中等专业学校试用教材

工科专业通用

数学

第二册第二分册

高等教育出版社

目　录

第九章 二次曲线

在生产实际和科学研究中，除了应用初中学过的直线知识以外，还常遇到圆、椭圆、双曲线和抛物线等二次曲线．例如：油罐车上油罐的封头、太阳系各行星的运行轨道都是椭圆形；有些彗星运行的轨道是双曲线形；物体以初速 v_0 并与水平面成 α 角向上抛出时，物体运行的轨道是抛物线等等．

本章将在建立曲线与方程概念的基础上，介绍这几种二次曲线的定义、方程、图象和性质，并应用它们解决一些实际问题．

§9-1 曲线与方程

在建立曲线与方程的概念之前，先介绍数学中的一个重要概念——充要条件．

一 充要条件

1 充分条件 先看下面的例子．

（1）如果 $a=b$，那末 $a^2=b^2$．这时我们说“$a=b$”是“$a^2=b^2$”成立的充分条件．

（2）如果两个三角形全等，那末这两个三角形的面积相等．这时我们说“两个三角形全等”是“两个三角形面积相等”成立的充分条件．

一般地，如果 P 成立，那末 Q 一定成立，即 $P\Longrightarrow Q$（“$\Longrightarrow$”表示导致的意思），这时我们说条件 P 是 Q 成立的**充分条件**．也就是说，有了条件 P，就已经可以充分地得到 Q．

2　必要条件　先看下面的例子．

(1) 如果 $a=b$，那末 $a^2=b^2$。这时我们说"$a^2=b^2$"是"$a=b$"成立的必要条件．

(2) 如果两个三角形全等，那末这两个三角形的面积相等。这时我们说"两个三角形面积相等"是"这两个三角形全等"的必要条件．

一般地，如果 Q 成立，那末 P 一定成立，即 $Q \Longrightarrow P$，这时我们说条件 P 是 Q 成立的**必要条件**．也就是说，要使 Q 成立，就必须有条件 P，如果 P 不成立，那末 Q 一定不成立．

例如，在(1)中，如果 $a^2 \neq b^2$，显然 $a \neq b$；在(2)中，如果两个三角形的面积不相等，显然这两个三角形不能全等．

3　充要条件

如果既有 $P \Longrightarrow Q$，又有 $Q \Longrightarrow P$，那末 P 既是 Q 成立的充分条件，又是 Q 成立的必要条件，这时，我们就说 P 是 Q 成立的充分而且必要的条件，简称**充要条件**．

例如，如果点 M 在直线 l 上，那末点 M 的坐标 (x, y) 一定满足直线 l 的方程 $Ax+By+C=0$；反过来，如果点 M 的坐标 (x, y) 满足直线 l 的方程 $Ax+By+C=0$，那末点 M 一定在直线 l 上．这时我们说"点 M 在直线 l 上"既是"点 M 的坐标 (x, y) 满足直线 l 的方程 $Ax+By+C=0$"的充分条件，又是必要条件，所以是充要条件．

又如，在上一章里学过的三垂线定理："在平面内过斜线足所引垂直于这斜线的射影的直线，必垂直于这条斜线"中可以看出，"直线垂直于斜线的射影"是"直线垂直于这条斜线"的充要条件．

应当注意，有些条件是充分条件，但不是必要条件；也有些

条件是必要条件，但不是充分条件.

例如，$a=b$ 是 $a^2=b^2$ 的充分条件而不是必要条件，因为如果 $a^2=b^2$，那末 a 与 b 不一定相等. $a^2=b^2$ 是 $a=b$ 的必要条件而不是充分条件，因为要使 $a=b$，只有 $a^2=b^2$ 这一个条件是不够的. 如果 $a^2=b^2$，且 a 与 b 是符号相同的两个数，那末 $a^2=b^2$ 就既是 $a=b$ 的必要条件，又是充分条件，即充要条件了.

又如，两个三角形全等是这两个三角形面积相等的充分条件而不是必要条件，因为如果两个三角形面积相等，这两个三角形不一定全等. 两个三角形面积相等是这两个三角形全等的必要条件而不是充分条件，因为要使这两个三角形全等，只有面积相等这一个条件是不够的.

充要条件是数学中的一个重要概念，我们将在今后的学习中进一步掌握和运用这个概念.

