中有不动点。

(5) 1950 年—1952 年，Kakutani-Fan-Glickcberg，设 X 为局部凸 Hausdorff 拓扑线性空间，$B\subset X$ 为紧凸集，$f:B\to 2^B$ 为非空闭凸值，上半连续映射，则 f 在 B 中有不动点。

(6) 1968 年，Browder，设 X 为 Hausdorff 拓扑线性空间，$B\subset X$ 为紧凸集，$S:B\to 2^B$ 满足：

① $\forall x\in B, Sx$ 非空凸；

② $\forall y\in B, S^{-1}(y)$是开集；

则 S 在 B 中存在不动点。

(7) 推广到一般拓扑空间，无结论。

应用：不变子空间：$T:X\to X, Y\subset X$ 为子空间，$TY\subset Y$，称 Y 为 T 的不变子空间。

1936 年，Von Neumann 提出：T 为线性连续算子，T 是否有不变子空间？

渐渐地，人们发现，X 为 Hilbert 空间，T 为全连续，则 T 有不变子空间；X 为 Banach 空间，T 为全连续，则 T 有不变子空间。

1973 年，Lomonosov 证明了(用到了 Shauder 不动点定理) T 为有界线性，S 为全连续，且 $TS=ST$，则 T 有不变子空间。

P. Enflo 于 1975 年给出了没有非平凡不变子空间的有界算子的例子，CharlesRead 于 1984 年也给出一个反例。

2. 代数型不动点

(1) 1922 年，Banach 首先提出压缩映像原理。

(2) 压缩型映像不动点定理的各种推广。

(3) 非扩张映像 $d(Tx,Ty)\leqslant d(x,y)$。

(4) 扩张型 $d(Tx,Ty)\geqslant kd(x,y), k>1$。

S. Park、Rhoades 将扩张映像化为 Caristi 不动点定理的特例。

(5) 多值压缩映像的不动点定理。

(6) 紧凸集上的不动点。

(7) Caristi 不动点定理。

Ekeland(加拿大)变分原理。

(8) 随机不动点定理。

(9) 概率度量空间。概率赋范空间中的不动点定理。

(10) 2-距离，G-度量空间，H-空间中的不动点定理。

(11) 半序方法。

(12) Fuzzy 映像的不动点定理。

(13) 相容映像的不动点定理。

3. 几个简单的不动点定理

定理 1.1 设 X 为完备度量空间，$T:X\to X$，则 T 的任意不动点在 $\bigcap_{n=1}^{\infty}T^nX$ 内；若 $\bigcap_{n=1}^{\infty}T^nX=\{y\}$，则 $y=Ty$。

定理 1.2 设 X 为 Hausdorff 拓扑空间，$T:X\to X$ 连续，且 $\lim T^nx=y$，则 $Ty=y$。

定理 1.3 X 为一度量空间，$B\subset X$ 闭，$C\subset X$ 紧，$T:B\to C$ 连续，且 $\forall\varepsilon>0$，$\exists x(\varepsilon)$ 使 $d(Tx(\varepsilon),x(\varepsilon))<\varepsilon$，则 T 有不动点。

满足 $\forall\varepsilon>0, d(Tx(\varepsilon),x(\varepsilon))<\varepsilon$，称 $x(\varepsilon)$ 为 T 的 ε-不动点。

证明：$\forall\varepsilon>0$，$\{Tx(\varepsilon)\}\subset C$(紧)，$\exists\varepsilon_n$(不妨设 $\varepsilon_n\to 0$)，$Tx(\varepsilon_n)\to y$，又

$$d(x(\varepsilon_n),y)\leqslant d(x(\varepsilon_n),Tx(\varepsilon_n))+d(Tx(\varepsilon_n),y)\leqslant\varepsilon_n+d(Tx(\varepsilon_n),y)\to 0$$

