TU DE KONGZHI LILUN YANJIU

图的控制理论研究

陈学刚◎著

北京交通大学出版社
http://press.bjtu.edu.cn

图的控制理论研究

陈学刚　著

北京交通大学出版社

·北京·

内容简介

本书主要介绍了图的控制理论的若干最新知识与理论，包括图的控制理论的基础知识、图的全限制控制、图的独立控制数、几类特殊的控制参数、图的控制参数间的关系和控制的临界性等

本书的内容是作者近几年的一些研究成果，其中包括图的控制理论的若干公开问题的研究　本书内容新颖，可供从事图的控制理论研究的科研人员参考

图书在版编目（CIP）数据

图的控制理论研究/陈学刚著．—北京：北京交通大学出版社，2011.9

ISBN 978－7－5121－0713－7

Ⅰ.①图…　Ⅱ.①陈…　Ⅲ.①图论　Ⅳ.①O157.5

中国版本图书馆CIP数据核字（2011）第172044号

责任编辑：黎　丹

出版发行：北京交通大学出版社　　电话：010－51686414

北京市海淀区高梁桥斜街44号　　邮编：100044

印 刷 者：北京鑫海金澳胶印有限公司

经　　销：全国新华书店

开　　本：140×203　印张：6.5　字数：163千字

版　　次：2011年9月第1版　2011年9月第1次印刷

书　　号：ISBN 978－7－5121－0713－7/O·87

印　　数：1～5 00册　定价：26.00元

本书如有质量问题，请向北京交通大学出版社质监组反映。对您的意见和批评，我们表示欢迎和感谢。

投诉电话：010－51686043，51686008；传真：010－62225406；E-mail：press@bjtu.edu.cn。

序

随着计算机技术的飞速发展，图论作为离散数学中的一个重要组成部分，得到了高速的发展，而且其应用也越来越广泛. 图的控制理论是图论中的一个重要分支，它在图论中的地位越来越受到广大学者的关注. 近几年来，图的控制理论的内容越来越丰富，理论体系正在形成. 加拿大著名图论专家 Cockayne 等人先后引入了图的许多不同类型的控制概念及其变化形式. 1998 年，美国图论学者 Haynes 等人出版了专著 *Fundamentals of Domination in Graphs* 和 *Domination in Graphs (advanced topics)*，较为系统地综述了一些主要的研究成果. 为了保证内容上的完整性和可读性，本书第 1 章介绍了图的基本知识、基本理论和基本定理，供读者参考，省略了部分定理的证明过程，因为对于图论的读者来说，这些结论是众所周知；第 2 章是关于图的控制理论的基础知识；第 3 章至第 5 章是关于图的几类控制参数的研究；第 6 章是关于控制参数间的关系的研究；第 7 章是关于控制临界性的研究.

对于图论专业的研究生，或者从事图的控制理论的科研人员来说，本书或许是一本好的参考资料. 该书的内容具有明显的先进性，具有较好的参考价值. 本书得到中央高校科研业务基金的资助. 由于作者水平有限，加上时间仓促，书中难免有疏漏和不当之处，敬请读者批评指正.

陈学刚

2011 年 3 月于华北电力大学

目 录

第 1 章　图论的基础知识

自从 1736 年欧拉（ L.Euler ）利用图论的思想解决了哥尼斯堡（ Konigsberg ）七桥问题以来, 图论经历了漫长的发展道路. 在很长一段时期内, 图论被当成是数学家的智力游戏, 解决一些著名的难题. 如迷宫问题、匿门博弈问题、棋盘上马的路线问题、四色问题和哈密尔顿环球旅行问题等，曾经吸引了众多的学者. 图论中许多的概论和定理的建立都与解决这些问题有关. 1847 年克希霍夫（ Kirchhoff ）第一次把图论用于电路网络的拓扑分析，开创了图论面向实际应用的成功先例. 此后，随着实际的需要和科学技术的发展，在近半个世纪内，图论得到了迅猛的发展，已经成了数学领域的重要学科分支. 尤其在电子计算机问世后，图论的应用范围更加广泛，在解决运筹学、信息论、控制论、网络理论、博弈论、化学、社会科学、经济学、建筑学、心理学、语言学和计算机科学中的问题时，扮演着越来越重要的角色，受到工程界和数学界的高度重视，成为解决许多实际问题的基本工具之一. 图论研究的课题和包含的内容十分广泛，专门的著作很多，很难在一本教科书中概括它的全貌. 本章简明扼要地介绍图的一些基本知识和基本定理，大多数定理和结论都能在图论教材中找到.