二　曲线与方程的概念

我们知道，在平面直角坐标系中，一条直线可以用含有 x 和 y 的方程 $Ax+By+C=0$ 来表示；对称轴平行于 Oy 轴的一条抛物线可以用含有 x 和 y 的方程（或二次函数）$y=ax^2+bx+c$ $(a\neq 0)$ 来表示. 现在我们来研究平面内的任意曲线和含有 x、y 的方程之间的关系.

一条曲线可以看作是适合于某种条件的点的轨迹（或集合），这就是说：

（1）在这曲线上的点都适合某种条件；

（2）适合某种条件的点都在这曲线上.

也就是说，点所适合的条件是形成轨迹的充要条件.

例如，与原点的距离等于 5 的点的轨迹是以原点为圆心，以

5 为半径的圆．显然，在这个圆上的点都适合条件"与原点的距离等于 5"，而适合这个条件的点都在这个圆上．

在平面直角坐标系内，由于点可以用它的坐标 (x, y) 来表示，所以点所适合的条件可以用含 x 和 y 的一个方程来表示．

例如，上面例子中的条件可以用方程 $\sqrt{x^2+y^2}=5$，即 $x^2+y^2=25$ 来表示，实际上这个方程就是适合条件的圆的方程．

下面给出曲线的方程的定义：

如果曲线上的任何点的坐标 (x, y) 都满足一个含 x 和 y 的方程，而满足这个方程的 x 和 y 所表示的点都在曲线上，那末这个方程就叫做该曲线的方程，这条曲线就叫做该方程的轨迹或图象．方程中所含有的点的坐标 x 和 y 叫做**流动坐标**．

在曲线和方程之间建立了这样的关系以后，研究曲线的几何问题就可以化成研究方程的代数问题了．

例 1 判定 $A(3, -4)$ 和 $B(4, 5)$ 两点是否在曲线 $x^2+y^2=25$ 上．

解 将 A 点的坐标代入所给方程中，得

$$(3)^2+(-4)^2=25.$$

这就是说，A 点的坐标满足所给方程，所以点 $A(3, -4)$ 在曲线 $x^2+y^2=25$ 上．

因为 B 点的坐标 $(4, 5)$ 不满足所给的方程，即

$$(4)^2+(5)^2\neq 25.$$

所以点 $B(4, 5)$ 不在曲线 $x^2+y^2=25$ 上，

例 2 试求下列两曲线的交点：

$$x^2+y^2-4x+8y-5=0,\ y=0.$$

解 解方程组

得
$$\begin{cases}x^2+y^2-4x+8y-5=0,\\ y=0.\end{cases}$$

$$\begin{cases}x_1=5,\\ y_1=0;\end{cases}\qquad \begin{cases}x_2=-1,\\ y_2=0.\end{cases}$$

所以，两曲线的交点坐标为(5, 0)和(−1, 0).

三　由曲线求它的方程

我们来看下面的例子.

例 3　设 A、B 两点的坐标分别是 $A(2, 4)$ 和 $B(6, -2)$，求线段 AB 的垂直平分线 PQ 的方程.

解　显然，线段 AB 的垂直平分线 PQ 是到两定点 A、B 距离相等的点的轨迹.

设 $M(x, y)$ 是直线 PQ 上的任意一点(图 9-1). 按题意，得

$$|MA|=|MB|.$$

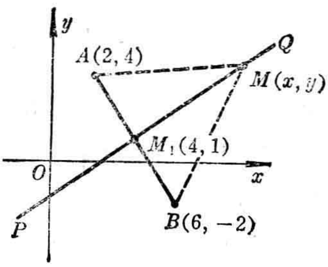

图 9-1

根据两点间的距离公式，得

$$\sqrt{(x-2)^2+(y-4)^2}=\sqrt{(x-6)^2+(y+2)^2}. \qquad (1)$$

化简，得

$$2x-3y-5=0. \qquad (2)$$

现在再来证明化简后所得方程(2)就是直线 PQ 的方程，即证明满足方程(2)的 x 和 y 所表示的点都在直线 PQ 上.