故

$$x(\varepsilon_n)\to y$$

所以

$$Ty=T\lim(x(\varepsilon_n))=\lim T(x(\varepsilon_n))=y$$

定理 1.4 设 $T:X\to X$(度量空间)连续，$d(T^nx,T^{n+1}x)\to 0$，则 $\{T^nx\}$ 的任一极限点都是 T 的不动点。

证明：设 $T^{n_i}x\to y$，有

$$\lim T^{n_i}Tx=T\lim T^{n_i}x=Ty$$

所以

$$d(y,Ty)\leqslant d(y,T^{n_i}x)+d(T^{n_i}x,T^{n_i+1}x)+d(T^{n_i+1}x,Ty)\to 0$$

第 2 章　压缩型不动点定理分类及 Rhoades 问题

本章将介绍压缩映像、Rhoades 问题以及它的一些推广情形。

一、不动点的分类与 Rhoades 问题

按照压缩条件的不同，对不动点可进行如下分类：

设(X,d)为度量空间，映射 $T:X\to X$，称满足下列第(i)个条件的映射为第(i)类压缩映射，记为 $T\in(i)$，不同作者分别在相应条件下证明了不动点定理。

(1) 1922 年，Banach，对于任意的 $x,y\in X$，有

$$d(Tx,Ty)\leqslant kd(x,y),k\in[0,1)$$

(2) 1962 年，Rakotch，存在单调函数 $\alpha(t):(0,+\infty)\to(0,1)$使得

$$d(Tx,Ty)\leqslant\alpha(d(x,y))d(x,y),x\neq y$$

(3) 1961 年，M. Edelstein，对于任意的 $x,y\in X,x\neq y$，有

$$d(Tx,Ty)<d(x,y)$$

(4) 1969 年，R. Kannan，$\exists h\in(0,\frac{1}{2})$，对于任意的 $x,y\in X$，有

$$d(Tx,Ty)\leqslant h\{d(x,Tx)+d(y,Ty)\}$$

(5) 1972 年，R. M. Bianchichi，$\exists h\in(0,1)$，对于任意的 $x,y\in X$，有

$$d(Tx,Ty)\leqslant h\max\{d(x,Tx),d(y,Ty)\}$$

(6) 1971 年，Reich，$\exists a,b,c\geqslant 0,a+b+c<1$，对于任意的 $x,y\in X$，有

$$d(Tx,Ty)\leqslant ad(x,Tx)+bd(y,Ty)+cd(x,y)$$

(7) 1971 年，Reich，$\exists a(t),b(t),c(t):(0,+\infty)\to(0,1)$单调减少，$a(t)+b(t)+c(t)<1$，对于任意的 $x,y\in X$，有

$$d(Tx,Ty)\leqslant a(d(x,y))d(x,Tx)+b(d(x,y))d(y,Ty)+c(d(x,y))d(x,y)$$

(8) 1972 年，Roux，Socrdi，对于任意的 $x,y\in X$，有

$$d(Tx,Ty)\leqslant h\max\{d(x,Tx),d(y,Ty),d(x,y)\},0<h<1$$

(9) 1972 年,V. M. Sehgal,对于任意的 $x,y\in X$,$\forall x\neq y$,有

$$d(Tx,Ty) < \max\{d(x,Tx),d(y,Ty),d(x,y)\}$$

(10) 1972 年,S. K. Chatterjea,$\exists h\in(0,\frac{1}{2})$,对于任意的 $x,y\in X$,有

$$d(Tx,Ty)\leqslant h\{d(x,Ty)+d(y,Tx)\}$$

(11) 1973 年,G. E. Hardy,T. D. Rogers,存在 $\sum a_i<1$,对于任意的 x,$y\in X$,有

$$d(Tx,Ty)\leqslant a_1d(x,y)+a_2d(x,Tx)+a_3d(y,Ty)+a_4d(x,Ty)+a_5d(y,Tx)$$

(12) 1973 年,S. Massa,Zamflrescu,存在 $h\in(0,1)$,对于任意的 $x,y\in X$,有

$$d(Tx,Ty)\leqslant h\max\{d(x,y),\frac{1}{2}[d(x,Tx)+d(y,Ty)],\frac{1}{2}[d(x,Ty)+d(y,Tx)]\}$$