1.1　图的基本概念

图是用于描述现实世界中离散客体之间关系的有用工具. 在集合论中采用以图形来表示二元关系的办法，其中用点来代表客体，用一条由点 a 指向点 b 的有向线段来代表客体 a 和 b 之间的二元关系 aRb. 这样，集合上的二元关系就可以用点的集合 V 和有向线的集合 E 构成的二元组 (V, E) 来描述. 同样的方法也可以用来描述其他

的问题. 当考察全球航运时，可以用点来代表城市，用线来表示两城市间有航线通达；当研究计算机网络时，可以用点来表示计算机及终端，用线表示它们之间的信息传输通道；当研究物质的化学结构时，可以用点来表示其中的化学元素，而用线来表示元素之间的化学键. 在这种表示法中，点的位置及线的长短和形状都是无关紧要的，重要的是两点之间是否有线相连. 从图形的这种表示方式中可以抽象出图的数学概念来.

1.1.1　图

定义 1.1.1　一个(无向)图 G 是一个二元组 $(V(G), E(G))$, 其中 $V(G)$ 是一个有限的非空集合，其元素称为结点或者顶点； $E(G)$ 是一个以不同结点的无序对为元素且不含重复元素的集合，其元素称为边. 我们称 $V(G)$ 和 $E(G)$ 分别是 G 的结点集和边集.

在不致引起混淆的地方，常常把 $V(G)$ 和 $E(G)$ 分别简记为 V 和 E. 我们约定，由结点 u 和结点 v 构成的无序对用 uv (或 vu) 表示.

根据图的这种定义，很容易利用图形来表示图. 图形的表示方法具有直观性，可以帮助我们了解图的性质. 在图的图形表示中，每个结点用一个小圆点表示，每条边 uv 用一条分别以结点 v 和 u 为端点的连线表示.

图 G 的结点数称为 G 的阶，用字母 n 表示， G 的边数用 m 表示. 一个边数为 m 的 n 阶图可简称为 (n, m)- 图. 若 $e = uv$ 是图 G 的一条边，则称结点 u 和 v 是相互邻接的，并且说边 e 分别与 u 和 v 相互关联. 若 G 的两条边都与同一个结点关联，称它们是相互邻接的.

定义 1.1.2　图 G 中结点 v 的度（简称点度） $d_G(v)$ 是 G 中

与 v 关联的边的数目.

每个环在计度时算作两条边. 图 G 中最大的点度和最小的点度分别记为 $\Delta(G)$ 和 $\delta(G)$. 在不致引起混淆的地方, $d_G(v)$, $\Delta(G)$ 和 $\delta(G)$ 分别简写成 $d(v)$, Δ 和 δ.

由图中各结点的度构成的序列称为该图的一个度序列. 度序列是某些图论专题的重要研究工具之一.

图 1.1.1 是一个 $(6,8)$- 图, 其中 $\Delta(G)=4$, $\delta(G)=2$. 它的度序列为:

$$(d(v_1),d(v_2),d(v_3),d(v_4),d(v_5),d(v_6))=(2,4,2,2,3,3).$$

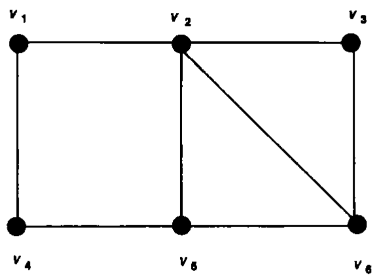

图 1.1.1　$(6,8)$- 图

下面介绍图论中最基本的定理, 它是欧拉 1736 年在解决“ Konigsberg 七桥问题”时建立的第一个图论结果, 很多重要结论都与它有关.

定理 1.1.1　对于任何 (n,m)- 图 $G=(V,E)$, $\sum\limits_{v\in V} d(v)=2m$.