设点 M_1 的坐标(x_1, y_1)是满足方程(2)的任意一对 x 和 y 的值. 我们来计算$|M_1A|$和$|M_1B|$:

$$|M_1A|=\sqrt{(x_1-2)^2+(y_1-4)^2}, \qquad (3)$$

$$|M_1B|=\sqrt{(x_1-6)^2+(y_1+2)^2}. \qquad (4)$$

因为 M_1 的坐标(x_1, y_1)满足方程(2)，所以

$$2x_1-3y_1-5=0,$$

即
$$x_1=\frac{1}{2}(3y_1+5). \tag{5}$$

把(5)分别代入(3)和(4), 得

$$|M_1A|=\sqrt{\left[\frac{1}{2}(3y_1+5)-2\right]^2+(y_1-4)^2}$$
$$=\frac{1}{2}\sqrt{13y_1^2-26y_1+65},$$
$$|M_1B|=\sqrt{\left[\frac{1}{2}(3y_1+5)-6\right]^2+(y_1+2)^2}$$
$$=\frac{1}{2}\sqrt{13y_1^2-26y_1+65}.$$

可见
$$|M_1A|=|M_1B|.$$

因此, 点 M_1 在直线 PQ 上, 也就是方程 (2) 确是所求直线 PQ 的方程.

由上面的例子可以看出, 由已知曲线求它的方程有以下的一般步骤:

(1) 建立适当的直角坐标系, 并设 $M(x, y)$ 为已知曲线上的任意点(即动点);

(2) 按题意用等式写出动点所要适合的条件;

(3) 用动点的坐标 x 和 y 之间的关系式表示上述条件, 即得方程;

(4) 将方程化简;

(5) 证明化简后的方程为已知曲线的方程.

其中步骤 (5)的运算较为烦琐, 且化简后的方程确是已知曲线的方程, 以后这一步可以省略不写.

例 4 设一动点 M 与两个定点 A、B 所连的直线互相垂直,

试求动点 M 的轨迹的方程.

解 第一法：以通过 A 和 B 两定点的直线作为 Ox 轴，AB 的中点 O 为原点，建立直角坐标系 xOy(图9-2)，如果设 $AB=2r$ (常量)，那末 A 和 B 两点的坐标分别为 $(-r, 0)$ 和 $(r, 0)$.

设 $M(x, y)$ 为曲线上不与 A、B 重合的任意一点，由已知条件

$$MA \perp MB$$

得

$$|MA|^2+|MB|^2=|AB|^2.$$

根据两点间的距离公式，得

$$[\sqrt{(x+r)^2+y^2}]^2+[\sqrt{(x-r)^2+y^2}]^2=(2r)^2.$$

化简，得

$$x^2+y^2=r^2, \tag{1}$$

点 A、B 的坐标满足方程(1)，故(1)是所求的轨迹方程.

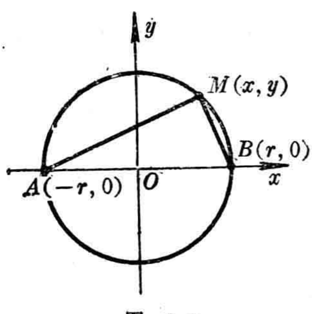

图 9-2

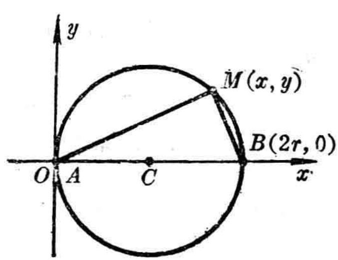

图 9-3

第二法：以通过 A 和 B 两定点的直线作为 Ox 轴，A 为原点建立直角坐标系 xOy (图 9-3)，如果设 $AB=2r$ (常量)，那末 A 和 B 两点的坐标分别为 $(0, 0)$ 和 $(2r, 0)$.

设 $M(x, y)$ 为曲线上不与 A、B 重合的任一点，与第一法相同可得

$$|MA|^2+|MB|^2=|AB|^2.$$

于是

$$[\sqrt{x^2+y^2}]^2+[\sqrt{(x-2r)^2+y^2}]^2=(2r)^2.$$

化简，得

$$x^2+y^2-2xr=0, \tag{2}$$

点A、B的坐标满足方程(2)，故(2)是所求的轨迹方程.

比较方程(1)和(2)，可以看出，虽然它们都是同一轨迹的方程，但是由于坐标系选择的不同，所得轨迹的方程的形式也就不同，而方程(1)要比方程(2)简单，因此在建立曲线方程时，要注意选择适当的坐标系，使曲线方程的形式比较简单.