(13) 1971 年,Ciric,存在 $h\in(0,1)$,对于任意的 $x,y\in X$,有

$$d(Tx,Ty)\leqslant h\max\{d(x,y),d(x,Tx),d(y,Ty),\frac{1}{2}[d(x,Ty)+d(y,Tx)]\}$$

(14) 1977 年,B. E. Rhoades,存在 $\sum a_i(t)<1$,其中 $a_i(t):(0,\infty)\to(0,1)$,单调减少,对于任意的 $x,y\in X$,有

$$\begin{aligned}d(Tx,Ty)\leqslant\ & a_1(d(x,y))d(x,y)+a_2(d(x,y))d(x,Tx)\\ &+a_3(d(x,y))d(y,Ty)+a_4(d(x,y))d(x,Ty)\\ &+a_5(d(x,y))d(y,Tx)\end{aligned}$$

(15) 1974 年,L. B. Ciric,存在 $0<h<1$,对于任意的 $x,y\in X$,有

$$d(Tx,Ty)\leqslant h\max\{d(x,y),d(x,Tx),d(y,Ty),d(x,Ty),d(Tx,y)\}$$

(16) 1977 年,B. E. Rhoades,对于任意的 $x,y\in X$,$\forall x\neq y$,有

$$d(Tx,Ty) < \max\{d(x,y),d(x,Tx),d(y,Ty),d(x,Ty),d(Tx,y)\}$$

图 2.1 形象地表示出以上 16 类映像中出现的各项的关系。

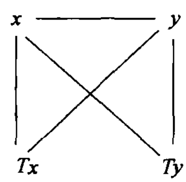

图 2.1

在(1)～(16)类压缩映像中的条件,若改为存在某个自然数 p,使 T^p 相应条件满足,即得(17)～(32)类映像。

若改为存在某两个自然数 p、q,使得 $d(T^px,T^qy)$满足(1)～(16),即得(33)～(48)类映像。

若改为存在某函数 $p(x)$,使得 $d(T^{p(x)}x,T^{q(x)}y)$

满足(1)～(16)，即得(49)～(64)类映像。

存在某函数 $p(x,y)$，$q(x,y)$，使得 $d(T^{p(x,y)}x,T^{q(x,y)}y)$满足(1)～(16)，即得(65)～(80)类映像。

若将上述定义中映像改为映像对，即得(81)～(160)类映像。

1977 年，Rhoades 提出了 6 个公开问题：

(1) 若 $f\in(16)$(即 f 是(16)类映像，下同)，f 在 X 中连续且存在 $x_0\in X$，$\{f^n x_0\}$有聚点，f 是否有不动点？

注：前述定理 1.4 指出，若$\{f^n x_0\}$有聚点，且 $\lim d(f^n x,f^{n+1}x)=0$ 时，则有不动点。可以证明(Rhoades 同文指出)，f 连续及对某 x_0，$\{f^n x_0\}$有聚点是 f 有不动点的必要条件，而不是充分条件。

(2) 若(1)是否定的，附加什么条件可保证 f 有不动点？

(3) $f\in(61)$～(64)结论如何？

(4) $f\in(68)$～(80)结论如何？

(5) 局部压缩能否推广到(10)、(26)、(42)、(58)、(74)。

(6) 问题(1)～(5)对映像对、序列情形如何？

针对这 6 个问题，数学家们进行了深入的探讨，也得到了一些很好的结论。

二、压缩映像的不动点定理

定理 2.1 设 X 为完备度量空间，$T:X\to X$ 且满足 $d(Tx,Ty)\leqslant kd(x,y)$，$k\in(0,1)$，则 T 在 X 内有唯一的不动点，且 $d(x_n,x^*)\leqslant\frac{k^n}{1-k}d(Tx_0,x_0)$。

