

教育部高等职业教育基础课规划教材

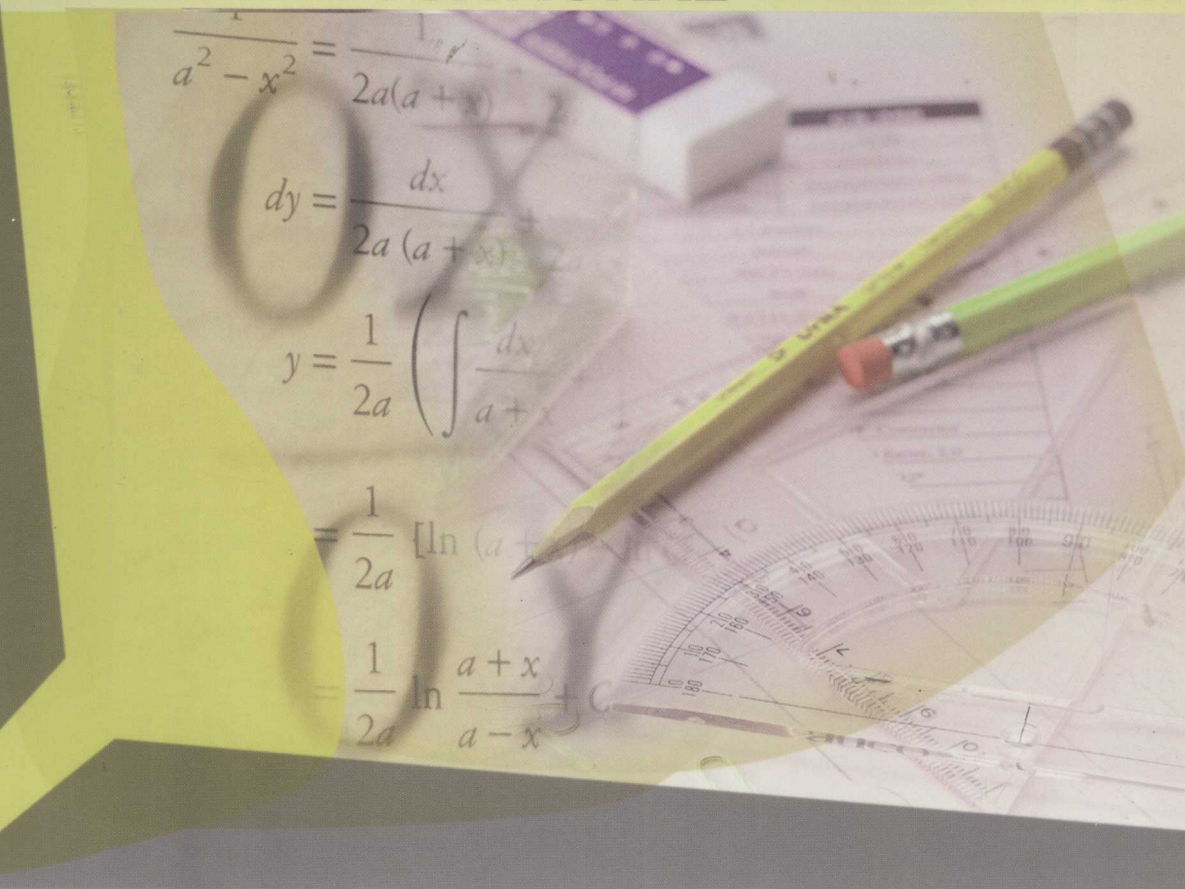
高等数学 (下册)

● 中国高等教育学会 组编

● 侯风波 总主编

● 于孝廷 主编

HIGHER VOCATIONAL EDUCATION


$$\frac{1}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a(a+x)}$$
$$dy = \frac{dx}{2a(a+x)}$$
$$y = \frac{1}{2a} \left(\int \frac{dx}{a+x} \right)$$
$$= \frac{1}{2a} [\ln(a+x)]$$
$$= \frac{1}{2a} \ln \frac{a+x}{a-x} + C$$

783214



CS774892

6

教育部高等职业教育基础课规划教材

高等数学(下册)