习　题　9-1

1. 什么叫做条件P是Q成立的充分条件、必要条件和充要条件？

2. (1)“两条直线l_1、l_2的斜率$k_1=k_2$”是“$l_1 /\!/ l_2$”的什么条件？为什么？

(2)“两条直线l_1、l_2的斜率的积$k_1k_2=-1$”是“$l_1\perp l_2$”的什么条件？为什么？

(3)“四边相等”是“一个四边形是正方形”的什么条件？为什么？

(4)“两条直线不相交”是“这两条直线异面”的什么条件？为什么？

(5)“$x-1=0$”是“$x^2-1=0$”的什么条件？为什么？

3. 什么叫做曲线的方程？求曲线方程的一般步骤是什么？

4. 判定下列各曲线是否经过原点：

(1) $y=x^2-3x$;

(2) $y=\dfrac{x}{1-2x}$;

(3) $x^2+y^2-10x+9=0$.

5. 求下列各曲线的交点坐标：

(1) $x^2+y^2=25$与$x+y=7$;

(2) $xy=2$与$x^2=4y$.

6. 如果点 $A(x_1, -4)$ 是在曲线 $x^2-4x-2y-5=0$ 上，试求点 A 的横坐标 x_1.

7. 在第 I 和第 III 象限角的平分线上找一点 M，使它与点 $A(-2, -4)$ 和与点 $B(1, -3)$ 的距离相等.

8. 求适合于下列条件的动点的轨迹方程:

(1) 与 Oy 轴的距离等于 2;

(2) 与直线 $x-2=0$ 的距离等于 3;

(3) 与直线 $y+3=0$ 的距离等于 6;

(4) 与原点的距离等于 15.

9. 试求与直线 $x=-3$ 和点 $(2, 4)$ 等距离的点的轨迹方程.

10. 一动点到 Ox 轴的距离，等于到 Oy 轴的距离的 2 倍加 3，若限定动点在第 I 象限内变化，试求动点的轨迹方程.

11. 一动点与点 $A(2, 4)$ 所连直线的斜率，等于它与点 $B(-2, 4)$ 所连直线的斜率加 3，试求动点的轨迹方程.

12. 求到 Ox 轴和 Oy 轴的距离是 1:2 的动点的轨迹方程.

13. 一动点到定点 $A(12, 16)$ 的距离等于它到定点 $B(3, 4)$ 的距离的 2 倍，求动点的轨迹方程.

14. 求到 $A(-3, 0)$ 和 $B(3, 0)$ 的距离的平方和是 30 的动点的轨迹方程.

15. 求到 $A(-4, 0)$ 和 $B(4, 0)$ 的距离的平方差是 48 的动点的轨迹方程.

16. 一个动点到 $F_1(-3, 0)$ 和 $F_2(3, 0)$ 的距离之和等于 10，求此动点的轨迹方程.

17. 等腰三角形一腰的两端是 $A(4, 2)$ 和 $B(3, 5)$，求这三角形第三个顶点的轨迹方程.

18. 一条线段 AB 的长等于 $2a$，两个端点 A 和 B 分别在 Ox 轴和 Oy 轴上滑动，求 AB 中点 M 的轨迹方程.

19. 过定点 $M(a, b)$ 作直线交二坐标轴于 A、B 两点，试求 AB 中点的轨迹方程.

20. 求与原点及直线 $x+4y=3$ 等距离的点的轨迹方程.