证明：(1) 显然，$d(T^n x,T^n y)\leqslant k^n d(x,y)$，定义 $x_n=T^n x_0$，则

$$d(x_n,x_{n+1})\leqslant k^n d(x_0,Tx_0)$$

(2) $d(x_{n+p},x_n)\leqslant k^n(1+k+\cdots+k^p)d(x_0,Tx_0)<\frac{k^n}{1-k}d(Tx_0,x_0)$，即$\{x_n\}$为 Cauchy 列。

(3) 由于 X 完备，设 $\lim x_n=x^*$，则由 $Tx_n=x_{n+1}\Rightarrow Tx^*=x^*$。

(4) 唯一性，略。

(5) 于(2)中令 $p\to+\infty$，即证 $d(x_n,x^*)<\frac{k^n}{1-k}d(Tx_0,x_0)$。

注：X 非完备，结论不对。

$x\in(0,1]$，$T:X\to X$，$Tx=\frac{x}{2}$，满足(1)，但无不动点(因为 X 非完备)。

定理 2.2 设(X,d)为完备度量空间，$T:X\to X$，满足$\exists h\in(0,\frac{1}{2})$，使$d(Tx,Ty)<k(d(x,Tx)+d(y,Ty))$，则在$X$内存在不动点。

证明：$x_n=T^n x_0$。

$$d(x_n,x_{n+1})=d(T^n x_{0.},T^{n+1}x_{0.})\leqslant k(d(x_n,x_{n+1})+d(x_{n-1},x_n))$$

$$\Rightarrow d(x_n,x_{n+1})\leqslant\frac{k}{1-k}d(x_{n-1},x_n),0<\frac{k}{1-k}<1$$

由定理 2.1 即得。

定理 2.3 设$\sum a_i(t)<1$，其中$a_i(t):(0,\infty)\to(0,1)$，单调减少，对$\forall x\neq y$，有

$$d(Tx,Ty)\leqslant a_1(d(x,y))d(x,y)+a_2(d(x,y))d(x,Tx)+a_3(d(x,y))d(y,Ty)$$
$$+a_4(d(x,y))d(x,Ty)+a_5(d(x,y))d(Tx,y)$$

则T在X内存在不动点。

证明：(1)先证$\lim d(x_n,x_{n+1})=0$。由$T^n x_0=x_n$易知

$$d(x_n,x_{n+1})\leqslant a_1(d(x_{n-1},x_n))d(x_{n-1},x_n)+a_2(d(x_{n-1},x_n))d(x_{n-1},x_n)$$
$$+a_3(d(x_{n-1},x_n))d(x_n,x_{n+1})+a_4(d(x_{n-1},x_n))d(x_{n-1},x_{n+1})$$
$$+a_5(d(x_{n-1},x_n))d(x_n,x_n)$$

仍记$a_i(t)$为a_i，也有

$$d(x_{n+1},x_n)\leqslant a_1d(x_n,x_{n-1})+a_2d(x_n,x_{n+1})+a_3d(x_{n-1},x_n)$$
$$+a_4d(x_n,x_n)+a_5d(x_{n-1},x_{n+1})$$

两式相加，得

$$2d(x_n,x_{n+1})\leqslant(a_1+a_3+a_1+a_2+a_4+a_5)d(x_n,x_{n-1})$$
$$+(a_3+a_4+a_2+a_5)d(x_n,x_{n+1})$$

解得

$$d(x_n,x_{n+1})\leqslant\frac{(2a_1+a_3+a_2+a_4+a_5)}{2-(a_3+a_4+a_2+a_5)}d(x_{n-1},x_n)\leqslant d(x_n,x_{n-1})$$