中国高等教育学会 组编

侯风波 总主编

于孝廷 主编

教材 (978) 目录索引

重庆师大图书馆

013
0356

科学出版社

北京

013

0356

内 容 简 介

本书是教育部高等职业教育基础课规划教材之一,也是作者在经过多年教学实践并在吸收我国“十五”期间高职高专工科类高等数学教改成果的基础上编写而成的。主要内容包括常微分方程、空间解析几何、多元函数微分学、多元函数积分学、级数、拉普拉斯变换。

本书可作为高职高专工科各专业通用的高等数学教材,也可作为工程技术人员更新高等数学知识的自学用书。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学(下册)/中国高等教育学会组编. —北京:科学出版社, 2005

(教育部高等职业教育基础课规划教材)

ISBN 7-03-015395-2

I. 高… II. 中… III. 高等数学-高等学校:技术学校-教材
IV. O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2005) 第 035591 号

责任编辑:李振格 马琳/责任校对:耿耘

责任印制:吕春珉/封面设计:郝根标

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

双青印刷厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2005年8月第 一 版 开本:787×1092 1/16

2005年8月第一次印刷 印张:9 1/4

印数:1—15 000 字数:194 000

定价:16.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换<环伟>)

销售部电话 010-62136131 编辑部电话 010-62138978-8205 (VZ06)

教育部高等职业教育基础课规划教材

编委会

主 任 张晋峰

副主任 马韵新 陈超然 杨维和 侯风波

委 员 于孝廷 马维新 冯蜀龙 邸卫民 庄兴元

李榆梅 张林国 张炜煌 周彬琳 苑喜军

罗方亮 祝世海 赵东升 曹屯裕 崔振民

朱其祥 陈小波 李 志

本书编写人员

合委编

总主编 侯风波

主 编 于孝廷

和晋来 主

副主编 臧爱珍 赵东升 叶迎春 陈阳昌 主幅

撰稿人 王 剑 王齐珍 付振中 文 伟 李干 员 委

谢新根 刘荣旺 田 毅 国林来 林德李

月群时 舒心言 杜京沙 薇世群 亮六里

心 平 郑小潮 新其来

序 言

当代,高等职业教育受到世界各国的普遍重视,我国的经济建设也越来越凸现出对技术应用型和高技能人才的需求。为此,我国将发展高等职业教育作为实现我国优化人才结构,促进人才合理分布,推动经济建设的战略措施。为满足社会对技术应用型和高技能人才的需求,我国的高等职业教育近几年实现了跨越式发展,其院校数量已占全国普通高等院校总数的 60.5%,招生人数占全国普通高等院校招生人数的 53.1%,在校生占全国普通高等院校在校生的 44.7%,基本形成了每个市(地)至少设置一所高等职业技术学院的格局。

从高等职业教育的办学规模不难看出,高等职业教育已经成为与地方经济发展密切相关的高等教育办学机构,高等职业院校的毕业生已成为推动地方经济、文化、科技发展的一支生力军,他们活跃在机械制造与自动化、模具设计与制造、汽车检测与维护、数控技术、计算机辅助设计与制造、机电一体化技术、通信技术、电气自动化,以及护理、酒店管理等技术领域和服务行业。

几年来,高等职业教育在技术应用型和高技能人才培养方面取得了可喜的成果。总结办学经验,高等职业教育要继续实现跨越式发展,需要在优化人才培养机制、优化专业和课程设置、优化教学内容和教学过程、改革学籍管理和教学管理等方面有所创新。教材建设是优化教学内容和教学过程、提高高等职业教育教学质量的重要环节,而基础课教学如何打破传统的教学内容和教学方法,使之适合高等职业教育的特点,更是一个十分值得研究和实践的课题。中国高等教育学会组织在高等职业教育一线工作的教师,对这个课题进行了深入的探讨,在对学校的基础课教材和教法进行充分调查研究、深入分析、总结提高的基础上,制定了“教育部高等职业教育基础课规划教材”组编计划。

“教育部高等职业教育基础课规划教材”是一套蕴涵着基础课教材改革理念,洋溢着各个学校教材改革热情的富有创新性的教材。从作者组织、大纲审定、教材审读、课件测评等一系列工作反映出,这套教材的每一本书的内容都力求淡化深奥的理论,突出教学实践性,体现与新知识、新技术的密切结合。中国高等教育学会在教育技术和教育资源方面提供了宝贵的支持,附送的教学课件等一系列配套媒体,丰富了教学手段,使