§9-2　圆

一　圆的方程

我们已经知道，与一定点的距离等于定长的动点的轨迹叫做圆，这个定点叫做圆心，定长叫做半径．现在来求以 $C(a, b)$ 为圆心，r 为半径的圆的方程．

设 $M(x, y)$ 是圆上的任意一点(图 9-4)．由已知条件得

$$|MC|=r.$$

根据两点间的距离公式，得

$$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}=r.$$

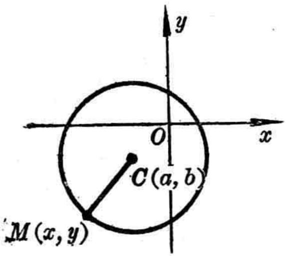

图　9-4

两边平方，得

$$\boxed{(x-a)^2+(y-b)^2=r^2} \qquad (9\text{-}1)$$

这个方程叫做**圆的标准方程**．当 $a=b=0$ 时，圆的方程就是

$$x^2+y^2=r^2.$$

这就是以原点为圆心，r 为半径的圆的方程．

现在我们把方程(9-1)展开成下面的形式：

$$x^2+y^2-2ax-2by+(a^2+b^2-r^2)=0.$$

设　$-2a=D$, $-2b=E$, $a^2+b^2-r^2=F$，代入上式，　得

$$\boxed{x^2+y^2+Dx+Ey+F=0} \qquad (9\text{-}2)$$

这个方程叫做**圆的一般方程**．

由方程 (9-2) 我们看到，圆的方程是一个含有流动坐标 (x, y) 的二次方程，其特点是：

(1) x^2 与 y^2 项的系数相等;

(2) 不含 xy 项(即 xy 项的系数等于零).

反过来，我们来研究方程 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$ 的图象是否是圆. 把方程进行配方，得

$$\left(x+\frac{D}{2}\right)^2+\left(y+\frac{E}{2}\right)^2=\frac{D^2+E^2-4F}{4}. \qquad (1)$$

如果 $D^2+E^2-4F>0$，将方程(1)和方程(9-1)比较，可以看出，它表示一个圆，其圆心为$\left(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2}\right)$，而半径为

$$r=\frac{\sqrt{D^2+E^2-4F}}{2}.$$

如果 $D^2+E^2-4F=0$，方程(1)表示一个以$\left(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2}\right)$为圆心，而半径为零的圆，这时我们称它为**点圆**.

如果 $D^2+E^2-4F<0$，显然能满足方程(1)的实数不存在，所以方程(1)不表示任何曲线，这时我们称它为**虚圆**.

例 1 判定方程 $2x^2+2y^2+2x-2y-5=0$ 所表示的曲线形状.

解 第一法：用 2 除方程的两边，得

$$x^2+y^2+x-y-\frac{5}{2}=0. \qquad (1)$$

将方程(1)左边按 x、y 分别配成完全平方，得

$$\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=3.$$

因此，原方程表示一个圆，圆心为$\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$，半径为$\sqrt{3}$.

第二法：把方程(1)与方程(9-2)作比较，可知

$$D=1, E=-1, F=-\frac{5}{2},$$

$$D^2+E^2-4F=1^2+(-1)^2-4\left(-\frac{5}{2}\right)=12>0,$$

$$\therefore \qquad r=\frac{\sqrt{D^2+E^2-4F}}{2}=\frac{\sqrt{12}}{2}=\sqrt{3},$$

$$a=-\frac{D}{2}=-\frac{1}{2}, \qquad b=-\frac{E}{2}=\frac{1}{2}.$$

因此，原方程表示一个圆，圆心为$\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$，半径等于$\sqrt{3}$.

二　圆的确定

我们知道，两个条件可决定一条直线，现在来研究决定一个圆需要几个条件.

因为圆的方程

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$$

或

$$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$$

中，每一个方程都含有三个常数(a、b、r 或 D、E、F)，求圆的方程就是要确定这三个常数. 而决定这三个常数必须并且只须具备三个条件，所以确定一个圆需要三个条件.

例 2　试求经过点 $A(1, -1)$, $B(2, 0)$ 和 $C(0, 0)$ 的圆的方程(图 9-5).

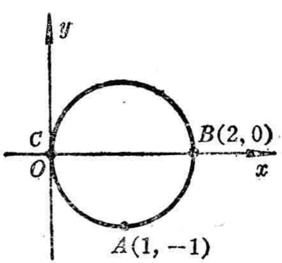

图　9-5

解　设所求圆的方程为

$$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0.$$

因为 A、B、C 三点在圆上，所以它们的坐标都应该满足这个方程，因

此得

$$\begin{cases} 2+D-E+F=0; \\ 4+2D+F=0; \\ F=0. \end{cases}$$

解这个方程组，得

$$D=-2,\ \ E=0\ \ 及\ \ F=0.$$

因此所求圆的方程为

$$x^2+y^2-2x=0.$$

例 3 一圆与横轴相切于点 $A(2, 0)$，且经过点 $B(-1, 3)$，求该圆的方程.