（因为$\frac{a_1+t}{a_1+2-t}$单调增加，$\frac{(2a_1+a_3+a_2+a_4+a_5)}{2-(a_1+a_3+a_4+a_2+a_5)+a_1}<\frac{1+a_1}{1+a_1}=1$）

（问：若令$\frac{(2a_1+a_3+a_2+a_4+a_5)}{2-(a_1+a_3+a_4+a_2+a_5)+a_1}=c$，则$d(x_n,x_{n+1})\leqslant c^n d(x_1,x_0)$，用定理 2.1 的证法做，对吗？）

即$d(x_n,x_{n+1})$单调减少。下证：$\lim d(x_n,x_{n+1})=0$，若$\lim d(x_n,x_{n+1})=p>0$，则于式

$$q(d(x_n,x_{n+1}))\overset{\text{def}}{=}q(b_n)\overset{\text{def}}{=}\frac{a_1(b_n)+a_1(b_n)+a_3(b_n)+a_2(b_n)+a_4(b_n)+a_5(b_n)}{2-(a_1(b_n)+a_3(b_n)+a_4(b_n)+a_2(b_n)+a_5(b_n))+a_1(b_n)}$$

中令 $n\to\infty$，注意到 $\varphi(t)$ 单调减少时，$\frac{a+\varphi(t)}{b-\varphi(t)}$ 单调减少，得

$$q(p)=\frac{2a_1(p)+a_3(p)+a_2(p)+a_4(p)+a_5(p)}{2-(a_1(p)+a_3(p)+a_4(p)+a_2(p)+a_5(p))+a_1(p)}<1$$

但 $d(x_n,x_{n+1})\geqslant p$，所以，$q(d(x_n,x_{n+1}))\leqslant q(p)<1\Rightarrow d(x_{n+1},x_n)\leqslant q(d(x_n,x_{n-1}))d(x_n,x_{n-1})\leqslant q(q(p))d(x_n,x_{n-1})\leqslant\cdots\leqslant(q(p))^n d(x_1,x_0)\to 0$ 矛盾，故 $p=0$。

(2) 证明：$\{x_n\}$ 为 Cauchy 列，记 $d_{m,n}=d(x_m,x_n)$，则有

$$\begin{aligned}
&\forall m,n\in \mathrm{N}\\
&d(x_m,x_n)=d(Tx_{m-1},Tx_{n-1})\\
&\leqslant a_1d(x_{m-1},x_{n-1})+a_2d(x_m,x_{m-1})+a_3d(x_n,x_{n-1})\\
&\quad+a_4d(x_{m-1},x_n)+a_5d(x_m,x_{n-1})\\
&\leqslant a_1(d_{m,m-1}+d_{m,n}+d_{n,n-1})+a_2d_{m,m-1}\\
&\quad+a_3d_{n,n-1}+a_4(d_{m-1,m}+d_{m,n})+a_5(d_{n,m}+d_{n,n-1})
\end{aligned}\tag{2.1}$$

所以

$$d_{m,n}\leqslant\frac{1}{1-a_1-a_4-a_5}[(a_1+a_2+a_4)d_{m,m-1}+(a_1+a_3+a_5)d_{n,n-1}]$$

易知

$$\alpha(t)=\frac{a_1(t)+a_2(t)+a_4(t)}{1-a_1(t)-a_4(t)-a_5(t)},\beta(t)=\frac{a_1(t)+a_3(t)+a_5(t)}{1-a_1(t)-a_4(t)-a_5(t)}$$

单调减少(因为 $\alpha_i(t)$ 为单调减少)，$\forall\varepsilon>0$，由于 $\lim\limits_{n\to\infty}d_{n,n+1}=0$，若 $\alpha(\frac{\varepsilon}{2})\neq 0$，$\beta(\frac{\varepsilon}{2})\neq 0$，则取 N，当 $m>N,n>N$ 时，有

$$d_{m,m-1}<\frac{1}{2}\min\{\frac{\varepsilon}{\alpha(\frac{\varepsilon}{2})},\varepsilon\},d_{n,n-1}<\frac{1}{2}\min\{\frac{\varepsilon}{\beta(\frac{\varepsilon}{2})},\varepsilon\}$$