基础课教学向实现立体化教学迈出了突破性的一步,有效地激发了学生的学习兴趣,提高了教学质量,推进技术应用型和高技能型人才的培养。

在“教育部高等职业教育基础课规划教材”即将出版之际,我向辛勤耕耘在高等职业教育第一线的教师致谢!向为本套教材付出心血的作者致谢!希望本套教材的出版能为我国的高等职业教育基础课建设和应用型人才培养有所裨益和推动。

中国高等教育学会秘书长

2005年6月8日



前言

教材作为学校教学内容和教学方法的知识载体,在深化教育教学改革、全面推进素质教育、培养创新人才中有着举足轻重的地位.随着高等教育的蓬勃发展,高校教学改革在不断地深入进行.为了适应我国高等职业教育学制“3转2”的要求和高等职业教育培养高技能人才的需要,更好地贯彻中共中央、国务院《关于进一步加强人才工作的决定》和教育部等七部门《关于进一步加强职业教育工作的若干意见》的有关精神,在认真总结全国高职高专学校工科类各专业高等数学课程教学改革经验的基础上,中国高等教育学会组织编写了教育部高等职业教育基础课规划教材丛书,本书就是其中之一.

在本书编写过程中我们遵循以下原则:

1. 注重以实例引入概念,并最终回到数学应用的思想,加强学生对数学的应用意识和兴趣及能力培养.培养学生用数学的原理和方法消化吸收工程概念和工程原理的能力,消化吸收专业知识的能力.加强数学建模教学内容,将工程问题转化为数学问题的思想贯穿各章,注意与实际应用联系较多的基础知识、基本方法和基本技能的训练,但不追求过分复杂的计算和变换.

2. 缓解课时少与教学内容多的矛盾,恰当地把握教学内容的深度和广度,遵循基础课宽口径和理论知识以够用为度的原则,不过于追求理论上的严密性,尽可能显示微积分的直观性与应用性,适度注意保持数学自身的系统性与逻辑性.

3. 注意数学软件包 MATLAB 的引入,并结合具体教学内容分散在各章中,渗透现代化教学思想和教学手段,力求做到易教、易学、易懂.

4. 充分考虑高职高专学生特点,便于学生自学,以符合高职高专学生的认知结构.在内容处理上兼顾学生抽象概括能力、逻辑推理能力、自学能力以及较熟练的运算能力和综合运用所学知识分析问题、解决问题的能力培养.对课程的每一主题都尽量从几何、数值和解析三个方面加以体现,避免只注重解析推导.

5. 注意有关概念及结果的实际情况解释,力求表述确切、思路清晰、通俗易懂,并注重数学思想与方法的阐述.注意培养学生综合素质,体现数学课程改革的新思路,数学教学不仅要具备工具功能,而且还要具备思维训练和文化素质教育的功能,也就是要立足于综合素质教育,重视培养学生的科学精神、创新意识和综合运用数学的能力.

6. 在每章或每节开始,用尽可能短的语言点题,以使读者了解本章或本节所研究的问题的来龙去脉,起到承上启下的作用,增加可读性.

全书分为上、下两册,第1~8章为上册,教学学时不少于70学时,为两年制高职必学;第9~14章为下册,教学学时不少于60学时.下册主要内容包括常微分方程、空间解析几何、多元函数微分学、多元函数积分学、级数、拉普拉斯变换.参加高等数学下册编写的有侯风波、王剑(承德石油高等专科学校),于孝廷、王齐珍时(山东淄博职业学院),臧爱珍(天津石油职业技术学院),赵东升(上海新侨职业技术学院),

叶迎春 (安徽商贸职业技术学院), 付振中 (山东交通职业学院), 文伟、谢新根 (广东茂名职业技术学院), 刘荣旺 (天津工程职业技术学校), 田毅 (山西省财贸技术学院).

本书框架结构、编写大纲及最终审定稿由侯风波完成.

由于编者水平有限, 时间也比较仓促, 书中难免有不妥之处, 我们衷心地希望得到广大读者的批评指正, 以使本书在教学实践中不断完善起来.

本书在编写过程中, 参考了国内外许多优秀的教材和文献, 特别是《高等数学》(上册)和《高等数学》(下册)等教材, 以及《高等数学》(上册)和《高等数学》(下册)等教材. 本书在编写过程中, 参考了国内外许多优秀的教材和文献, 特别是《高等数学》(上册)和《高等数学》(下册)等教材, 以及《高等数学》(上册)和《高等数学》(下册)等教材. 本书在编写过程中, 参考了国内外许多优秀的教材和文献, 特别是《高等数学》(上册)和《高等数学》(下册)等教材, 以及《高等数学》(上册)和《高等数学》(下册)等教材.