证明: 根据点度的定义, 在计算点度时每条边对于它所关联的结点被计算了两次. 因此, G 中点度的总和恰为边数 m 的 2 倍. 证毕.

推论 1.1.1　在任何图中, 奇数度的结点数必是偶数.

证明: 设 V_1 和 V_2 分别是图 G 的奇度结点集和偶度结点集，由定理 1.1.1 有

$$\sum_{v\in V_1} d(v)+\sum_{v\in V_2} d(v)=2m.$$

上式左端第二项是偶数之和，从而第一项必然也是偶数，即 $|V_1|$ 必须是偶数. 证毕.

1.1.2　基本图例

图中度为零的结点称为孤立结点. 只由孤立结点构成的图 G 称为零图. 特别地，只由一个孤立结点构成的图称为平凡图. 各点度相等的图称为正则图. 特别地，点度为 k 的正则图称为 k 度正则图. 任何两个结点都相互邻接的简单图称为完全图， n 阶的完全图记为 K_n.

若图 $G=(V,E)$ 的结点集可以分划成两个子集 X 和 Y, 使得它的每一条边的一个关联结点在 X 中，另一个关联结点在 Y 中，则图 G 被称为二部图，又常说 G 是具有二部分划 (X,Y) 的图.

设 G 是具有二部分划 (X,Y) 的图， $|X|=n_1$, $|Y|=n_2$, 如果 X 中每个结点与 Y 中的全部结点都邻接，则称 G 为完全二部图，记为 K_{n_1,n_2}.

1.1.3　子图与补图

定义 1.1.3　设 $G=(V_1,E_1)$ 和 $H=(V_2,E_2)$ 是两个图，若满足 $V_2\subseteq V_1$ 且 $E_2\subseteq E_1$, 则称 H 是 G 的子图. 特别地，当 $V_2=V_1$ 时，称 H 是 G 的生成子图；当 $V_2\subset V_1$ 或者 $E_2\subset E_1$ 时，称 H 是 G 的真子图.

设 $G=(V,E)$ 是一个图， $S\subseteq V$, 则 $G(S)=(S,E')$ 是一个以 S 为结点集、以 $E'=\{uv|u,v\in S,uv\in E\}$ 为边集的图，称

$G(S)$ 为 G 的点导出子图.

设 $G=(V,E)$ 是一个图，$T\subseteq E$ 并且 $T\neq\varnothing$, 则 $G(T)$ 是一个以 T 为边集、以 T 中各边关联的全部结点为结点集的图，称 $G(T)$ 为 G 的边导出子图.

定义 1.1.4　设 $G=(V,E)$ 和 $\overline{G}=(V',E')$ 是两个简单图. 若 $V'=V$, $E'=\{uv|u,v\in V,uv\notin E\}$, 即边 $uv\in E'$ 当且仅当 $uv\notin E$, 则称 $\overline{G}$ 是 G 的补图.

1.1.4　图的同构

一个图的图形表示不一定是唯一的，但有很多表面上看来似乎不同的图却可以有着极为相似的图形表示，这些图之间的差别仅在于结点和边的名称的差异，而从邻接关系的意义上看，它们本质上都是一样的，可以把它们看成是同一个图的不同表示形式. 这就是图的同构概念.

定义 1.1.5　设 $G=(V,E)$ 和 $G'=(V',E')$ 是两个图，如果存在双射 $\phi:V\to V'$, 使得 $uv\in E\Leftrightarrow\phi(u)\phi(v)\in E'$, 则称 G 和 G' 同构，并记之为 $G\cong G'$.

一般说来，要判定两个图是否同构是非常困难的，尚无一个简单的方法可以通用. 但在某些情况下可根据同构的一些必要条件有效地排除不同构的情况. 比如根据同构的定义，同构的图除了有相同的结点数和边数外，对应的结点度数也必须相同，不满足这些条件的图不可能同构.

1.1.5　图的道路与连通性

在图中，常常要考虑从确定的结点出发，沿结点和边连续地移动而到达另一确定的结点的问题. 从这种由结点和边的序列的构成方式

中可以抽象出图的道路概念.