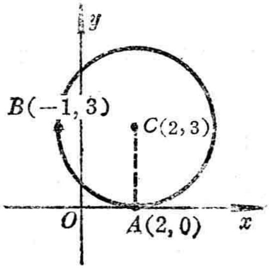

图 9-6

解 设所求圆的方程为

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2. \tag{1}$$

如图 9-6 所示，连结 AC，$\because AC\perp Ox$ 轴，

$$\therefore\ \ a=2 \tag{2}$$

由于点 $A(2, 0)$ 及 $B(-1, 3)$ 在圆上，所以将此两点的坐标分别代入方程(1)，得

$$(2-a)^2+(0-b)^2=r^2, \tag{3}$$

及

$$(-1-a)^2+(3-b)^2=r^2. \tag{4}$$

解方程组(2)、(3)、(4)，得

$$a=2,\quad b=3,\quad r=3.$$

因此所求圆的方程为

$$(x-2)^2+(y-3)^2=9,$$

或

$$x^2+y^2-4x-6y+4=0.$$

例4 如果直线 $y=kx+5$ 与圆 $x^2+y^2=16$ 相切，试求 k 的值.

解 第一法：因为切点既在直线上又在圆上，所以切点的坐标必须满足方程组：

$$\begin{cases} y=kx+5, & (1) \\ x^2+y^2=16. & (2) \end{cases}$$

将(1)式代入(2)式，得

$$x^2+(kx+5)^2=16,$$

即
$$(k^2+1)x^2+10kx+9=0. \qquad (3)$$

因为直线与圆相切，只有一个交点，因此方程(3)的两个解相等，它的判别式应等于0，即

$$(10k)^2-4(k^2+1)\cdot 9=0.$$

解这个方程，得

$$k=\pm\frac{3}{4}.$$

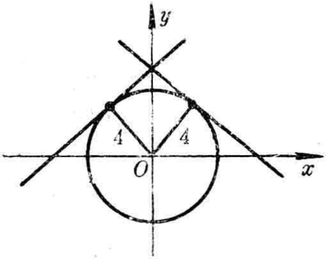

图 9-7

第二法：先将直线 $y=kx+5$ 化为 $kx-y+5=0$ 的形式.

因为直线 $kx-y+5=0$ 与圆 $x^2+y^2=16$ 相切，所以圆心(0, 0)到直线的距离等于半径4(图9-7). 我们知道，点(x_0, y_0)到直线 $Ax+By+C=0$ 的距离公式为

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

现在 $x_0=y_0=0$, $A=k$, $B=-1$, $C=5$, $d=4$. 代入上式，得

$$=\frac{|k(0)+(-1)(0)+5|}{\sqrt{k^2+1}},$$

即
$$4=\frac{5}{\sqrt{k^2+1}}.$$

解方程，得

$$k=\pm\frac{3}{4}.$$

习　题　9-2

1. 圆的标准方程和一般方程是怎样的，它们有什么特点？

2. 试求圆心在点$(3, -5)$，而半径等于4的圆的方程.

3. 试求圆

$$2x^2+2y^2-3y-2=0$$

的圆心和半径.

4. 试求以直线$3x-4y+12=0$在坐标轴间的线段为直径的圆的方程.

5. 试求经过点$(4, -2)$又与两坐标轴相切的圆的方程，并作图.

6. 试求半径为a且与Oy轴相切于原点的圆的方程，并作图.

7. 有等腰三角形，它的高等于5个单位长，底是点$(-4, 0)$和$(4, 0)$间的线段. 试求其外接圆的方程.

8. 一直线的斜率为2，并与圆$x^2+y^2=5$相切，试求此直线的方程.

9. 一直线的纵截距为5，并与圆$x^2+y^2=5$相切，试求此直线的方程.

10. 试证：与两定点的距离之比为定值$k(k\neq 1)$的点的轨迹是一个圆.

11. 求平行于直线$x+y-3=0$，并与圆$x^2+y^2-6x-4y+5=0$相切的直线方程.

12. 一圆的半径为5，且与圆$x^2+y^2-10x-14y+65=0$外切于点$(5, 4)$，试求此圆的方程.

13. 试证：直线$4x-3y-6=0$与圆$x^2+y^2-18x+45=0$相切.

14. 求经过点$(8, 3)$而与直线$x=6$, $x=10$相切的圆的方程.

15. 求与三直线$x=0$, $x=1$, $3x+4y+5=0$都相切的圆的方程.