本书在编写过程中, 参考了国内外许多优秀的教材和文献, 特别是《高等数学》(上册)和《高等数学》(下册)等教材, 以及《高等数学》(上册)和《高等数学》(下册)等教材. 本书在编写过程中, 参考了国内外许多优秀的教材和文献, 特别是《高等数学》(上册)和《高等数学》(下册)等教材, 以及《高等数学》(上册)和《高等数学》(下册)等教材. 本书在编写过程中, 参考了国内外许多优秀的教材和文献, 特别是《高等数学》(上册)和《高等数学》(下册)等教材, 以及《高等数学》(上册)和《高等数学》(下册)等教材.

本书在编写过程中, 参考了国内外许多优秀的教材和文献, 特别是《高等数学》(上册)和《高等数学》(下册)等教材, 以及《高等数学》(上册)和《高等数学》(下册)等教材. 本书在编写过程中, 参考了国内外许多优秀的教材和文献, 特别是《高等数学》(上册)和《高等数学》(下册)等教材, 以及《高等数学》(上册)和《高等数学》(下册)等教材. 本书在编写过程中, 参考了国内外许多优秀的教材和文献, 特别是《高等数学》(上册)和《高等数学》(下册)等教材, 以及《高等数学》(上册)和《高等数学》(下册)等教材.

本书在编写过程中, 参考了国内外许多优秀的教材和文献, 特别是《高等数学》(上册)和《高等数学》(下册)等教材, 以及《高等数学》(上册)和《高等数学》(下册)等教材. 本书在编写过程中, 参考了国内外许多优秀的教材和文献, 特别是《高等数学》(上册)和《高等数学》(下册)等教材, 以及《高等数学》(上册)和《高等数学》(下册)等教材. 本书在编写过程中, 参考了国内外许多优秀的教材和文献, 特别是《高等数学》(上册)和《高等数学》(下册)等教材, 以及《高等数学》(上册)和《高等数学》(下册)等教材.

本书在编写过程中, 参考了国内外许多优秀的教材和文献, 特别是《高等数学》(上册)和《高等数学》(下册)等教材, 以及《高等数学》(上册)和《高等数学》(下册)等教材. 本书在编写过程中, 参考了国内外许多优秀的教材和文献, 特别是《高等数学》(上册)和《高等数学》(下册)等教材, 以及《高等数学》(上册)和《高等数学》(下册)等教材. 本书在编写过程中, 参考了国内外许多优秀的教材和文献, 特别是《高等数学》(上册)和《高等数学》(下册)等教材, 以及《高等数学》(上册)和《高等数学》(下册)等教材.

本书在编写过程中, 参考了国内外许多优秀的教材和文献, 特别是《高等数学》(上册)和《高等数学》(下册)等教材, 以及《高等数学》(上册)和《高等数学》(下册)等教材. 本书在编写过程中, 参考了国内外许多优秀的教材和文献, 特别是《高等数学》(上册)和《高等数学》(下册)等教材, 以及《高等数学》(上册)和《高等数学》(下册)等教材. 本书在编写过程中, 参考了国内外许多优秀的教材和文献, 特别是《高等数学》(上册)和《高等数学》(下册)等教材, 以及《高等数学》(上册)和《高等数学》(下册)等教材.

目 录

第9章 常微分方程	1
9.1 常微分方程的基本概念与分离变量法	1
9.1.1 微分方程的基本概念	1
9.1.2 分离变量法	3
思考题 9.1	4
练习题 9.1	4
9.2 一阶线性微分方程与可降阶的高阶微分方程	5
9.2.1 一阶线性微分方程	5
9.2.2 可降阶的高阶微分方程	7
思考题 9.2	9
练习题 9.2	9
9.3 二阶常系数线性微分方程	9
9.3.1 二阶常系数线性微分方程解的性质	9
9.3.2 二阶常系数齐次线性微分方程的求解方法	11
思考题 9.3	13
练习题 9.3	13
9.4 例题与练习	13
9.4.1 例题精选	13
9.4.2 综合练习	15
9.4.3 综合练习答案与提示	16
9.5 用 Matlab 解微分方程	16
思考题 9.5	18
练习题 9.5	18
第10章 向量与空间解析几何	19
10.1 空间直角坐标系与向量的概念	19
10.1.1 空间直角坐标系	19
10.1.2 向量的概念及其运算	20
10.1.3 向量的坐标表达式	22
思考题 10.1	24
练习题 10.1	24
10.2 向量的点积与叉积	24
10.2.1 两向量的点积	24
10.2.2 两向量的叉积	26
思考题 10.2	27
练习题 10.2	27
10.3 平面与直线	27