($\alpha(\frac{\varepsilon}{2})=0$ 时，取 $d_{m,m-1}<\frac{1}{2}\varepsilon$)

于是，① 若 $d_{m-1,n-1}<\frac{\varepsilon}{2}$，由式(2.1)，有

$$d_{m,n}<\varepsilon(a_1+\cdots+a_5)<\varepsilon$$

② $d_{m-1,n-1}\geqslant\frac{\varepsilon}{2}$，则由式(2.1)及

$$\alpha(d_{m-1,n-1})\leqslant\alpha(\frac{\varepsilon}{2}),\beta(d_{m-1,n-1})\leqslant\beta(\frac{\varepsilon}{2}))$$

得

$$d_{m,n}\leqslant\alpha(\frac{\varepsilon}{2})d_{m,m-1}+\beta(\frac{\varepsilon}{2})d_{n,n-1}<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

即$\{x_n\}$为 Cauchy 列。

(3) 证明 $Tx_*=x_*$，为此先证 $x_n\to Tx_*$，即

$$\begin{aligned}d(x_n,Tx_*)&\leqslant d(Tx_{n-1},Tx_*)\\&\leqslant a_1d(x_{n-1},x_*)+a_2d(x_{n-1},x_n)+a_3d(x_*,Tx_*)\\&\quad+a_4d(x_{n-1},Tx_*)+a_5d(x_*,x_n)\\&\leqslant a_1d(x_{n-1},x_*)+a_2d(x_{n-1},x_n)+a_3d(x_*,x_n)+a_3d(x_n,Tx_*)\\&\quad+a_4d(x_{n-1},x_n)+a_4d(x_n,Tx_*)+a_5d(x_*,x_n)\end{aligned}$$

于是，有

$$\begin{aligned}d(x_n,Tx_*)\leqslant\frac{1}{1-a_3-a_4}[&a_1d(x_*,x_{n-1})+(a_2+a_4)d(x_{n-1},x_*)\\&+(a_3+a_5)d(x_*,x_n)]\end{aligned}$$

若有无穷多 n_i 使 $a_3(d(x_{n_i-1},x_*))+a_4(d(x_{n_i-1},x_*))<\frac{1}{2}$，则

$$d(x_{n_i},Tx_*)\leqslant2[d(x_*,x_{n_i-1})+d(x_{n_i-1},x_{n_i})+d(x_*,x_{n_i})]\to0$$

(用 $a_1<1,a_2+a_4<1,a_3+a_5<1$)

否则，考虑(交换 Tx_* 与 x_n)

$$\begin{aligned}d(Tx_*,x_n)&\leqslant a_1d(x_{n-1},x_*)+a_2d(x_*,Tx_*)+a_3d(x_{n-1},x_n)\\&\quad+a_4d(x_*,x_n)+a_5d(Tx_*,x_{n-1})\\&\leqslant a_1d(x_{n-1},x_*)+a_2d(x_*,x_n)+a_2d(x_n,Tx_*)+a_3d(x_{n-1},x_n)\\&\quad+a_4d(x_*,x_n)+a_5d(Tx_*,x_n)+a_5d(x_n,x_{n-1})\end{aligned}$$

于是，有

$$\begin{aligned}d(x_n,Tx_*)\leqslant\frac{1}{1-a_2-a_5}[&a_1d(x_{n-1},x_*)+(a_2+a_4)d(x_*,x_n)\\&+(a_3+a_5)d(x_n,x_{n-1})]\end{aligned}$$

由于仅有有限个 n_i 使 $a_3(d(x_{n_i-1},x_*))+a_4(d(x_{n_i-1},x_*))<\frac{1}{2}$，故至多有