定义 1.1.6　图 $G=(V,E)$ 中的非空序列 $p=v_0e_1v_1,\cdots,v_{k-1}e_kv_k$, 称为 G 的一条由结点 v_0 到 v_k 的道路, 其中 $v_0,v_1,\cdots,v_k$ 是 G 的结点, $e_1,\cdots,e_k$ 是 G 的边, 并且对所有的 $1\leqslant i\leqslant k$, 边 e_i 与结点 v_{i-1} 和 v_i 关联.

v_0 称为道路 p 的起点, v_k 称为 p 的终点, 其余结点称为 p 的内部结点. p 中边的数目 k 称为该道路的长度. 以 u 为起点、 v 为终点的道路有时也简记为 $\langle u,v\rangle$- 道路.

若 $v_0\neq v_k$, 即起点与终点不同, 则称 p 为开道路, 否则称为闭道路. 若 p 中的边互不相同, 则称 p 为简单道路. 闭的简单道路称为回路.

若 p 中的结点互不相同, 则称 p 为基本道路. 若 p 中除了起点和终点相同外, 别无相同的结点, 则称 p 为圈.

定义 1.1.7　若图 G 中结点 u 和 v 之间存在一条 $\langle u,v\rangle$- 道路, 则称 u 和 v 在 G 中是连通的.

定义 1.1.8　设 u 和 v 是图 G 中的两个结点, 若 u 和 v 是连通的, 则 u 和 v 之间的最短道路的长度称为 u 和 v 之间的距离, 记之为 $d(u,v)$. 若 u 和 v 不是连通的, 规定 $d(u,v)=\infty$.

对应连通关系, 存在结点集 V 的一个划分 $\{V_1,V_2,\cdots,V_k\}$ 使得 G 中任何两个结点 u 和 v 连通当且仅当 u 和 v 属于同一个分块. 这样, 点导出子图 $G(V_i)$ 中任何两个结点都是连通的, 而当 $i\neq j$ 时, $G(V_i)$ 的结点与 $G(V_j)$ 的结点间绝不会连通, 因此 $G(V_i)$ 是 G 的极大连通子图, 特别称为 G 的连通分支. 图 G 的连通分支数记为 $\omega(G)$.

设 $S=\{v_1,v_2,\cdots,v_k\}$ 是 $G=(V,E)$ 的结点集 V 的子集, 则 $G-S$ 就是从 G 中删去结点 $v_1,v_2,\cdots,v_k$ 及它们关联的全部边

后得到的 G 的子图.

在实际问题中，除了考察一个图是否连通外，往往还要研究一个图的连通程度，作为某些系统的可靠性的一种度量.

定义 1.1.9　设 $G=(V,E)$ 是连通图，若存在 $S\subseteq V$，使 $\omega(G-S)>1$，则称 S 是 G 的一个点割集；若对任何 $S'\subset S$ 都有 $\omega(G-S')=1$，则称 S 为 G 的一个基本割集. 特别地，当 $\{v\}$ 是 G 的割集时，称 v 是 G 的割点.

显然，完全图 K_n 没有割集，它的连通性能是最好的. 在图 1.1.2 中，有下面结论：

割点： v_2,v_5

割集： $\{v_2,v_3,v_5\}$，$\{v_5\}$

基本割集： $\{v_2\}$，$\{v_5\}$，$\{v_3,v_4\}$

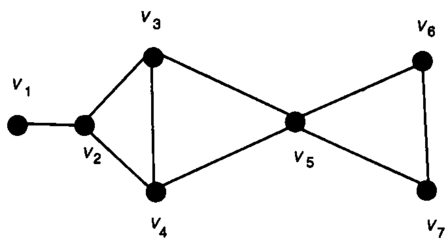

图 1.1.2　具有割点、割集和基本割集的图

定理 1.1.2　在非平凡连通图 G 中，结点 v 为 G 的割点的充要条件是存在结点 u 和 w，使 u 到 w 的每一条道路皆以 v 为内部结点.

证明：设 v 是非平凡连通图 G 的一个割点，由定义 $\omega(G-v)>1$. 设 $G_1=(V_1,E_1)$ 和 $G_2=(V_2,E_2)$ 是 $G-v$ 中的任意两个连通分支，任取 $u\in V_1$，$w\in V_2$，因为 u 和 w 在 G 中是连通的，但

是在 $G-v$ 中不是连通的，因此在 G 中所有的 $\langle u,w\rangle$- 道路都必须经过 v.