10.3.1 平面方程	28
10.3.2 直线方程	30
思考题 10.3	31
练习题 10.3	32
10.4 空间曲面与曲线	32
10.4.1 空间曲面的一般概念	32
10.4.2 母线平行与坐标轴的柱面方程	32
10.4.3 二次曲面	33
10.4.4 空间曲线及其在坐标面上的投影	36
思考题 10.4	38
练习题 10.4	38
10.5 例题与练习	38
10.5.1 例题精选	38
10.5.2 综合练习	40
10.5.3 综合练习答案与提示	41
10.6 用 Matlab 做向量运算及空间曲面	42
思考题 10.6	45
练习题 10.6	45
第 11 章 多元函数微分学	46
11.1 多元函数的极限与连续	46
11.1.1 多元函数	46
11.1.2 二元函数的极限与连续	48
思考题 11.1	49
练习题 11.1	49
11.2 偏导数	50
11.2.1 偏导数	50
11.2.2 高阶偏导数	53
思考题 11.2	54
练习题 11.2	54
11.3 全微分	54
11.3.1 全微分的定义	54
11.3.2 全微分在近似计算中的应用	56
思考题 11.3	57
练习题 11.3	57
11.4 多元复合函数微分法及偏导数的几何应用	57
11.4.1 复合函数微分法	58
11.4.2 隐函数的微分法	59
11.4.3 偏导数的几何应用	60
思考题 11.4	63
练习题 11.4	63
11.5 多元函数的极值	64
11.5.1 多元函数的极值	64



11.5.2 多元函数的最值	66
11.5.3 条件极值	67
思考题 11.5	68
练习题 11.5	68
11.6 例题与练习	68
11.6.1 例题精选	68
11.6.2 综合练习	70
11.6.3 综合练习答案与提示	72
11.7 用 Matlab 求偏导数与多元函数的极值	74
思考题 11.7	77
练习题 11.7	77
第 12 章 多元函数积分学	78
12.1 二重积分的概念与计算	78
12.1.1 二重积分的概念与性质	78
12.1.2 二重积分的性质	79
12.1.3 在直角坐标系下计算二重积分	80
12.1.4 在极坐标系下计算二重积分	82
思考题 12.1	84
练习题 12.1	85
12.2 二重积分应用举例	85
12.2.1 平面薄板的质量	85
12.2.2 平面薄板的重心	85
思考题 12.2	87
练习题 12.2	87
12.3 例题与习题	87
12.3.1 例题精选	87
12.3.2 综合练习	89
12.3.3 综合练习答案与提示	89
12.4 用 Matlab 做多重积分	90
思考题 12.4	91
练习题 12.4	91
第 13 章 级数	93
13.1 数项级数及其敛散性	93
13.1.1 数项级数及其性质	93
13.1.2 正项级数及其敛散性	96
13.1.3 交错级数及其敛散性	97
13.1.4 绝对收敛和条件收敛	98
思考题 13.1	99
练习题 13.1	99
13.2 幂级数	100
13.2.1 幂级数的概念	100

13.2.2	幂级数的运算	102
13.2.3	将函数展开成幂级数	103
13.2.4	幂级数的应用	105
	思考题 13.2	106
	练习题 13.2	107
13.3	例题与习题	107
13.3.1	例题精选	107
13.3.2	综合练习	110
13.3.3	综合练习答案与提示	111
13.4	用 Matlab 做级数运算	111
	思考题 13.4	113
	练习题 13.4	113
第 14 章	拉普拉斯变换	114
14.1	拉普拉斯变换的概念	114
	思考题 14.1	116
	练习题 14.2	116
14.2	拉氏变换的运算性质	116
	思考题 14.2	119
	练习题 14.2	119
14.3	拉氏变换的逆变换	119
	思考题 14.3	121
	练习题 14.3	121
14.4	拉氏变换及其逆变换的应用	121
	思考题 14.4	122
	练习题 14.4	123
14.5	例题与练习	123
14.5.1	例题精选	123
14.5.2	综合练习	123
14.5.3	综合练习答案与提示	124
14.6	用 Matlab 求拉普拉斯变换	124
	思考题 14.6	126
	练习题 14.6	126
附录 A	拉普拉斯变换简表	127
附录 B	部分练习题答案	128
	主要参考文献	135

第9章 常微分方程

函数是反映客观世界运动过程中量与量之间的一种关系,利用函数关系可以对客观事物的规律进行研究.但是在大量的实际问题中,这种关系往往不能直接建立起来,只能得到含有待求函数的导数和微分的关系式,即所谓微分方程.本章将从解决这类问题入手,引进微分方程的基本概念,重点介绍几种常用的微分方程的解法,而后介绍微分方程在几何、物理中的实际应用.

9.1 常微分方程的基本概念与分离变量法

本节主要介绍常微分方程的一些基本概念,并介绍一种求解微分方程的方法——分离变量法.

9.1.1 微分方程的基本概念

例1 一曲线通过点(1,3),且该曲线上任意一点 $M(x, y)$ 处的切线斜率为 $2x$,求该曲线方程.

解 设所求曲线方程为 $y = y(x)$,根据导数的几何意义得

$$\frac{dy}{dx} = 2x, \quad (9.1)$$

两边积分得

$$y = \int 2x dx = x^2 + C \quad (C \text{ 为任意常数}),$$

由于曲线过点(1,3),所以曲线方程 $y = y(x)$ 还应满足条件

$$y(1) = 3, \quad (9.2)$$

即 $3 = 1^2 + C$,解得 $C = 2$,于是所求曲线方程为

$$y = x^2 + 2. \quad (9.3)$$

例2 一物体以初速度 v_0 竖直上抛,设该物体在运动中只受重力影响,试确定物体运动的路程 s 与时间 t 的函数关系.

解 因为物体运动的加速度是路程 s 对时间 t 的二阶导数,且题设物体只受重力影响,所以由牛顿第二定律得

$$ms''(t) = -mg,$$

即

$$s''(t) = -g, \quad (9.4)$$

其中 m 为物体的质量, g 为重力加速度.

由于物体的运动速度 $v = s'(t)$,所以式(9.4)可以写成

$$\frac{dv}{dt} = -g,$$

上式两边积分一次得

$$s'(t) = v = -\int g dt = -gt + C_1, \quad (9.5)$$

上式两边再积分一次得

$$s(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + C_1t + C_2, \quad (9.6)$$

其中 C_1, C_2 为任意常数. 如果物体开始上抛时的路程为 s_0 , 则 $s(t)$ 还应满足下列条件

$$s'(0) = v_0, s(0) = s_0.$$

将以上二式分别代入式(9.5)、(9.6), 得 $C_1 = v_0, C_2 = s_0$, 因此

$$s(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0t + s_0,$$

即为所求函数关系.

从以上两个例子可以看到, 在实际问题中, 有时只能从含有未知函数导数的等式中来求未知函数, 于是我们引进微分方程的概念: 含有未知函数的导数(或微分)的等式称为微分方程. 未知函数是一元函数的微分方程称为常微分方程, 未知函数是多元函数的微分方程称为偏微分方程.

微分方程中, 所含未知函数的导数的最高阶数称为微分方程的阶. 如方程(9.1)是一阶微分方程, 方程(9.4)是二阶微分方程. 方程

$$y^{(n)} + 4x^2y' + 7\sin(xy) - y^2 = e^x$$

是 n 阶微分方程.

称微分方程中最高阶导数的次数为该方程的次数. 如果微分方程中未知函数及其各阶导数都是一次, 且不含这些变量的交叉项, 如 $\sin(xy)$, 称为线性微分方程. 在线性微分方程中, 如果未知函数的系数及其各阶导数的系数都是常数, 则该方程称为常系数线性微分方程, 否则称为变系数线性微分方程, 如

$$\frac{ds}{dt} = 2t \quad \text{一阶常系数线性微分方程;}$$

$$y'' + 2y' - 3y = 5e^{2x} \quad \text{二阶常系数线性微分方程;}$$

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0 \quad \text{二阶变系数线性微分方程.}$$

定义9.1 如果一个函数代入微分方程后, 方程两端恒等, 则该函数称为微分方程的解.