反过来，若 G 中存在结点 u 和 w, 使所有 $\langle u,w\rangle$- 道路都以 v 为内部结点，则 u 和 w 在 $G-v$ 中必然不再连通. 因此，v 是 G 的一个割点. 证毕.

定义 1.1.10　设 $G=(V,E)$ 是连通图，若存在 $E_1\subseteq E$, 使 $\omega(G-E_1)>1$, 则称 E_1 是 G 的一个边割集；若对任何 $E'\subset E_1$, 都有 $\omega(G-E')=1$, 则称 E_1 为 G 的一个基本边割集. 特别地，当 $\{e\}$ 是 G 的边割集时，称 e 是 G 的割边.

定理 1.1.3　在连通图 G 中，边 e 为割边的充要条件是 e 不包含于 G 的任何圈中.

证明: 必要性. 设 e 为割边，若 e 包含在某一圈中，删去 e 后，图仍连通，这与 e 为割边矛盾，所以 e 不包含在任一圈中.

充分性. 若边 e 不包含在 G 的任意圈中，则删去 e 后，图不再连通. 因此，e 是 G 的割边. 证毕.

下面从数量观点去描述图的连通性.

定义 1.1.11　图 G 的点连通度 $\kappa(G)$ 是使由 G 产生一个非连通子图，或者一个结点的子图所需要删去的最少的结点的数目.

定义 1.1.12　图 G 的边连通度 $\lambda(G)$ 是指由 G 产生一个非连通子图所需要删去的最少的边的数目. 若 G 只有一个结点，规定 $\lambda(G)=0$.

定理 1.1.4　对于任何图 G, 皆有 $\kappa(G)\leqslant\lambda(G)\leqslant\delta(G)$.

证明: 若 G 是非连通图或单结点图，则 $\kappa(G)\leqslant\lambda(G)=0$, 结论自然成立.

若 G 是非平凡的连通图，则因为每个结点关联的边构成 G 的一个边割集，因此 $\lambda(G)\leqslant\delta(G)$.

下面只需证明 $\kappa(G) \leqslant \lambda(G)$.

设 F 是 G 的一个基数为 $\lambda(G)$ 的基本边割集，则 $G-F$ 含有两个连通分支 G_1 和 G_2. F 在 G_1 中关联的结点数不超过 $\lambda(G)$，在 G_2 中关联的结点数也不超过 $\lambda(G)$. 显然，删去 F 在任一支中关联的全部结点，也必然删去了 F 自身.

(1) 若 G 中 G_1 (或 G_2) 部分至少有一个结点不与 F 中的边关联，则在 G_1 (或 G_2) 部分删去那些与 F 关联的全部结点后，得到 G 的不连通子图，因此 $\kappa(G) \leqslant \lambda(G)$.

(2) 若 G 中 G_1 和 G_2 部分的每个结点都与 F 中的边关联，则当 G_1 (或 G_2) 的阶为 1 时， $\kappa(G) \leqslant \lambda(G)$.

当 G_1 和 G_2 的阶都不为 1 时，交替地从 G_1 和 G_2 中删去与 F 关联的结点，对 F 中的每条边只删去了一个关联结点且 G_1 和 G_2 部分各至少剩下一个结点，这时也有 $\kappa(G) \leqslant \lambda(G)$.

综上可知 $\kappa(G) \leqslant \lambda(G)$ 恒成立. 证毕.

1.1.6　图的矩阵表示

一个图可以按定义描述出来，也可以用图形表示出来，还可以用矩阵来表示. 图用矩阵表示有很多优点，既便于利用矩阵知识研究图的性质与构造算法，也便于计算机处理.

图的矩阵表示常用的有两种形式：邻接矩阵和关联矩阵. 邻接矩阵常用于研究图的各种道路的问题，关联矩阵常用于研究子图的问题. 由于矩阵的行列有固定的顺序，因此在用矩阵表示图之前，需将图的结点和边加以编号，确定与矩阵元素的对应关系.