例如 $y = x^3 + C, y = x^3 + 2$ 都是微分方程 $y' = 3x^2$ 的解.

如果一阶微分方程的解中含有一个任意常数, 则称此解为该微分方程的通解. 不含任意常数的解, 称为微分方程的特解.

例如 $y = x^3 + C$ 是方程 $y' = 3x^2$ 的通解, 而 $y = x^3 + 2, y = x^3 - 1$ 都是方程 $y' = 3x^2$ 的特解. 确定任意常数取固定值的条件称为初始条件.

如例1的初始条件可以记作 $y(1) = 3$ 或 $y|_{x=1} = 3$. 一般地, 一阶微分方程的初始条件为

$$y(x_0) = y_0 \quad \text{或} \quad y|_{x=x_0} = y_0.$$

更一般地, 如果一阶线性方程的解中含有两个独立的任意常数, 则称该解为该二阶线性方程的通解.

9.1.2 分离变量法

定义 9.2 形如

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y) \quad (9.7)$$

的方程, 称为可分离变量的方程, 其中 $f(x)$ 只是 x 的函数, $g(y)$ 只是 y 的函数.

求解步骤如下.

(1) 分离变量

$$\frac{dy}{g(y)} = f(x)dx.$$

(2) 两边积分

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx.$$

(3) 求出积分, 得通解

$$G(y) = F(x) + C.$$

其中, $G(y)$, $F(x)$ 分别是 $\frac{1}{g(y)}$, $f(x)$ 的原函数.

例 3 求微分方程 $y' = -\frac{x}{y}$ 的通解.

解 分离变量得

$$ydy = -x dx,$$

两边积分

$$\int ydy = -\int x dx,$$

即

$$\frac{1}{2}y^2 = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{C}{2},$$

于是, 所求通解为

$$x^2 + y^2 = C \quad (\text{其中 } C \text{ 为任意常数}).$$

例 4 求微分方程 $y' = 2xy$ 的通解.

解 分离变量得

$$\frac{dy}{y} = 2x dx,$$

两边积分

$$\int \frac{dy}{y} = 2 \int x dx,$$

即

$$\ln|y| = x^2 + C_1, \quad (0.1.1)$$

于是

$$y = Ce^{x^2} \quad (\text{其中 } C = \pm e^{C_1}).$$

易验证 $y=0$ 也是方程的解(分离变量时两边同除以 y 所丢失的解), 故 C 可取零值, 所以, 原方程的通解为 $y = Ce^{x^2}$ (C 为任意常数).

注 本题在对 $\int \frac{dy}{y}$ 积分时可简化为 $\int \frac{dy}{y} = \ln y$, 结果仍为 $y = Ce^{x^2}$.

例5 求微分方程 $dP = kP(N-P)dt$ ($N, P > 0$, 且均为常数)的解, 其中假设 $0 < P < N$.

解 分离变量得

$$\frac{dP}{P(N-P)} = k dt,$$

两边积分

$$\int \frac{dP}{P(N-P)} = \int k dt,$$

即

$$\frac{1}{N} \int \left(\frac{1}{P} + \frac{1}{N-P} \right) dP = k \int dt,$$

于是

$$\frac{1}{N} \ln \frac{P}{N-P} = kt + C.$$

该方程称为逻辑斯蒂曲线方程, 是生物学、经济学等学科中一条重要曲线.

思考题 9.1

1. 你能写出以 $y = Ce^x$ 为通解的一阶线性微分方程吗?
2. 同一微分方程的任意两个特解之间仅差一个常数吗?

练习题 9.1

1. 验证函数 $y = Ce^{-x} + x - 1$ 是方程 $y' - x + y = 0$ 的解, 并指出是通解还是特解.
2. 求下列微分方程的通解:

(1) $(1+y)dx + (x-1)dy = 0$;

(2) $y' = \frac{x^3}{y^3}$;

(3) $y' + e^x y = 0$;

(4) $y' = \frac{y}{\sqrt{1-x^2}}$.

3. 求下列微分方程的特解:

(1) $y' = e^{2x-y}, y|_{x=0} = 0$;

(2) $\frac{du}{dt} = u + ut^2, u(0) = 5$.