定义 1.1.13　设 $G=(V,E)$ 是一简单图，结点集为 $V=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$. 构造矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$，其中

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{如果 } v_i v_j \in E, \\ 0, & \text{如果 } v_i v_j \notin E. \end{cases}$$

则称 $\boldsymbol{A}$ 为图 G 的邻接矩阵.

不难证明, 若两个简单图 G_1 和 G_2 的邻接矩阵分别为 $\boldsymbol{A}_1$ 和 $\boldsymbol{A}_2$, 则 $G_1 \cong G_2$ 当且仅当 $\boldsymbol{A}_1$ 和 $\boldsymbol{A}_2$ 是置换等价的.

无向图的邻接矩阵是对称阵, 第 i 行元素之和恰为结点 v_i 的度.

定义 1.1.14　设 $G = (V, E)$ 是至少有一边的无环图, 结点集为 $V = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$, 边集为 $E = \{e_1, e_2, \cdots, e_m\}$. 构造矩阵 $\boldsymbol{M} = (m_{ij})_{n\times m}$, 其中

$$m_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{如果 } v_i \text{与 } e_j \text{ 关联}, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

则称 $\boldsymbol{M}$ 为图 G 的关联矩阵.

1.1.7　图的着色

很多的实际问题都可以转化为图的着色问题, 本节介绍与结点着色、边着色有关的内容.

定义 1.1.15　图 G 的正常结点着色(简称点着色)是指对图 G 的每个结点施以一种颜色, 使得任何两个相邻结点着有不同的颜色. 如果对 G 点着色用了 k 种颜色, 则称 G 是可以 k- 点着色的. 图 G 点着色所需要的最少颜色数目, 称为 G 的点色数, 记为 $\chi(G)$.

例如: 考试安排问题. 期末每个学校都要举行考试, 设学校开设的课程集合为 X, 学生集合为 Y, 要求学同一门课程的学生考试时间尽可能相同, 问至少要举行多少场考试?

对于这个问题，可以用一个图 G 来描述. 结点表示考试课目，结点 v 和 u 邻接当且仅当有学生既要参加 v 课程的考试，又要参加 u 课程的考试. 那么，所得图的每一种点着色方案都给出了考试的一种安排方式. 而最少的考试场次正好对应着图的点色数.

对于结构比较规则的简单图，容易根据定义确定它们的点色数.

(1) $\chi(G)=1$ 当且仅当 G 是零图.

(2) $\chi(G)=2$ 当且仅当 G 是二部图.

(3) $\chi(K_n)=n$.

(4) $\chi(C_n)=\begin{cases}2, & \text{当 } n\text{是偶数;}\\ 3, & \text{当 } n\text{是奇数.}\end{cases}$

对于一般的图，还没有简单易行的方法去确定色数，下面介绍点色数的一个上界.

定理 1.1.5　若 G 是简单图，则 $\chi(G)\leqslant\Delta(G)+1$.

证明：对 G 的阶数 n 进行归纳.

当 $n=1$ 时，$G=k_1$, 这时 $\Delta(G)=0$, 结论成立.

设 $n=k$ 时结论成立. 考虑 $n=k+1$ 时的情形. 任取 G 中一个结点 v, 令 $G_1=G-v$, 则 G_1 是 k 阶简单图，由归纳假设 $\chi(G_1)\leqslant\Delta(G_1)+1$. 另一方面 $\Delta(G_1)\leqslant\Delta(G)$, 于是有 $\chi(G_1)\leqslant\Delta(G)+1$. 设在 G 中 v 的邻接点是 $v_1,v_2,\cdots,v_p$, 则 $p\leqslant\Delta(G)$. 因此，用 $\Delta(G)+1$ 种颜色对 G_1 正常点着色时，最多只能用其中的 $\Delta(G)$ 种颜色，即至少可以剩下一种颜色用于 v 的着色，这就是说 $\chi(G)\leqslant\Delta(G)+1$. 证毕.

当 G 是完全图和奇圈时，定理中等号成立. Brooks 进一步证明了对于既不是完全图也不是奇圈图的简单连通图 G, 不等号严格成立，即在这种情况下有 $\chi(G)<\Delta(G)+1$.

决定一个图的色数不是一件容易做的工作，事实上人们还未找到